

EFICIÊNCIA DE DELINEAMENTOS QUASE-ÓTIMOS EM EXPERIMENTOS COM MISTURAS

Paulo Leonardo Sirimarco GOMES¹
Carlos Alberto Ribeiro DINIZ¹

- **RESUMO:** Neste trabalho são considerados delineamentos ótimos para modelos quadráticos em experimentos com misturas com três componentes em blocos ortogonais. Os delineamentos ótimos tem tido um uso extensivo dentro de experimentos com misturas, principalmente quando é necessário considerar certas condições externas ao experimento conhecidas como variáveis de processo. Entretanto, os delineamentos ótimos possuem um ponto negativo no sentido de não levar em conta a disponibilidade de ingredientes ou restrições adicionais. Prescott (1998) propôs uma reparametrização do sistema de coordenadas que além de simplificar as expressões associadas aos critérios, permite também provocar pequenas modificações nas proporções ótimas para contornar os problemas causados pela falta de ingredientes ou pelas restrições adicionais. Neste trabalho propomos uma modificação na medida de eficiência em Prescott (1998), afim de que se possa medir o afastamento da situação ótima para os critérios D-, A- e E-ótimos e compará-los nas situações onde não é possível produzir o produto sem a presença de todos os ingredientes.
- **PALAVRAS-CHAVE:** Experimentos com misturas, delineamentos quase-ótimos.

¹Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, Caixa Postal 676, CEP: 13565-905, São Carlos, SP, E-mail: dcad@power.ufscar.br

1 Introdução

Em alguns experimentos de mistura a resposta de interesse não depende somente das proporções dos componentes da mistura, mas depende também de certas condições externas, denominadas variáveis de processo.

Em experimentos com misturas envolvendo variáveis de processo, normalmente o planejamento leva em conta a combinação de dois delineamentos, um dos quais associado às variáveis de mistura e o outro associado às variáveis de processo. Dos planejamentos de experimentos com misturas envolvendo variáveis de processo sugeridos na literatura, têm-se os delineamentos simplexos (látice e centroíde) combinados com delineamentos fatoriais (Gorman e Cornell, 1982) e os delineamentos ótimos combinados com delineamentos fatoriais (Czitrom, 1988, 1989 e 1992; Chan e Sandhu, 1996). Os delineamentos ótimos combinados com delineamentos fatoriais têm tido uma grande aceitação na comunidade por propiciar uma redução significativa no número de ensaios em relação aos delineamentos clássicos já existentes (Prescott, 1998, 2000; Ghosh e Liu, 1999; Chan e Sandhu, 1996).

A idéia principal dos delineamentos ótimos é executar diferentes blocos de misturas nas diferentes combinações de tratamentos das variáveis de processo, diferentemente dos delineamentos clássicos: simplexos lattice e centróide que executam o mesmo conjunto de misturas.

Na maioria dos trabalhos na literatura que tratam de experimentos com misturas envolvendo variáveis de processo com delineamentos ótimos em blocos, os critérios D-, A- e E-ótimos são os mais utilizados e são os únicos que podem ser obtidos por uma função critério geral (Chan, 2000; Chan e Sandhu, 1996), dada por

$$\Phi_p(X'X) = \sum_{k=1}^r \left(\lambda_k^{-p/r} \right)^{1/p}, \quad (1)$$

sendo: X a matriz de planejamento associado ao modelo de mistura; $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores da matriz $X'X$ cuja ordem é r ; e p o responsável pela definição do critério. Note que (1) reduz-se à função-critério de A-, D-, e E-otimalidade quando $p = 1$, $p \rightarrow 0^+$ e $p \rightarrow \infty$, respectivamente.

Os delineamentos ótimos possuem um ponto negativo, no sentido em que os mesmos não levam em conta as situações

onde, por exemplo, todos os ingredientes devem participar da mistura. Isto ocorre devido ao fato que os delineamentos ótimos consistem de misturas binárias. Uma reparametrização do sistema de coordenadas (Prescott, 1998) pode ser realizada para permitir, além da simplificação das expressões associadas aos critérios, pequenas modificações nas proporções ótimas para permitir a inclusão de alguns ou todos os ingredientes. Se por um lado a reparametrização se faz necessária, por outro faz com que o delineamento se afaste da situação ótima. Determinar este afastamento é importante para acompanhar o quanto se perde, com relação ao afastamento da situação ótima, na medida em que os novos ingredientes vão se afastando da proporção zero. Prescott (1998) define uma medida de eficiência para medir este afastamento considerando o critério D-ótimo.

Neste trabalho, utilizando a medida de Prescott (1998) aplicada ao critério de D-ótimo, mediremos também o afastamento da situação ótima para o critério E-ótimo, e com uma pequena modificação na medida de eficiência, faremos o mesmo para o critério A-ótimo. Com isto é possível descobrir qual é o critério mais robusto em situações onde as proporções ótimas são alteradas.

2 Experimentos com Misturas

Um experimento com mistura é um experimento cuja variável resposta, característica a ser observada na mistura, é uma função somente das proporções relativas dos ingredientes presentes na mistura e não da quantidade total da mistura.

As proporções dos diversos componentes de uma mistura não são independentes, são não negativas e se forem expressas como frações da mistura, têm soma igual a 1. Desta forma, sejam x_1, x_2, \dots, x_q , q proporções de componentes de mistura tais que $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, q$, e $x_1 + x_2 + \dots + x_q = 1$ (Cornell, 1990). Estas restrições implicam que as proporções x_i 's podem assumir valores dentro do simplexo $(q - 1)$ dimensional. Para o caso de $q = 3$ o simplexo é representado geometricamente por um triângulo equilátero.

Em experimentos com misturas, o modelo de regressão para a resposta pode ser expresso na forma $y = \eta(\mathbf{x}) + e$, onde $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ pertence ao simplexo $(q - 1)$ dimensional, y é a resposta observada em \mathbf{x} e $\eta(\mathbf{x})$ e e são respectivamente resposta

esperada e erro aleatório. Normalmente, assume-se que os erros são independentes, têm média 0 e variância constante σ^2 .

Várias formas de η foram sugeridas na literatura, tais como, polinômios canônicos (Scheffé, 1958) e modelos com termos inversos (Draper e St John, 1977).

3 Delineamentos Ótimos em Blocos ortogonais

Os delineamentos ótimos em blocos ortogonais, diferentemente dos esquemas usuais, simplexos látice e centróide, têm sido amplamente usado pela comunidade por possuir algumas características de interesse, tais como, o fato de os parâmetros do modelo referentes às proporções de mistura poderem ser estimados independentemente dos parâmetros referentes às variáveis de processo e por exigirem um número de observações menor que os esquemas usuais.

Em experimentos envolvendo variáveis de processo com delineamentos ótimos em blocos ortogonais, o delineamento experimental associado consiste em executar *diferentes* blocos de misturas nas diferentes combinações de níveis das variáveis de processo.

Consideremos o seguinte modelo de mistura com variáveis de processo:

$$y = \eta(\mathbf{x}) + f(\mathbf{z}) + e$$

onde $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_q)$, pertencente ao simplexo $(q - 1)$ dimensional, é um vetor coluna de componentes de mistura, \mathbf{z} é um vetor coluna que representa as variáveis de processo, η e f são funções de \mathbf{x} e \mathbf{z} respectivamente, e e é o erro aleatório. Suponha que $\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{b}'\mathbf{h}(\mathbf{x})$ e $f(\mathbf{z}) = \mathbf{a}'\mathbf{g}(\mathbf{z})$, onde \mathbf{b} e \mathbf{a} são vetores colunas de coeficientes constantes e \mathbf{h} e \mathbf{g} são vetores de funções de \mathbf{x} e \mathbf{z} respectivamente.

Sejam X e Z matrizes de planejamento associadas aos vetores coluna \mathbf{x} e \mathbf{z} respectivamente. Supondo que os erros sejam independentemente distribuídos com média 0 e mesma variância s^2 , a matriz de variâncias-covariâncias do estimador de mínimos quadrados de $(\mathbf{b}', \mathbf{a}')$ é s^2 vezes a inversa de

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z \end{bmatrix} \quad (2)$$

Observemos que quando $X'Z = 0$ a matriz da expressão (2) é diagonal e \mathbf{b} e \mathbf{a} podem ser estimados independentemente um do outro.

Um conjunto de blocos ortogonais de misturas para um sistema com três componentes foi proposto por John (1983, 1984), como mostrado no Quadro 1.

Quadro 1 - Blocos ortogonais de misturas para um sistema com três componentes

| | x_1 | x_2 | x_3 | | x_1 | x_2 | x_3 |
|----------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|
| Mistura1 | a | b | c | Mistura1 | a | c | b |
| Mistura2 | b | c | a | Mistura2 | b | a | c |
| Mistura3 | c | a | b | Mistura3 | c | b | a |
| Mistura4 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | Mistura4 | 1/3 | 1/3 | 1/3 |
| Bloco1 | | | | Bloco2 | | | |

Nestes blocos, a , b , e c são números entre 0 e 1 e cuja soma vale 1. Estas restrições implicam que a , b e c devam estar sobre ou dentro de um simplexo triangular. Os dois blocos de misturas foram construídos com base no delineamento quadrado latino (John, 1983, 1984). O delineamento em blocos apresentado atende às condições de ortogonalidade.

Para um sistema com $q = 3$ componentes de mistura, o modelo quadrático de Scheffé (1958) é dado por:

$$\eta(x) = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_{12}x_1x_2 + \beta_{13}x_1x_3 + \beta_{23}x_2x_3$$

e, neste caso, a matriz de planejamento associada ao modelo de mistura é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c & bc & ac & ab \\ b & c & a & ac & ab & bc \\ c & a & b & ab & bc & ac \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ a & c & b & bc & ab & ac \\ b & a & c & ac & bc & ab \\ c & b & a & ab & ac & bc \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para otimizar o delineamento, devemos achar os valores de a , b e c sujeitos às restrições $0 \leq a, b, c \leq 1$, e $a + b + c = 1$, (Cornell, 1990), que atendem as exigências ótimas:

| Critério | Exigência |
|----------|---|
| D-Ótimo | maximizar($\lambda_1 \dots \lambda_p$) |
| E-Ótimo | maximizar $\min(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ |
| A-Ótimo | minimizar($\sum_{i=1}^p \lambda_i^{-1}$) |

$\lambda_1 \dots \lambda_p$ são os autovalores de $X'X$

Os valores de a , b e c que D-, A e E- otimizam os delineamento em blocos ortogonais de John (1983, 1984) são discutidos detalhadamente em Czitrom (1988) e Chan e Sandhu (1999). As proporções ótimas associadas aos três critérios ótimos são dadas por:

| | <i>D – ótimo</i> | <i>A – ótimo</i> | <i>E – ótimo</i> |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| <i>c</i> | 0 | 0 | 0 |
| <i>b</i> | 0,832 | 0,816 | 0,845 |
| <i>a</i> | 0,168 | 0,183 | 0,154 |

(4)

Prescott (1998) propôs uma reparametrização do sistema de coordenadas que, além de simplificar as expressões associadas aos critérios ótimos, introduz pequenas modificações nas proporções ótimas com o objetivo de contornar os problemas causados pela falta de ingredientes ou pelas restrições adicionais, tal como, a de que todos os ingredientes devam participar da mistura. A reparametrização é dada por

$$a = (1 - s)(1 - f) + \frac{s}{3}, \quad b = (1 - s)f + \frac{s}{3}, \quad c = \frac{s}{3}. \quad (5)$$

Desta forma, os critérios ótimos com as respectivas proporções ótimas em termos de s e f são dados por

| | <i>D – ótimo</i> | <i>A – ótimo</i> | <i>E – ótimo</i> |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| <i>s</i> | 0 | 0 | 0 |
| <i>f</i> | 0,832 | 0,816 | 0,845 |

Neste trabalho, a partir da medida de Prescott (1998), determinamos a perda da situação ideal devidas a alterações nas proporções ótimas levando em conta os critérios A-, D- e E-ótimos. Neste sentido, são construídas duas medidas de eficiência, uma

para os critério D- e E- ótimos por se tratarem de critérios de maximização e outra específica para o critério A-ótimo por se tratar de um critério de minimização.

A medida específica para os critérios D- e E- ótimos é dada por

$$ME = 100 * \left(\frac{M_{D-E}}{P_{D-E}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

sendo: M_{D-E} a avaliação da expressão associada ao critério D- ou E-ótimo nas proporções ótimas em termos de s e f modificadas e P_{D-E} representa a avaliação da expressão associada ao critério D- ou E - ótimo nas proporções ótimas em termos de s e f não modificadas.

Para o critério A-ótimo, a medida de eficiência associada é dada por

$$ME = 100 * \left(\frac{P_A}{M_A} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

sendo: M_A a avaliação da expressão associada ao critério A- ótimo nas proporções ótimas em termos de s e f modificadas e P_A representa a avaliação da expressão associada ao critério A- ótimo nas proporções ótimas em termos de s e f não modificadas

4 Comparação Entre os Delineamentos Ótimos

Nesta seção faremos a comparação entre os critérios D-, A- e E-ótimos a partir das medidas de eficiências definidas em (6) e em (7). Todos os cálculos foram realizados via software MAPLE V. (GARVAN, 2001) No passo referente ao cálculo da expressão associada ao critério E-ótimo, considerou-se o resultado em Chan e Sandhu (1996).

A Tabela 1 mostra uma série de modificações de forma padronizada na nova variável s em (5) de forma que as propoções ótimas sejam modificadas e que o afastamento da "situação ótima" para os três critérios possa ser medido. A medida que modificações nas proporções ótimas em termos de s e f vão sendo feitas, mudanças nas proporções ótimas em termos de a , b e c também ocorrerão.

Tabela 1 - Afastamento das “condições ótimas”
medido para os três critérios

| s | $D - \acute{o}timo$ | $A - \acute{o}timo$ | $E - \acute{o}timo$ |
|------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0.01 | 97.2230 | 99.2483 | 98.1599 |
| 0.02 | 94.2249 | 98.3705 | 96.3427 |
| 0.03 | 91.0475 | 97.3832 | 94.5493 |
| 0.04 | 87.7278 | 96.3016 | 92.7805 |
| 0.05 | 84.22991 | 95.1396 | 91.0373 |
| 0.10 | 66.4495 | 88.5104 | 82.735 |
| 0.15 | 49.1334 | 81.2048 | 75.2111 |
| 0.20 | 33.6853 | 73.5021 | 68.5967 |
| 0.25 | 20.494 | 63.925 | 63.024 |
| 0.30 | 9.04739 | 41.8136 | 58.5895 |
| 0.35 | 5.0549 | 49.8356 | 55.3009 |
| 0.40 | 9.9556 | 57.5984 | 2.36682 |
| 0.45 | 11.488 | 58.572 | 5.33851 |
| 0.50 | 11.3218 | 57.9649 | 6.40649 |
| 0.55 | 10.0941 | 56.3966 | 5.44338 |
| 0.60 | 8.2241 | 53.6354 | 3.56286 |
| 0.65 | 6.0673 | 49.2089 | 1.82296 |
| 0.70 | 3.9411 | 42.57 | 0.70285 |
| 0.75 | 2.1069 | 33.1185 | 0.17944 |
| 0.80 | 0.7307 | 18.4899 | 0.01967 |

(8)

É possível verificar a partir da Tabela 1 e da Figura 1 que para incrementos sucessivos na variável s , o que significa alterar as proporções ótimas em (4), os três critérios sofrem perdas das situações ótimas. Observe, pela Tabela 1, que na linha referente a $s = 0,05$, o critério D-ótimo teve uma perda em torno de 15,8% da situação ótima, o A-ótimo teve uma perda em torno de 4,9% e o E-ótimo em torno de 9% da situação ótima. Na linha referente ao acréscimo em $s = 0,30$, o critério D-ótimo teve uma perda em torno de 91% da situação ótima, o A-ótimo teve um perda em torno de 59,3% e o E-ótimo em torno de 42,5% da situação ótima.

A grande diferença de perda associada ao critério E-ótimo na passagem de $s = 0,35$ para $s = 0,40$ é devido a mudança do autovalor envolvido no cálculo do critério. Nesta passagem o critério A-ótimo teve um ganho de aproximadamente 8,0% e o critério D-ótimo de 5,0%. Note que a partir de $s = 0,40$, o critério A-ótimo mostra-se ser mais robusto do que os demais com relação

a perdas da situação ótima.

As proporções ótimas em (4) referentes aos três critérios ótimos pouco se diferenciam. São valores onde $c = 0$, $b = 1 - a$ e a assumindo valores no intervalo de $0,17 \pm 0,02$. Ou seja, existe uma grande similaridade entre as proporções ótimas para os três critérios ótimos.

Uma situação comum na prática é quando o produto a ser estudado no experimento depende fortemente da presença de todos os ingredientes na mistura. Diante desta questão, é interessante ao experimentador escolher o critério que menos perde em relação a situação ótima a partir de modificações nas proporções ótimas. Em (8) é possível verificar que o critério A-ótimo é o que menos se afasta da situação ótima a partir de alterações nas proporções ótimas.

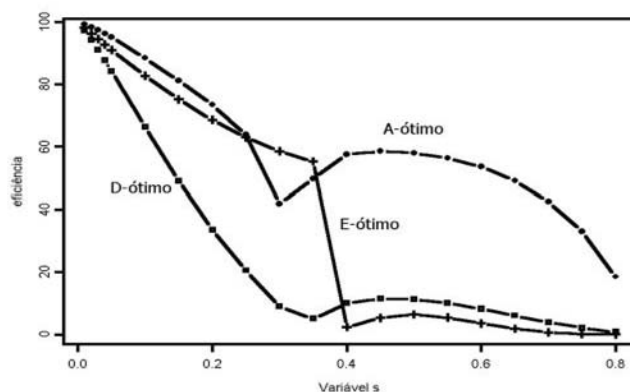


Figura - 1: Desempenho dos critérios com relação a variação de s

5 Conclusões

Na comparação entre os três critérios ótimos na Tabela 1, os critérios A- e E- ótimos mostraram-se ser mais resistentes nas situações onde são feitas pequenas modificações nas proporções ótimas para contornar os problemas causados pela falta de

ingredientes ou pelas restrições adicionais, enquanto que o critério D-ótimo mostrou-se ser o mais sensível.

GOMES, P. L. S.; DINIZ, C. A. R. Efficiency of nearly optimal design in experiments with mixture. *Rev. Mat. Estat.* (São Paulo), v. 20, p.195-206, 2002.

- **ABSTRACT:** *In this work it is considered optimal designs for second-order models in experiment with three blending component proportions in orthogonal blocking. The optimal designs have been used extensively in mixture experiments, mainly when it is necessary to consider some external conditions to the experiments such presence of process variables. However, optimal designs have a drawback in the sense that they do not accommodate additional constraints. A reparametrization proposed by Prescott (1998) simplify the expressions associated to some optimal design criteria so that the runs used in the experiments could include a minimum proportion of each mixture ingredient. In this article, using a modified Prescott measure of efficiency, the criteria D-, A- and E-optimal are evaluated and compared with respect to the performance in blends consisting of all the available ingredients.*

- **KEYWORDS:** *Experiments with mixture; nearly optimal design.*

Referências

- CHAN, L-Y. Optimal Design for Experiments with Mixtures: A Survey. *Commun. Stat. - Theory Methods*, v.29, n.9/10, p.2281-2312, 2000.
- CHAN, L-Y. SANDHU, M.K. Optimal orthogonal block designs for a quadratic mixture model for three components. *J. Appl. Stat.*, v.26, n.1, p.19-34, 1996.
- CORNELL, J.A. *Experiments with mixtures: designs, models, and the analysis of mixture data*. 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 1990, 656p.
- CZITROM, V. Mixture experiments with process variables: D-optimal orthogonal experimental designs. *Commun. Stat. - Theory Methods*, v.17, p.105-242, 1988.

CZITROM, V. Experimental design four mixture components with process variable. *Commun. Stat. - Theory Methods*, v.18, n.12, p.4561-4581, 1989.

CZITROM, V. Note on a mixture experiment with process variables. *Commun. Stat. Simulat. Comput.*, v.21, p.493-498, 1992.

DRAPER, N.R.; St. JOHN, R. C. Designs in three and four components for mixture models with inverse terms. *Technometrics*, v.19, p.117-130, 1977.

JOHN, P.W.M. Experimental designs for quadratic blending with process variables. In: SESSION OF THE INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE, 44., 1983, Madrid. *Proceedings...*, v.1, p.143-146.

JOHN, P.W.M. *Experiments with mixtures involving process variables*. Austin: Centre for Statistical Sciences, The University of Texas, 1984. (Technical Report, 8), 17p.

GARVAN, F. *The maple book*. London: Chapman and Hall/CRC, 2001, 496p.

GHOSH, S.; LIU, T. Optimal mixture designs for four components in two orthogonal blocks. *J. Stat. Planning Inference*, v.78, p.219-228, 1999.

GORMAN, J.W., CORNELL, J.A., A note on model reduction for experiments with both mixture components and process variables. *Technometrics* 24, 243-247, 1982.

PRESCOTT, P. Nearly optimal orthogonally blocked designs for a quadratic mixture model with q components. *Commun. Stat.-Theory Methods*, v.27, n.10, p.2559-2580, 1998.

PRESCOTT, P. Projection designs four mixture experiments in orthogonal blocks. *Commun. Stat. - Theory Methods*, v.29, n.9/10, p.2229-2253, 2000.

SCHEFFE, H. Experiments with mixture. *J. R. Stat. Soc.*, B, v.20, p.344-366, 1958.

Apêndice

O determinante de $X'X$ em função de s e f , determinado via MAPLE V, denotado por $Do1$, é dado por $D01 := \frac{4}{3}(-1 + s)^{16} f^4 (-1 + f)^4 (-1 + 2f)^4 (1 - 3f + 3f^2)^2$.

O traço da inversa $X'X$ em função de s e f , determinado via MAPLE V, denotado por A01, é dado por

$$A01 := \frac{1}{54}(72 - 648f - 96s^2f + 3663f^2 - 312sf^2 + 58320sf^9 - 87480s^2f^9 + 189702s^2f^8 - 14580s^4f^9 - 127332s^3f^8 + 24sf + 8s^2 + 852s^2f^2 - 124740sf^8 - 233928s^2f^7 + 64152s^3f^5 + 50220sf^5 - 16038s^4f^5 + 30537f^8 - 11664f^{10}s - 14580f^9 + 2916f^{10} + 149040f^7s - 11664s^3f^{10} + 17496f^{10}s^2 + 2916s^4f^{10} + 29268s^2f^4 + 3888s^3f^3 - 324s^3f^2 + 5184s^4f^4 - 972s^4f^3 + 81s^4f^2 - 20736s^3f^4 - 14544sf^4 - 6102s^2f^3 - 12402f^3 + 2628sf^3 - 90234s^2f^5 - 27540f^5 + 180522s^2f^6 + 29214f^6 - 125712s^3f^6 - 108972sf^6 + 31428s^4f^6 - 34668f^7 + 159408s^3f^7 + 58320s^3f^9 + 31833s^4f^8 - 39852s^4f^7 + 23508f^4)/(-1 + s)^4(1 - 3f + 3f^2)^2(-1 + 2f)^2(-1 + f)^2f^2.$$

A expressão associada ao critério E-ótimo em função de s e f (ver . Chan e Sandhu, 1999), denotado por E01, é dada por

$$E01 := -2s^4f^3 + \frac{4}{9}s^2 + \frac{4}{3}sf + f^2 - \frac{16}{3}sf^2 + \frac{1}{9}s^4 - \frac{10}{3}s^2f + 8sf^3 + \frac{28}{3}s^2f^2 - 2f^3 + \frac{5}{3}s^4f^2 + s^4f^4 + f^4 - 4sf^4 + 6s^2f^4 - 4s^3f^4 - \frac{4}{9}s^3 + 8s^3f^3 - \frac{20}{3}s^3f^2 + \frac{8}{3}s^3f - 12s^2f^3 - \frac{2}{3}s^4f + \frac{37}{27} - \frac{1}{27}sqrt(648f - 2772s^2f + 378f^2 - 4176sf^2 + 729s^8f^8 - 2916s^8f^7 + 20412s^2f^8 - 40824s^3f^8 + 72sf + 240s^2 + 10872s^2f^2 + 432s - 5832s^8f^5 - 5832s^8f^8 - 81648s^2f^7 + 268272s^3f^5 + 29160sf^5 - 364500s^4f^5 + 4131s^8f^4 + 729f^8 + 258s^4 + 23328f^7s + 66420s^2f^4 + 62640s^3f^3 - 17424s^3f^2 + 3600s^3f - 40824s^5f^8 - 3708s^4f + 232362s^4f^4 - 95364s^4f^3 + 24660s^4f^2 - 159624s^3f^4 - 456s^3 - 15768sf^4 - 28836s^2f^3 - 2052f^3 + 10152sf^3 + 15552s^7f^3 + 111780s^6f^4 - 33048s^7f^4 - 1944s^8f^3 + 15336s^6f^2 - 4752s^7f^2 - 108s^8f + 594s^8f^2 + 9s^8 + 216s^6 + 864s^7f + 46656s^7f^5 - 160380s^6f^5 - 288s^5 - 25488s^5f^2 + 309096s^5f^5 - 208008s^5f^4 + 91368s^5f^3 + 4104s^5f - 119556s^2f^5 - 2916f^5 + 135108s^2f^6 + 4374f^6 - 293544s^5f^6 - 279936s^3f^6 - 36936sf^6 + 359640s^4f^6 + 148716s^6f^6 - 51516s^6f^3 + 5346s^8f^6 - 42768s^7f^6 - 72s^7 - 2700s^6f - 2916f^7 + 163296s^3f^7 + 51030s^4f^8 - 204120s^4f^7 - 81648s^6f^7 + 163296s^5f^7 + 20412s^6f^8 + 1261 - 5832s^7f^8 + 23328s^7f^7 + 1755f^4)$$

Recebido em 25/07/2001.