UMA INTRODUÇÃO AOS TESTES ACELERADOS COM RELAÇÕES ESTRESSE-RESPOSTA LOG-NÃO-LINEARES

Gleici Castro PERDONÁ[1]
Francisco LOUZADA-NETO[2]

▪ RESUMO: Experimentos industriais eficientes para análise da confiabilidade de produtos manufaturados consistem da submissão das unidades sob teste a níveis de estresses maiores que os usualmente utilizados, resultando nos testes de sobrevivência acelerados. Para cada nível pré-fixado e aleatorizado de estresse, o experimento termina quando uma proporção das unidades sob teste falha. A vantagem desse tipo de experimentação está na redução do tempo e do custo de obtenção de dados referentes a confiabilidade. A modelagem de dados acelerados é dependente do tipo de distribuição considerada para o tempo de sobrevivência, que assumimos ser exponencial, e também da relação estresse-resposta, que estabelece de que forma a média da variável tempo de sobrevivência depende das condições experimentais (níveis de estresse). Neste trabalho consideramos uma relação estresse-resposta log-não-linear. Este modelo proporciona uma forma conveniente de análise uma vez que várias relações estresse-resposta comumente utilizadas em testes de sobrevivência acelerados podem ser obtidas como casos particulares. Procedimentos gráficos e de estimação pontual e intervalar e testes de hipóteses são discutidos. A metodologia é ilustrada através de um exemplo numérico.

[1]Departamento de Medicina Social, Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, CEP 14049-900, Ribeirão Preto, SP, E-mail: pgleici@fmrp.usp.br

[2]Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, CP 676, CEP: 13565-905, São Carlos, SP, E-mail: dfln@power.ufscar.br

▪ PALAVRAS-CHAVE: Técnicas de Bootstrap, Distribuição Exponencial, Procedimentos de Inferência, Relações Estresse-Resposta Log-Não-Lineares.

1 Introdução

Um desafio encontrado na fabricação de produtos manufaturados relaciona-se ao desenvolvimento de produtos com tecnologia mais avançada e em tempo recorde, enquanto que, paralelamente, devem ser mantidos esforços para a melhoria de produtividade e da confiabilidade do produto e, consequentemente, da qualidade de uma maneira geral.

Para a análise da confiabilidade do produto a fonte de dados, em situações normais, pode ser cara e demorada. Por exemplo, considerando-se as condições usuais de funcionamento, um aparelho eletroeletrônico que é utilizado em 110/220 volts poderia demorar muito tempo a falhar, encarecendo a experimentação. Uma alternativa eficiente é obter informações sobre a confiabilidade do produto de maneira mais rápida, através dos testes de sobrevivência acelerados (TSA) (Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974).

Esses testes consistem na indução da falha do equipamento através de um planejamento adequado. A idéia baseia-se na submissão de unidades do produto de interesse sob níveis de estresse mais altos ou mais baixos que os usuais. Vários esquemas de aceleração podem ser considerados. Entretanto, a utilização de níveis de estresses constantes é um dos procedimentos mais comuns na prática (Nelson, 1990). Em geral, o principal interesse na área de confiabilidade de produtos é fazer inferências sobre a taxa de falha em condições usuais, ou funções desta, baseado em dados sobre um tempo obtido em condições aceleradas.

Seja T a variável aleatória tempo de sobrevivência de uma unidade em teste. Considerando um TSA com esquema de censura de tipo II (Lawless, 1982) com k níveis aleatorizados de uma variável estresse X para cada nível de estresse X_i, $i = 1,...,k$, com n_i unidades em teste e r_i observações que falharam, temos os tempos observados ordenados e não censurados, $t_{i1} < t_{i2} <,...,< t_{ir_i}$, onde $n_i - r_i$ são observações censuradas iguais a t_{ir_i}. Em geral, o nível 1 é considerado o nível usual de funcionamento. Na Tabela 1 temos uma representação esquemática de um TSA.

Tabela 1 - Representação esquemática de um teste de sobrevivência acelerado (TSA)

i	X_i	n_i	r_i	Dados não censurados
1	X_1	n_1	r_1	$t_{11}, t_{12}, ..., t_{1r_1}$
2	X_2	n_2	r_2	$t_{21}, t_{22}, ..., t_{2r_2}$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
k	X_k	n_k	r_k	$t_{k1}, t_{2k}, ..., t_{kr_k}$

Experimentos acelerados que consideram mais que uma variável estresse não são raros na prática (Mann, Schaffer e Singpurwalla, 1974), porém não serão considerados neste trabalho.

O problema de analisar TSA, tem sido tema de pesquisa para vários autores. Uma extensa bibliografia de aplicações desses testes pode ser encontrada em Mann, Schaffer e Singpurwalla (1974), Meeker e Escobar (1998) e Nelson (1990).

Quando a distribuição dos tempos de sobrevivência dos componentes é exponencial e os dados são não censurados, Nelson (1972) descreve métodos gráficos para a estimação dos parâmetros da relação estresse resposta (RER) de potência.

Com dados sob esquema de censura tipo II (Lawless,1982; Mann, Schaffer e Singpurwalla,1974) determinam os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) para os parâmetros do modelo de Potência, Arrhenius e Eyring com uma variável de estresse.

Rodrigues e Louzada-Neto (1992) estudam o efeito da reparametrização ortogonal (Cox and Reid, 1987), na inferência sobre o tempo médio de sobrevivência de um componente para a distribuição exponencial, sob nível usual de estresse, para o modelo de potência. Achcar e Louzada-Neto (1992) apresentam um TSA com uma RER log-linear que generaliza os modelos de Eyring, Potência e Arrhenius. Barbosa, Colosimo e Louzada-Neto (1996) obtêm uma análise geral para testes acelerados, via modelos lineares generalizados, usando esquemas de censura tipo I e II (Lawless, 1982).

Vários autores tem abordado em suas pesquisa TSA considerando outras distribuições para os tempos de sobrevivência, entretanto neste estudo será considerada somente a distribuição exponencial.

Na Seção 2, descrevemos a modelagem de um TSA usual. Na Seção 3, motivamos a utilização de uma RER log-não-linear, o que possibilita a obtenção de um algoritmo único para a análise de TSA uma vez que a mesma contém vários dos modelos comumente utilizados na área como casos particulares. Uma metodologia gráfica de verificação de modelo é apresentada na Seção 4. Na Seção 5, apresentamos uma discussão sobre o procedimento de estimação de máxima verossimilhança. Procedimentos de estimação intervalar e testes de hipóteses são descritos nas Seções 6 e 7. Na Seção 8, são apresentados os procedimentos de estimação da taxa de falha. Na Seção 9, discutimos alguns problemas vinculados a estes procedimentos. Um exemplo na Seção 10 ilustra a metodologia. Alguns comentários finais são apresentados na Seção 11.

2 Formulação do Modelo

Os modelos que representam fenômenos relacionados ao tempo de sobrevivência de produtos manufaturados submetidos a TSA são construídos a partir de dois fatores, um aleatório e outro determinístico, onde o fator aleatório é representado pela distribuição de probabilidade do tempo de sobrevivência do produto, e o fator determinístico representado pelo relacionamento entre os parâmetros desta distribuição e as variáveis de estresse, que são comumente chamadas RER. Neste estudo, utilizamos um dos modelos probabilísticos mais utilizados na prática, para representar o fator aleatório — a distribuição exponencial — com função densidade de probabilidade (fdp) dada por (Lawless, 1982),

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp\{-\lambda_i t\}, \tag{1}$$

onde $\lambda_i > 0$ representa a taxa constante de falha no i-ésimo nível de estresse X_i, $i = 1, ..k$.

A distribuição exponencial é adequada para situações práticas onde a falha do produto pode ser assumida como ocorrendo aleatoriamente no tempo independentemente da idade do produto; esta propriedade importante é conhecida como falta de memória do modelo. A distribuição de um tempo de sobrevivência adicional não é afetada pela informação de que o equipamento sobreviveu anteriormente a algum tempo (Collett, 1994).

O componente determinístico da formulação do modelo para TSA é representado pela RER, isto é, uma função que estabelece o relacionamento entre o parâmetro da função de distribuição do tempo de sobrevivência e as variáveis de estresse, desta forma temos,

$$\lambda = g(\beta'\mathbf{X}), \tag{2}$$

onde $g(\cdot)$ é uma função contínua, β é o vetor de coeficientes a serem estimados e $\mathbf{X}$ é um vetor de variáveis de estresse.

Uma RER muito utilizada na prática é obtida de (2) quando somente uma variável estresse é considerada. Assim, assumindo $g(\cdot) = \exp(\cdot)$ reescrevemos (2) como (Nelson, 1990; Achcar e Louzada-Neto, 1991),

$$\lambda_i = \exp\{-(\beta_0 + \beta_1 X_i)\}, \tag{3}$$

onde β_0 e β_1 são coeficientes a serem estimados, tal que -$\infty <$ $\beta_0, \beta_1 < \infty$, para $i = 1, 2, ..., k$.

É importante lembrar que temos o interesse em explorar algum nível baixo de estresse, onde o teste em geral é inviável. Particularmente em confiabilidade, dados acelerados são utilizados para inferência sobre o tempo médio de sobrevivência do componente nas condições normais de funcionamento, representado por $1/\lambda_1$ para o modelo exponencial.

Vários modelos físicos usualmente utilizados para testes acelerados podem ser obtidos como casos particulares da RER (3). Entre eles podemos citar o modelo de Arrhenius, que é obtido quando $X_i = 1/T_i$, β_0=$-\alpha_2$ e $\beta_1 = \alpha_2$, onde T_i representa a variável temperatura. Neste caso, podemos reescrever (3) como (Mann, Schaffer e Sigpurwalla,1974),

$$\lambda_i = \exp\{\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{T_i}\},\ i = 1, 2, ..., k. \tag{4}$$

Outro modelo que pode ser derivado de (3) é o modelo de Potência (Nelson, 1990). Assumindo $X_i = -log(V_i)$, onde V_i representa a variável voltagem. $\beta_0 = log(\alpha_1)$ e $\beta_1 = \alpha_2$, temos,

$$\lambda_i = \frac{V_i^{\alpha_2}}{\alpha_1},\ i = 1, 2, ..., k. \tag{5}$$

Apesar da importância da RER (3) e sua grande utilização na prática, ela impõe log-linearidade entre a taxa de falha e a variável estresse. Enquanto esse relacionamento pode ser verificado em muitas situações reais, também podemos encontrar situações onde relações log-não-lineares são mais adequadas. Este problema, em geral, ocorre quando, por exemplo, desejamos testar a exposição de um componente a materiais altamente corrosivos ou explosivos, onde o risco de falha pode ser muito sensível a um pequeno aumento ou decréscimo no nível da variável estresse (Nelson,1990).

3 A RER log-não-linear

Para acomodarmos uma possível log-não-linearidade na RER propomos a RER log-não-linear, dada por,

$$\lambda_i = \exp\{-(\beta_0 + \beta_1 X_i^{\beta_2})\}, \tag{6}$$

onde $i = 1, 2, ..., k$ e β_0, β_1 e β_2 são parâmetros desconhecidos tal que $-\infty < \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2 < \infty$.

O parâmetro β_2 representa o termo de log-não-linearidade. Quando $\beta_2 = 1$ temos a RER (3) e, consequentemente, os modelos (4) e (5).

FIGURA 1 - Efeito do termo de log-não-linearidade, β_0=-2, β_1=-1, para β_2=1:(-), β_2=2:(–) e β_2=3:($\cdots$).

A vantagem da RER (6) em relação aos modelos anteriores é permitir uma variabilidade extra no ajuste. Do ponto de vista prático, ela permite um aumento ou decréscimo mais intenso do risco para valores extremos da covariável. Além disso, o modelo (6) permite o teste da adequabilidade dos seus casos particulares e a verificação da influência de β_2 na estimação dos outros parâmetros do modelo. A Figura 1 mostra um exemplo (aumento do risco) para ilustrar o efeito do termo de log-não-linearidade, quando $\beta_0 = -2$, e $\beta_1 = -1$ e $\beta_2 = 1$ (modelo log-linear (3)), e $\beta_2 = 2$ e 3 (modelo log-não-linear(6)).

Chamamos o modelo exponencial (1) com a RER (6) de modelo exponencial log-não-linear.

4 Verificação Gráfica do modelo

Para a verificação do ajuste de uma distribuição, métodos gráficos podem ser baseados na construção de gráficos de

$$g[\widehat{H}(t)] \, versus \; g\,(t)\,, \tag{7}$$

onde $\widehat{H}\,(t) = \int_0^t h\,(a)\,da = -log(\widehat{S}(t))$ é conhecida como função de risco acumulada estimada, onde $h\,(.)$ é a função de risco, $\widehat{S}(t)$ é a função de confiabilidade estimada (Lawless, 1982) e $g\,(.)$ é uma função tal que, $\lim_{t\to 0} g(\widehat{H}(.)) = -\infty$, $\lim_{t\to\infty} g\left(\widehat{H}\,(.)\right) = \infty$ e $g\,(.)$ é monotonicamente crescente, no nosso caso, $g\,(.) = \log\,(.)\,.$ Se um gráfico de $g\left(\widehat{H}\,(t)\right) = \log \widehat{H}(t)$ *versus* $g\,(t) = \log\,(t)$ for aproximadamente linear o modelo exponencial pode ser adequado para o ajuste, caso contrário um modelo mais sofisticado deve ser utilizado.

Para verificarmos o tipo de RER que relaciona a taxa de falha, λ, e a variável estresse, X, sob o i-ésimo nível de estresse, aplicamos o logarítimo na expressão (6) obtendo $log(\hat{\lambda}_i) = -\beta_0 - \beta_1 X_i^{\beta_2}$ e construirmos o gráfico

$$log(\hat{\lambda}_i) \, versus \; X_i, \tag{8}$$

onde $\hat{\lambda}_i$ são os EMVs da taxa de falha para cada nível de estresse com $i = 1, 2, ..., k$. Se a relação for aproximadamente linear a RER log-linear pode ser adequada ao ajuste, caso contrário, a RER log-não-linear será mais apropriada.

A Figura 2 apresenta os gráficos construídos a partir de (7) com $g\,(.) = \log\,(.)$ para dois conjuntos de dados gerados com três níveis de estresse, $\mathbf{X} = (1, 1/2, 1/3)$, 30 ítens em cada nível e sem a presença de censura. Assumimos uma distribuição exponencial

(1) com a RER proposta (6), com valores dos parâmetros fixados em $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 9$ e β_2 igual a 1 e 3. O resultado do ajuste são retas indicando o modelo exponencial, tanto para β_2 igual a 1 quanto para β_2 igual a 3.

FIGURA 2 - Ajuste do modelo exponencial log-não-linear para duas amostras com $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = 1$ e $\beta_2 = 3$, respectivamente.

A Figura 3 apresenta os gráficos construídos a partir de (8) também para os dois exemplos gerados. No painel esquerdo, os pontos estão alinhados indicando uma RER log-linear, enquanto no painel direito, os pontos não estão alinhados, indicando uma possível RER log-não-linear.

FIGURA 3 - Ajuste da RER proposta para os valores $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 9$ e $\beta_2 = 1$ (esquerda) e $\beta_2 = 3$ (direita).

5 Procedimento de Estimação

Como procedimento básico de estimação consideramos o método de máxima verossimilhança. A contribuição individual de cada unidade em testes que falha na composição final da função de verossimilhança é dada pela densidade (1), enquanto cada unidade censurada contribui com a sua função de confiabilidade (Lawless,1982), que no i-ésimo nível de estresse, é dada por,

$$S(t_{ir_i}, \lambda_i) = P(T \geq t_{ir_i}) = \int_{t_{ir_i}}^{\infty} \lambda_i \exp\{-\lambda_i t\} dt = \exp\{-\lambda_i t_{ir_i}\}. \quad (9)$$

Dessa forma, a função de verossimilhança para λ_i, sob o i-ésimo nível de estresse X_i, é dada por (Lawless, 1982),

$$L(\lambda_i) = \prod_{j=1}^{r_i} f(t_{ij}, \lambda_i) S^{n_i - r_i}(t_{ir_i}, \lambda_i) = \lambda_i^{r_i} \exp\{-\lambda_i A_i\}, \quad (10)$$

onde $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i}$, representa o tempo total em teste para o i-ésimo nível, com $i = 1, ...k$.

Considerando os dados de k níveis aleatorizados de estresse, a função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k)$ é dada de (10) por,

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} \{\lambda_i^{r_i} \exp(-\lambda_i A_i)\}. \quad (11)$$

Assim, considerando como RER o modelo log-não-linear (6), de (11), obtemos a verossimilhança para o modelo exponencial log-não-linear, dada por,

$$L(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \prod_{i=1}^{k} \{e^{(-\beta_0 - \beta_1 X_i^{\beta_2})}\}^{r_i} e^{(-\exp(-\beta_0 - \beta_1 X_i^{\beta_2}) A_i)}. \quad (12)$$

Denotando o vetor de parâmetros por $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, com a correspondente função de verossimilhança $L(\beta)$ e $l(\beta) = log(L(\beta))$, o EMV de β, $\hat{\beta}$, pode ser obtido via maximização direta de (12) ou através da obtenção das soluções do sistema de equações não-lineares, formado pelas derivadas de $l(\beta)$ com respeito a cada parâmetro β_l, onde $l = 0, 1, 2$. Obter a função escore é conceitualmente simples e as expressões analíticas são dadas por,

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{k} -r_i + A_i \exp(-\beta_0 - \beta_1 x_i^{\beta_2}), \tag{13}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{k} -r_i x_i^{\beta_2} + \sum_{i=1}^{k} x_i^{\beta_2} A_i \exp(-\beta_0 - \beta_1 x_i^{\beta_2}) \text{ e} \tag{14}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{k} -r_i \beta_1 x_i^{\beta_2} \ln(x_i) + \beta_1 \sum_{i=1}^{k} x_i^{\beta_2} \ln(x_i) A_i \exp(-\beta_0 - \beta_1 x_i^{\beta_2}). \tag{15}$$

As expressões (13), (14) e (15) devem ser igualadas a zero para obtermos os EMVs.

6 Intervalos de Confiança

A estimação pode ser pontual ou por intervalos. Nesta seção descrevemos três tipos de intervalos de confiança, o assintótico, via bootstrap e o perfilado.

6.1 Intervalo Assintótico

Para fazermos inferências sobre β podemos utilizar a aproximação assintótica dos EMVs (Cox e Hinkley, 1974),

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \overset{a}{\backsim} N(\beta, I^{-1}(\hat{\beta})), \tag{16}$$

onde $I(\hat{\beta})$ é a matriz de informação de Fisher, com elementos definidos por,

$$I_{pq}(\beta) = -E\left(\frac{\partial l}{\partial \beta_{p-1}} \frac{\partial l}{\partial \beta_{q-1}}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_{p-1} \partial \beta_{q-1}}\right), \tag{17}$$

onde $p, q = 1, 2, 3$.

A aproximação (16) é válida assintoticamente e deve portanto ser utilizada quando o tamanho da amostra é grande. Se o tamanho for pequeno ou moderado, a aproximação pode não ser válida, por isso é sensato tomarmos precauções na hora de aplicá-la, verificando se a distribuição dos EMVs realmente se aproxima a uma normal. Um bom indicador para podermos considerar (16) como uma boa aproximação, é verificar se os elementos da matriz de informação de Fisher para esses parâmetros são constantes (Achcar e Louzada-Neto, 1991 e Sprott,1973).

Como $E(A_i) = r_i/\lambda_i$, com λ_i dado em (6), obtemos de (17), a matriz de informação de Fisher para os parâmetros β_0, β_1, β_2, dada por,

$$I = \begin{bmatrix} u_i(x_i;0,0) & u_i(x_i;1,0) & \beta_1 u_i(x_i;1,1) \\ u_i(x_i;1,0) & u_i(x_i;2,0) & \beta_1 u_i(x_i;2,1) \\ \beta_1 u_i(x_i;1,1) & \beta_1 u_i(x_i;2,1) & \beta_1^2 u_i(x_i;2,2) \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

onde $u_i(x_i;a,b) = \sum_{i=1}^{k} r_i x_i^{a\beta_2} \ln^b(x_i)$, para $a = 0,1,2$ e $b = 0,1,2$.

Observe que os elementos de (18) não são constantes, indicando que a aproximação assintótica à normal pode não ser boa. Neste caso podemos considerar intervalos de confiança perfilados e/ou inferências via simulação, tais como intervalos de confiança bootstrap que baseiam-se em evidências empíricas. Ambas técnicas serão descritas a seguir.

6.2 Intervalo Via Bootstrap

O método boostrap (Efron, 1979 e 1993) consiste em uma técnica de reamostragem para aproximação da distribuição teórica de uma variável aleatória por sua distribuição empírica. O método pode ser paramétrico ou não paramétrico.

Este procedimento de amostragem foi originalmente utilizado por Efron (1979) para obter a taxa de precisão da estatística estimada quando a distribuição exata não é conhecida ou de difícil obtenção. Recentemente as técnicas de boostrap têm sido utilizadas com diversos propósitos, como construção de intervalos de confiança, testes de hipóteses, predição e seleção de modelos. Este procedimento também permite a verificação empírica da validade da teoria padrão, além de se apresentar como método alternativo de inferência de fácil implementação (Davison e Hinkley, 1997).

Neste artigo, consideramos a técnica bootstrap paramétrico, que visa à obtenção de estimativas intervalares empíricas através da geração de conjuntos de dados (aqui referidos como reamostras) do modelo exponencial log-não-linear com os parâmetros substituídos por seus EMVs baseados nos dados originais (Davison e Hinkley, 1997).

Primeiramente, considerando o conjunto de dados originais, calculamos os EMVs dos parâmetros de interesse, assumindo o modelo exponencial log-não-linear especificado por (1) e (6). Então geramos reamostras deste modelo com os parâmetros substituídos por seus EMVs (baseados nos dados originais).

Supondo que estamos interessados em inferências sobre β_2. Para cada reamostra calculamos o EMV para β_2. Ao final de B reamostragens (aqui assumimos $B = 999$) obtemos um vetor $(\hat{\beta}^*_{2_1} < ... < \hat{\beta}^*_{2_B})$ de valores dos EMV ordenados. Utilizamos então $\hat{\beta}^*_{2_{(B+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$ e $\hat{\beta}^*_{2_{(B+1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$ como os limites inferior e superior do intervalo de confiança percentil bootstrap $100\,(1-\alpha)\,\%$ para β_2. Para os outros parâmetros do modelo o mesmo procedimento pode ser aplicado. Maiores detalhes sobre a técnica bootstrap paramétrico podem ser encontrados em Davison e Hinkley (1997).

6.3 Intervalos de Confiança Perfilado

Na inferência para os parâmetros podemos considerar a função de verossimilhança perfilada, que é invariante sob reparametrização e segura para ser utilizada quando a amostra é pequena ou moderada (Kalbfleish, 1985).

Suponha que temos interesse na inferência do parâmetro β_0. A função de verossimilhança perfilada para β_0, é dada por,

$$l_{per}\,(\beta_0) = \max_{\beta_0} \left\{ l(\beta_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \right\}. \tag{19}$$

De acordo com a teoria assintótica usual, a estatística da razão de verossimilhança (ERV) dada por,

$$w\,(\beta_0) = 2\left[l_{per}\left(\hat{\beta}_0\right) - l_{per}\,(\beta_0) \right], \tag{20}$$

onde $\hat{\beta}_0$ é o EMV, tem uma distribuição χ^2_1 (Davison e Hinkley, 1997). Desta forma, um intervalo plausível $(1-\alpha)100\%$ para β_0 é dado pelo conjunto tal que,

$$l_{per}\,(\beta_0) \geqslant l_{per}\left(\hat{\beta}_0\right) - \frac{1}{2}\chi^2_{1,1-\alpha}, \tag{21}$$

onde $\chi^2_{1,1-\alpha}$ é o quantil $(1-\alpha)$ da distribuição χ^2_1.

7 Testes de Hipóteses

Nesta Seção apresentamos testes formais para os parâmetros de interesse considerando (6). Utilizamos para testar as hipóteses $H_0 : \beta_2 = 1$ e $H_0 : \beta_1 = 0$, a estatística da razão de verossimilhança (ERV) e a estatística escore modificada $(ESCM)$.

7.1 Estatística da Razão de Verossimilhança (ERV)

Considere uma situação onde existe o interesse em se verificar a necessidade de um modelo mais complexo do que uma RER log-linear. Dessa forma podemos testar, por exemplo, o modelo exponencial log-linear contra o modelo exponencial log-não-linear (6).

As hipóteses para o teste podem ser formuladas como,

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ modelo exponencial log-linear} \\ H_1 &: \text{ modelo exponencial log-não-linear.} \end{aligned} \tag{22}$$

Este procedimento é equivalente a testarmos $\beta_2 = 1$ contra $\beta_2 \neq 1$.

Para testarmos (22) podemos utilizar a estatística da razão de verossimilhança (*ERV)* dada por,

$$w = 2\left(l_{\log\text{-}linear} - l_{\log\text{-}não\text{-}linear}\right), \tag{23}$$

valores grandes de w indicam rejeição da hipótese nula, isto é, o modelo log-não-linear é mais adequado para ajustar os dados.

O mesmo procedimento descrito acima pode ser empregado para testar outras hipóteses, tais como, $\beta_1 = 0$, o que corresponde ao teste do efeito log-linear da variável estresse.

Note que de qualquer forma o teste de $\beta_1 = 0$ é não regular, e que o parâmetro perturbador β_2 estará presente somente sobre a hipótese alternativa (Davis, 1977), o que faz com que as condições de regularidade não sejam satisfeitas impedindo a utilização da teoria assintótica que considera uma distribuição χ^2 para a estatística (23).

Uma alternativa para testar esta hipótese é, então, obter a distribuição empírica de w, através de simulação bootstrap (Davison e Hinkley, 1997). Através deste procedimento geramos amostras (aqui chamadas reamostras) do modelo sob a hipótese nula utilizando os parâmetros substituídos por seus EMVs, registrando $w_1^* < w_2^* < ... < w_B^*$, e utilizando $w^*_{(B+1)(1-\alpha)}$

como valor crítico para o teste de tamanho α sob a hipótese nula. Para calcular o poder do teste o mesmo procedimento é utilizado, entretanto, gerando reamostras do modelo sob a hipótese alternativa.

7.2 Estatística Escore Modificada

Uma outra possibilidade para testarmos os parâmetros do modelo consiste na utilização da estatística escore modificada ($ESCM$).

Como na seção anterior, considere a situação onde existe interesse em verificar a necessidade de um modelo mais complexo do que uma RER log-linear, isto é, o teste de $\beta_2 = 1$ contra $\beta_2 \neq 1$. Por facilidade, denotamos por $\varphi = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ o vetor de parâmetros e por $\varphi_0 = (\beta_0, \beta_1)$ o vetor de parâmetros sob a hipótese nula.

A $ESCM$ sugerida por (Franco, Koopman e Souza,1999) baseia-se na primeira derivada do logarítmo da função de verossimilhança com respeito ao vetor de parâmetro φ. O vetor escore avaliado em $\hat{\varphi}$, EMV de φ, é zero, definindo a $ESCM$ como,

$$sw = \frac{\partial l(\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\hat{\varphi}} = 0. \tag{24}$$

onde o $l(.)$ é o logarítmo da função de verossimilhança.

Assim, quando a hipótese H_0 é verdadeira temos,

$$sw_0 = \frac{\partial l(\varphi_0)}{\partial \varphi_0} = 0, \tag{25}$$

e quando H_0 não é verdadeira, o valor de sw_0 tende a ser grande em módulo.

O mesmo procedimento descrito acima pode ser empregado para testar outras hipóteses, tais como, $\beta_1 = 0$. Da mesma forma que para a ERV, o teste de $\beta_1 = 0$ via $ESCM$ é irregular. Assim, utilizamos o mesmo procedimento de reamostragem definido na seção anterior para obter a distribuição empírica da estatística sw_0.

A vantagem da utilização da $ESCM$ em relação a utilização da ERV, consiste no fato de que a primeira necessita somente de H_0 para ser calculada enquanto que para calcular a ERV precisamos estimar os parâmetros sob H_0 e H_1, fato este que colabora para a redução do tempo computacional envolvido na análise.

8 Procedimentos de Estimação para λ_i's

Como em geral o interesse na realização de um TSA está centrado em inferências sobre λ_i, $i = 1, ..., k$, enfocamos nesta seção procedimentos de estimação para estes parâmetros.

Usualmente para inferências sobre λ_i podemos considerar o método delta (Miller,1981). Neste caso, de (6), o EMV para λ_i é dado por,

$$\widehat{\lambda}_i = \exp\{-(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i^{\widehat{\beta}_2})\}, \tag{26}$$

onde $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$ são os EMVs obtidos através da maximização de (12). Consideramos $\lambda_i = g(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ e utilizando o método delta , temos,

$$\widehat{\lambda}_i \overset{a}{\backsim} N(\lambda_i, \widehat{\sigma}^2_{\lambda_i}), \tag{27}$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\lambda_i} = \sigma^2_{\beta_0} \partial g \partial \beta_0{}^2 + \sigma^2_{\beta_1} \partial g \partial \beta_1{}^2 + \sigma^2_{\beta_2} \partial g \partial \beta_2{}^2 + \\ +2\sigma^2_{\beta_0\beta_1} \partial g \partial \beta_0 \partial g \partial \beta_1 + 2\sigma^2_{\beta_0\beta_2} \partial g \partial \beta_0 \partial g \partial \beta_2 + \\ +2\sigma^2_{\beta_1\beta_2} \partial g \partial \beta_1 \partial g \partial \beta_2. \end{aligned} \tag{28}$$

Os resultados (27) e (28) são válidos assintoticamente e devemos verificar se esta aproximação é precisa utilizando a matriz de informação de Fisher. Antes de utilizarmos a aproximação normal assintótica para inferências sobre λ_1, devemos estudar com mais detalhes sua precisão, o que é apresentado na próxima seção. Caso não exista precisão, procedimentos de estimação intervalares baseados no procedimento de simulação podem ser considerados.

Na prática, o interesse industrial está centrado em inferências sobre o tempo médio de sobrevivência, $1/\lambda_1$, sob o nível usual de funcionamento, X_1. Assim, consideramos somente inferências sobre o parâmetro λ_1. Entretanto este estudo é válido para qualquer outro nível desejado.

9 O Problema da Inferência sobre λ_1

Para este estudo reescrevemos a função de verossimilhança (12), obtida de (1) e (6), para os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, em termos dos parâmetros λ_1, β_1 e β_2. Obtemos de (6),

$$\beta_0 = -ln(\lambda_1) - \beta_1 x_1^{\beta_2}, \tag{29}$$

e substituindo (29) em (6) temos a RER parametrizada que é dada por,

$$\lambda_i = exp(ln(\lambda_1) + \beta_1 x_1^{\beta_2} - \beta_1 x_i^{\beta_2}), \ i = 2, ..., k. \qquad (30)$$

Da mesma forma que nas Seções 3 e 4, de (30) e (11), obtemos função de verossimilhança, agora para λ_1, β_1 e β_2, dada por,

$$L(\lambda_1, \beta_1, \beta_2) = \prod_{i=1}^{k} \{(e^{(ln(\lambda_1) + \beta_1 x_1^{\beta_2} - \beta_1 x_i^{\beta_2})})^{r_i} e^{(-e^{(ln(\lambda_1) + \beta_1 x_1^{\beta_2} - \beta_1 x_i^{\beta_2})})A_i}\}, \qquad (31)$$

onde $i = 1, 2, ...k$.

Fazendo $r_2 = ...r_i = r$ e aplicando o logarítmo em (31) temos,

$$\begin{aligned} l(\lambda_1, \beta_1, \beta_2) = rk \ln \lambda_1 + r \textstyle\sum_{i=1}^{k} \beta_1 (x_1^{\beta_2} - x_i^{\beta_2}) - \\ - \lambda_1 \textstyle\sum_{i=1}^{k} \exp(\beta_1 x_1^{\beta_2} - \beta_1 x_i^{\beta_2}) A_i. \end{aligned} \qquad (32)$$

A matriz de informação de Fisher para os parâmetros λ_1, β_1 e β_2, é dada por,

$$\tilde{I} = r \left[\begin{array}{l} k\lambda_1^{-1} \\ \\ (kx_1^{\beta_2} - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\beta_2})\lambda_1^{-1} \\ \\ \beta_1 (kx_1^{\beta_2} \ln(x_1) - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\beta_2} \ln(x_i))\lambda_1^{-1} \end{array} \right.$$

$$\times \begin{array}{l} (kx_1^{\beta_2} - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\beta_2})\lambda_1^{-1} \\ \\ kx_1^{2\beta_2} - \sum_{i=1}^{k} 2(x_1 x_i)^{\beta_2} - {x_i}^{2\beta_2}) \\ \\ \beta_1 (kx_1^{2\beta_2} \ln(x_1) \text{-} \sum_{i=1}^{k} \ln(x_1)(x_1 x_i)^{\beta_2} \\ \qquad - \ln(x_i)(x_1 x_i)^{\beta_2} \text{-} x_i^{2\beta_2} \ln(x_i)) \end{array} \times$$

$$\times \left. \begin{array}{l} \beta_1 (kx_1^{\beta_2} \ln(x_1) - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\beta_2} \ln(x_i))\lambda_1^{-1} \\ \\ \beta_1 (kx_1^{2\beta_2} \ln(x_1) - \sum_{i=1}^{k} \ln(x_1)(x_1 x_i)^{\beta_2} \\ \qquad - \ln(x_i)(x_1 x_i)^{\beta_2} - x_i^{2\beta_2} \ln(x_i)) \\ \\ \beta_1^2 (kx_1^{2\beta_2} \ln(x_1)^2 - \sum_{i=1}^{k} 2 \ln(x_1) \ln(x_i)(x_1 x_i)^{\beta_2} \\ \qquad - x_i^{2\beta_2} \ln(x_i)^2) \end{array} \right]. \qquad (33)$$

Por analogia ao procedimento adotado na Seção 6.1, inferências sobre os parâmetros λ_1, β_1 e β_2 são baseadas na aproximação normal assintótica dos EMVs $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$, dada por,

$$(\widehat{\lambda}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \overset{a}{\backsim} N\{(\lambda_1, \beta_1, \beta_2); \tilde{I}^{-1}(\widehat{\lambda}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)\}, \tag{34}$$

onde $\tilde{I}(\lambda_1, \beta_1, \beta_2)$ é a matriz de informação de Fisher para parâmetros $\lambda_1, \beta_1, \beta_2$ dada em (33). Observamos que seus elementos não são constantes, implicando uma aproximação imprecisa para os EMVs $\hat{\lambda}_1$ e $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ para amostra pequenas e moderadas (Sprott, 1973, 1980). Dessa forma, uma possibilidade consiste em obter uma parametrização que leve a uma melhor aproximação normal. Entretanto, no nosso caso, a obtenção de tal parametrização não é óbvia. Novamente os procedimentos de estimação intervalares baseados em procedimento de reamostragem e/ou na verossimilhança perfilada, ambos descritos nas Seções 6.2 e 6.3, podem ser considerados.

10 Um Exemplo Numérico

Para ilustrar a metodologia proposta neste artigo, consideramos o mesmo conjunto de dados utilizado na verificação gráfica apresentada na Seção 4. A amostra foi obtida a partir do modelo exponencial log-não-linear, de (1) e (6), com os valores dos parâmetros fixados em $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 9$ e $\beta_2 = 3$, referentes a um TSA com três níveis de estresse, $\mathbf{X} = (1, 1/2, 1/3)$ com 30 componentes em cada nível.

A ERV, w, para testar uma RER log-linear *versus* uma RER log-não linear é igual a 34.49 com valor estimado do p-valor menor que 0.001, indicando que o modelo log-linear é inadequado. A Figura 4 mostra a distribuição empírica da ERV para este exemplo que não tem uma distribuição aproximadamente χ^2.

A $ESCM$, $sw_{0,}$ é igual a 19.18 com valor estimado do p-valor menor que 0.001, também indicando que o modelo log-linear é inadequado. A Figura 5 mostra a distribuição empírica de sw_0 para este exemplo que não tem uma distribuição de probabilidade conhecida; contudo, ajustamos uma normal, e verificamos a sua inadequabilidade.

FIGURA 4 - Histograma e Q-Qplot da distribuição empírica da ERV. (—) aproximação a uma χ^2_1.

FIGURA 5 - Histograma e Q-Qplot da distribuição empírica da $ESCM$ com uma aproximação Normal (—).

A Tabela 2 mostra os EMVs dos parâmetros, os intervalos de confiança assintóticos de 90%, os intervalos perfilados e os intervalos percentis bootstrap de 90%. Este último obtido via simulação paramétrica como descrita na Seção 6.2. A diferença entre a teoria assintótica e os resultados de simulação é maior para β_0 e β_2, onde observamos um maior vício relativo para o intervalo bootstrap, obtido por: $\frac{\hat{\beta}^*_{pB} - \hat{\beta}_p}{\hat{\beta}_p}$, onde $p = 0, 1, 2$.

A Figura 6 apresenta as verossimilhanças perfiladas para β_0, β_1 e β_2.

Tabela 2 - EMVs para os parâmetros β_0, β_1 e β_2, intervalos de confiança de 90% assintóticos, perfilados, percentis e estimativas do vício.

Parâmetros	β_0	β_1	β_2
EMV	-1.732	8.646	3.393
Assintótico	$(-2.26, -1.21)$	$(8.04, 9.25)$	$(2.25, 4.53)$
Perfilado	$(-2.35, -1.25)$	$(8.08, 9.31)$	$(2.45, 5.30)$
Bootstrap	$(-2.36, -1.30)$	$(8.09, 9.32)$	$(2.53, 5.13)$
Vício Relativo	0.029	0.004	0.04

FIGUR 6 - Verossimilhanças perfiladas da esquerda para direita, para β_0, β_1 e β_2.

Contudo, o interesse na realização de um TSA, geralmente está centrado em inferências sobre λ_i, $i = 1, ..., k$; assim, construímos a Tabela 3 que mostra os EMVs dos parâmetros λ_1, λ_2 e λ_3, juntamente com seus respectivos intervalos de confiança assintóticos, os intervalos perfilados e percentis bootstrap de 90%. Notamos que os vícios estimados são pequenos mantendo-se para λ_1, λ_2 e λ_3 na ordem de 3%. A Figura 7 apresenta as verossimilhanças perfiladas para λ_1, λ_2 e λ_3.

FIGURA 7 - Verossimilhanças perfiladas, da esquerda para direita, para λ_1, λ_2 e λ_3.

Tabela 3 - EMVs para os parâmetros λ_1, λ_2 e λ_3 intervalos de confiança de 90% assintóticos, perfilados, percentis e estimativas do vício

Parâmetros	λ_1	λ_2	λ_3
EMV	$9.9\text{x}10^{-4}$	2.49	4.59
Assintótico	$(8.2\text{x}10^{-4}, 1.6\text{x}10^{-3})$	$(2.05, 2.91)$	$(3.79, 5.38)$
Perfilado	$(7.2\text{x}10^{-4}, 1.3\text{x}10^{-3})$	$(1.82, 3.28)$	$(3.33, 6.06)$
Bootstrap	$(7.5\text{x}10^{-4}, 1.4\text{x}10^{-3})$	$(1.88, 3.42)$	$(3.49, 6.37)$
Vício Relativo	0.035	0.028	0.032

As Figuras 8 e 9 apresentam as distribuições empíricas dos EMVs, com Q-Qplots normais. Observamos que as distribuições não devem ser aproximadas por uma normal.

FIGURA 8 - Histogramas e Q-Qplots das distribuições empíricas dos EMVs $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$.

FIGURA 9 - Histogramas e Q-Qplots das distribuições empíricas dos EMVs $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$.

11 Comentários Finais

A vantagem da RER (6) em relação a seus antecessores é permitir uma variabilidade extra no ajuste, através de um aumento ou decréscimo mais intenso do risco para valores extremos da variável estresse. Além disso, (6) permite a verificação da validade da existência de log-linearidade entre o parâmetro da distribuição exponencial e os níveis de estresse.

Entretanto, cautela é necessária nos procedimentos de estimação intervalar e testes de hipóteses, uma vez que a teoria assintótica usual pode não ser válida, particularmente quando a amostra é pequena ou moderada. Neste caso, utilizamos os intervalos de confiança perfilados. Uma alternativa, principalmente em amostra pequenas e moderadas, é a utilização de técnicas de reamostragem na obtenção de intervalos de confiança percentis bootstrap e das distribuições empíricas das estatísticas de testes. Outra alternativa é a utilização de técnicas Bayesianas.

No exemplo numérico desenvolvido neste capítulo, observamos que os procedimentos de simulação adotados permitiram a verificação empírica de que a teoria assintótica não deve ser adotada, uma vez que a mesma não propicia resultados suficientemente adequados, particularmente em relação a β_2. Também o procedimento bootstrap paramétrico apresenta-se como método alternativo de inferência de fácil implementação.

Agradecimentos

Este trabalho tem o apoio do CNPq.

PERDONÁ, G. C; LOUZADA-NETO, F. An Introduction to the Accelerate Tests With Log-Non-Linear Stres-Response Relationship.*Rev. Mat. Estat.* (São Paulo), v.20, p.227-252, 2002.

▪ *ABSTRACT: Accelerated life tests are usually used as time and cost efficient reliability industrial experiments. They consist of submitting items to levels of stress higher than the usual working conditions. The main interest of such experiments is to obtain measures of the reliability of the devices under the usual working conditions via data obtained under stress levels. Usually the deterministic component of an accelerated life tests model, known as stress-response relationship, which relates the mean lifetime (or a function of this parameter) to the stress levels, is log-linear. In this paper we propose an accelerated life tests model with a log-non-linear stress-response relationship. The advantage of such a formulation is that the general framework accommodates several stress-response relationship usually considered on accelerated life tests, while is enough flexible for fitting the data that cannot be accommodate by a simple log-linear stress-response relationship. Classical estimation procedures are presented, including bootstrap tests based on the modified score statistics and the likelihood ratio statistics for testing the effect of a covariate.*

▪ *KEYWORDS: Accelerate Life Tests, Bootstrap, Exponential Distribution, Inferential Procedures, Log-Non-Linear Stress-Response Relationship.*

Referências

ACHCAR, J. A.; LOUZADA-NETO F. Accelerated life tests with one stress variable: a Bayesian analysis of the Eyring model. *Braz. J. Probabil. Stat.*, v.5, p.169-179, 1991.

ACHCAR, J. A.; LOUZADA-NETO F. . A Bayesian approach for accelerated life tests considering the Weibull distribution. *Comput. Stat.*, v.7, p.355-368, 1992.

BARBOSA, E. P.; COLOSIMO, E. A.; LOUZADA-NETO F. Accelerated life tests analysed by a piecewise exponential distribution via generalized linear models. *IEEE Trans. Reliabil.* v.45, p.619-623, 1996.

COLLET, D. *Modelling survival data in medical research.*London: Chapman & Hall, 1994. 347p.

COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical statistics.* London: Chapman and Hall, 1974. 511p.

COX, D. R.; REID, N. Ortogonal parameters and approximated conditional inference with discussion. *J. R. Stat. Soc.* B, v.49, p.1-39, 1987.

DAVIES, R. B. Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika*, v.64, p.247-254, 1977.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap methods and their application*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

EFRON, B. Boostrap methods: anoher look at the jackknife. *The Ann. Stat.*, v.7, p.1-26, 1979.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the boostrap*. New York: Chapman & Hall, 1993. 436p.

FRANCO, G. C.; KOOPMAN, S. J.; SOUZA, R. C. Bootstrap tests when parameters of nonstationary time series models lie on the boundary of the parameter space, *Braz. J. Probabil. Stat.* v.13, n.1, p.41-49, 1999.

KALBFLEISCH, J. D. *The statistical analysis of failure time data*. New York: John Wiley & Sons, 1980. 450p.

LAWLESS, J.F. *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: John Wiley, 1982.

MANN, N.R.; SCHAFFER, R.E.; SINGPURWALLA, N. D. Methods for statistical analysis of reliabity and life test data. New York: John Wiley, 1974.

MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, A. *Statistical metrods for reliability data*. New York: John Wiley, 1998. 680p.

MILLER, R. G. *Survival analysis*. New York: John Wiley, 1981.

NELSON, W. *Accelerated testing:* statistical models, test plans and data analyses. New York: John Wiley, 1990.

NELSON, W. Graphical analysis of accelerated life test data with inverse power law model. *IEEE Trans. Reliabil.*, v.21, n.1, p.2-11, 1972.

RODRIGUES, J.; LOUZADA-NETO, F. Reparametrização ortogonal em testes de sobrevivência acelerados com o modelo de potência. *Rev. Mat. Estat.*, v.10, p.97-108, 1992.

SPROTT, D. A. Normal likelihood and their relation to large sample theory of estimation. *Biometrika*, v.60, n.3, p.457-465, 1973.

SPROTT, D. A. *Maximum likelihood in samll samples*: estimation in the presence of nuisance parameters. *Biometrika,* v.67, n.3, p.515-523, 1980.

Recebido em 21.05.2001.

12 Apêndice

Tabela de Dados

i	X_i	r_i	Dados não censurados					
1	1	30	141.89	4318.31	2780.01	58.31	2609.68	3565.96
			311.29	867.04	1041.22	44.23	441.60	1242.32
			98.36	720.58	823.83	241.63	311.10	206.33
			223.71	850.33	2289.78	219.43	320.67	525.21
			1393.68	368.41	704.19	1815.62	1442.65	185.70
2	$\frac{1}{2}$	30	0.480	0.124	0.745	0.720	0.039	1.327
			0.377	0.114	0.417	0.078	0.736	0.992
			0.300	0.126	0.567	0.426	2.129	0.099
			0.244	0.141	0.675	0.086	0.035	0.075
			0.287	0.032	0.148	0.149	0.194	0.204
3	$\frac{1}{3}$	30	0.132	0.274	0.354	0.054	0.100	0.383
			0.047	0.005	0.041	0.106	0.202	0.104
			0.102	0.177	0.204	0.358	0.125	0.253
			0.014	0.129	0.094	0.150	0.367	0.407
			0.161	0.637	0.239	0.753	0.086	0.458