

ANÁLISE BAYESIANA PARA DADOS DE SOBREVIVÊNCIA COM FUNÇÕES DE RISCO EM FORMA DE U

Jorge Alberto ACHCAR¹
Valdirene de Fátima BARBOSA¹

- RESUMO: Neste artigo, consideramos o uso de métodos de Monte Carlo em cadeias de Markov (MCMC) para uma análise Bayesiana de dados de sobrevivência com função de risco em forma de banheira ou U. Vários modelos são considerados, e em especial consideramos um modelo proposto por Ryu (1993). Um exemplo de aplicação é introduzido para ilustrar a metodologia proposta.
- PALAVRAS-CHAVE: dados de sobrevivência, função de risco em forma de U, análise Bayesiana.

1 Introdução

Em análise de dados de sobrevivência é muito comum situações onde o tempo de vida associado à uma causa particular não ser observado, mas somente ser conhecido o tempo de vida mínimo entre todas as causas possíveis de falha incluindo a causa particular de interesse. Muitas vezes, a causa particular de falha não é indicada para os tempos de sobrevivência observados.

Um caso especial é dado por unidades ou componentes fabricados numa linha de produção onde há uma pequena

¹Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, CEP: 13560-970, São Carlos-SP, Brasil, jorge@icmc.sc.usp.br, val@icmc.sc.usp.br

proporção de componentes com algum defeito de fabricação que leva à falha precoce do componente e uma grande proporção de componentes sem defeito de fabricação que falham por envelhecimento ou desgaste natural. Assim, há interesse em modelos que incorporam essas duas causas de falhas: falhas precoces e falhas por envelhecimento.

Neste caso, a função de risco (ver por exemplo, Kalbfleisch e Prentice, 1980) pode ter uma forma de banheira ou U, e os modelos paramétricos usuais como as distribuições de Weibull, Exponencial, Gama entre outros, não são adequados para analisar os dados.

A mesma situação é encontrada para dados médicos onde podemos ter dois ou mais riscos competitivos que levam à morte do paciente.

Assim, o tempo de vida observado é dado por $T = \min(T_1, T_2)$, onde T_1 é o tempo de vida devido à causa defeito de fabricação e T_2 é o tempo de vida devido ao envelhecimento.

Muitas distribuições são introduzidas para modelar esse tipo de dados tais como a família de distribuições Gama generalizada proposta por Stacy (1982), a família Potência-Exponencial formulada por Smith & Bain (1975). Uma revisão para modelos com função de risco na forma de U é dada por Rajarshi & Rajarshi (1988). Uma ampla variedade de métodos de estimação e testes de hipóteses tais como o método dos momentos, mínimos quadrados ponderados e máxima verossimilhança foram discutidos para esses modelos (ver por exemplo, Rajarshi & Rajarshi (1988), Hjorth (1980)). Mudholkar et al (1995) apresenta uma generalização da família de distribuição Weibull chamada família de distribuição Weibull exponenciada que além de incluir distribuições com funções de risco em forma de U e unimodal também admite uma ampla classe de distribuições com riscos monótonos computacionalmente conveniente para análise de dados com censuras. Modelos com riscos Poly-Weibull são introduzidos por Berger & Sun (1993,1996) e Louzada-Neto (1999).

Chan & Meeker (1997) assumem que T_1 e T_2 são independentes e T_1 tem função distribuição $p F_1(t, \theta_1)$, onde p está definido entre zero e um e T_2 tem função distribuição $F_2(t, \theta_2)$, isto é, $F(t, \theta) = P(T \leq t) = 1 - (1 - p F_1(t, \theta_1)) (1 - F_2(t, \theta_2))$, onde $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Na prática, em geral T_1 e T_2 não são duas variáveis aleatórias

independentes. Neste caso podemos considerar uma distribuição de sobrevivência bivariada, como por exemplo, a distribuição bivariada introduzida por Ryu (1993) que é uma extensão do modelo de Marshall & Olkin (1967).

Em geral, podemos ter dificuldades para obter inferências clássicas para esse tipo de modelo especialmente com dados censurados. O uso de métodos Bayesianos para esse tipo de modelo pode ser de grande aplicabilidade, especialmente usando métodos MCMC (Monte Carlo em Cadeias de Markov). Entre esses métodos de simulação, destacamos o algoritmo Gibbs sampling (ver por exemplo, Gelfand & Smith, 1990) e o algoritmo Metropolis-Hastings (ver por exemplo, Smith & Roberts, 1993).

2 Alguns Modelos com Funções de Risco em Forma de U

Alguns modelos são introduzidos na literatura para analisar tempos de vida T com função de risco em forma de U . Um caso especial é dado pela distribuição de Weibull exponenciada (WE) com parâmetros α , θ , σ . A função de risco $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$, onde $f(t)$ é a função densidade de probabilidade de T e $S(t) = P(T \geq t)$ é a função de sobrevivência para a distribuição WE é dada por,

$$h(t) = \frac{\alpha\theta \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha\right\}\right]^{\theta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha\right\} \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha-1}}{\sigma \left[1 - \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha\right\}\right)^\theta\right]} \quad (1)$$

O modelo WE apresenta várias formas para a função de risco:

- (i) monótona crescente se $\alpha \geq 1$ e $\alpha\theta \geq 1$,
- (ii) monótona decrescente se $\alpha \leq 1$ e $\alpha\theta \leq 1$,
- (iii) forma de banheira se $\alpha > 1$ e $\alpha\theta < 1$ e
- (iv) unimodal de $\alpha < 1$ e $\alpha\sigma > 1$

A distribuição IDB proposta por Hjort (1980) com dois parâmetros de forma e um parâmetro de escala tem função de risco definida por,

$$h(t) = \delta t + \frac{\theta}{1 + \beta t} \quad (2)$$

De (2) temos alguns casos especiais da distribuição IDB:

- (a) distribuição de Rayleigh (distribuição Weibull) se $\theta = 0$,

- (b) distribuição exponencial (distribuição Weibull) se $\delta = \beta = 0$,
- (c) distribuição com risco decrescente se $\delta = 0$,
- (d) distribuição com risco crescente se $\delta \geq \theta\beta$,
- (e) distribuição com risco na forma de U se $0 < \delta < \theta\beta$.

Smith & Bain (1975) introduzem uma família de distribuição chamada Potência Exponencial com dois parâmetros cuja função de risco é dada por,

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} \exp\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right), t > 0 \quad (3)$$

A função de risco (3) tem forma de U se $0 < \beta < 1$.

3 Modelo Bivariado de Ryu

Ryu (1993), generaliza o cenário físico considerado por Marshall & Olkin (1967) admitindo choques que produzem efeitos de forma acumulativa aumentando o risco de falha. O modelo bivariado de Ryu tem densidade marginal com taxa de falha crescente e a densidade conjunta indica que um par de sistemas antigo tem menor probabilidade de sobrevivência do que um novo par, sendo que os choques se acumulam com o passar do tempo. Ao contrário do modelo de Marshall & Olkin, o modelo de Ryu é absolutamente contínuo.

3.1 Modelo de Ryu

Ryu (1993), considera T_1 e T_2 os tempos de falha dos sistemas 1 e 2, respectivamente, como sendo variáveis aleatórias dependentes. Sendo assim, a função densidade do modelo bivariado de Ryu é dada por:

Para $t_1 > t_2$, $f(t_1, t_2) =$

$$\begin{aligned} & \bar{F}(t_1, t_2) \left(\lambda_2 + \lambda_{12} e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} - \frac{\lambda_{12} (\beta_1 e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} + \beta_2 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right) \\ & \left(\lambda_1 + \lambda_{12} - \lambda_{12} e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} + \beta_1 \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} (e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2}) \right) + \\ & + \bar{F}(t_1, t_2) \left(\beta_1 \lambda_{12} e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} - \frac{\beta_1 \lambda_{12} (\beta_1 e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} + \beta_2 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right) \end{aligned}$$

Para $t_1 \leq t_2$, $f(t_1, t_2) =$

$$\bar{F}(t_1, t_2) \left(\lambda_1 + \lambda_{12} e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)} - \frac{\lambda_{12} (\beta_2 e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)} + \beta_1 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_2 + \lambda_{12} - \lambda_{12} e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)} + \beta_2 \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} (e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2}) \right) + \\ & + \bar{F}(t_1, t_2) \left(\beta_2 \lambda_{12} e^{-\beta_2 (t_1 - t_2)} - \frac{\beta_2 \lambda_{12} (\beta_2 e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)} + \beta_1 e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\bar{F}(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$.

Note que se $\lambda_{12} = 0$, então T_1 e T_2 são variáveis aleatórias independentes, onde T_i tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_i, i = 1, 2$.

A função de sobrevivência conjunta é dada por:

Para $t_2 < t_1$, $P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) =$

$$\exp \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1 - \lambda_2 t_2 + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)})}{\beta_1} + \frac{\lambda_{12} (e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\}$$

Para $t_1 \leq t_2$, $P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) =$

$$\exp \left\{ -(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2 - \lambda_1 t_1 + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)})}{\beta_2} + \frac{\lambda_{12} (e^{-\beta_2 (t_1 - t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\} \quad (5)$$

Note que quando $\beta_1 \uparrow \infty$ e $\beta_2 \uparrow \infty$, a função de sobrevivência conjunta reduz-se à distribuição exponencial bivariada de Marshall e Olkin (1967):

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \exp \{ -(\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)) \}$$

A função de sobrevivência para T_i é dada por

$$P(T_i > t) = \exp \left\{ -\lambda_i t - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{-\beta_i t})}{\beta_i} \right\}, i = 1, 2. \quad (6)$$

A função densidade para T_i é dada por

$$f_{T_i}(t) = [\lambda_i + \lambda_{12} (1 - e^{-\beta_i t})] \exp \left\{ -\lambda_i t - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12} \{1 - e^{-\beta_i t}\}}{\beta_i} \right\} \quad (7)$$

Observa-se que se $\beta_i \uparrow \infty$, a distribuição reduz-se à distribuição exponencial com taxa de risco constante $\lambda_i + \lambda_{12}$ (ver figura (1)).

A função de risco é dada por:

$$h_i(t) = \lambda_i + \lambda_{12} (1 - e^{-\beta_i t}), i = 1, 2. \quad (8)$$

Note que $h_i(t)$ é crescente em t , a menos que $\beta_i \uparrow \infty$.

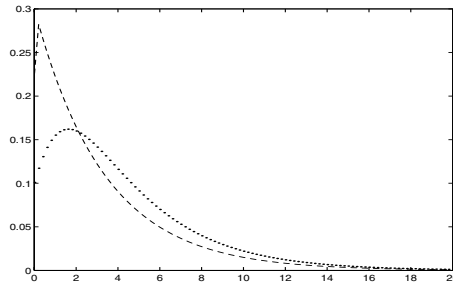


Figura - 1: Função densidade (7): (.... $\beta_i = 0,5$; - - - $\beta_i \uparrow \infty$).

3.2 Modelo Generalizado de Ryu

O modelo bivariado de Ryu pode ter a forma generalizada com função de sobrevivência conjunta dada por:

$$\text{Para } t_2 < t_1, \\ P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) =$$

$$\exp \left\{ -\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12} t_1 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{-\beta_1 (t_1 - t_2)})}{\beta_1} + \frac{\lambda_{12} (e^{\beta_1 (t_1 - t_2)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\}$$

$$\text{Para } t_1 \leq t_2, \\ P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) =$$

$$\exp \left\{ -\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12} t_2 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \frac{\lambda_{12} (1 - e^{-\beta_2 (t_2 - t_1)})}{\beta_2} + \frac{\lambda_{12} (e^{\beta_2 (t_2 - t_1)} - e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2})}{\beta_1 + \beta_2} \right\} \quad (9)$$

Note que, quando $\alpha_1 \rightarrow 1$ e $\alpha_2 \rightarrow 1$, as expressões anteriores reduzem-se à (5).

A função densidade conjunta para (T_1, T_2) , fixando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, (ver 4), é dada por:

(i) Para $t_1 > t_2$,

$$f(t_1, t_2) = \overline{F}(t_1, t_2) [\lambda_2 + a_1 \lambda_{12} - c(\beta_1 a_1 + \beta_2 b)] \times [\lambda_1 + \lambda_{12} - \lambda_{12} a_1 + \beta_1 c(a_1 - b)] + \\ + \overline{F}(t_1, t_2) [\beta_1 \lambda_{12} a_1 - \beta_1 c(\beta_1 a_1 + \beta_2 b)]$$

(ii) Para $t_1 \leq t_2$,

$$f(t_1, t_2) = \overline{F}(t_1, t_2) [\lambda_1 + a_2 \lambda_{12} - c(\beta_2 a_2 + \beta_1 b)] \times [\lambda_2 + \lambda_{12} - \lambda_{12} a_2 + \beta_2 c(a_2 - b)] +$$

$$+ \bar{F}(t_1, t_2) [\beta_2 \lambda_{12} a_2 - \beta_2 c (\beta_2 a_2 + \beta_1 b)].$$

onde $\bar{F}(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$ e $a_1 = e^{-\beta_1(t_1-t_2)}$; $a_2 = e^{-\beta_2(t_1-t_2)}$; $b = e^{-\beta_1 t_1 - \beta_2 t_2}$; $c = \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2}$.

A função de sobrevivência para T é dada por,

$$P(T > t) = \exp \{a - \lambda_{12} t - b_1 t^{\alpha_1} - b_2 t^{\alpha_2} - a e^{-ct}\}$$

onde,

$$\begin{aligned} (a, b_1, b_2, c) &= \left(\frac{\lambda_{12}}{\beta_1}, \lambda_1, 0, \beta_1 \right), \text{ se } T = T_1 \\ &= \left(\frac{\lambda_{12}}{\beta_2}, 0, \lambda_2, \beta_2 \right), \text{ se } T = T_2 \\ &= \left(\frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2}, \lambda_1, \lambda_2, \beta_1 + \beta_2 \right), \text{ se } T = \min(T_1, T_2) \end{aligned}$$

Assim, as densidades para T_1, T_2 e $T = \min(T_1, T_2)$ são dadas por,

$$f(t) = \left\{ \lambda_{12} + b_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + b_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} - a c e^{-ct} \right\} \exp \left\{ a - \lambda_{12} t - b_1 t^{\alpha_1} - b_2 t^{\alpha_2} - a e^{-ct} \right\} \quad (10)$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto,

$$(i) f(t_1) = \left\{ \lambda_{12} + \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} - \lambda_{12} e^{-\beta_1 t_1} \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_1} - \lambda_{12} t_1 - \lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_1} e^{-\beta_1 t_1} \right\} \quad (11)$$

$$(ii) f(t_2) = \left\{ \lambda_{12} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} - \lambda_{12} e^{-\beta_2 t_2} \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_2} - \lambda_{12} t_2 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_2} e^{-\beta_2 t_2} \right\} \quad (12)$$

(iii) Se $T = \min(T_1, T_2)$, temos,

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\{ \lambda_{12} + \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} - \lambda_{12} t - \lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

3.3 O Modelo de Ryu para tempo de falha precoce e falha por envelhecimento

Considerando uma situação em que os dados são tempos de falha de unidades de uma população para os quais não se tem informação sobre a causa de falha, representa-se então o tempo de falha de cada unidade por $t = \min(T_1, T_2)$. Isto é, tem-se dois riscos competitivos para falhas $T = \min(T_1, T_2)$, para o qual

(a) T_1 representa o tempo de falha precoce;

(b) T_2 representa o tempo de falha por envelhecimento.

Considere então $T = \min(T_1, T_2)$ com uma distribuição de três parâmetros :

$\theta_1 = \frac{\lambda_{12}}{(\beta_1 + \beta_{12})}$; $\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$; $\theta_3 = \beta_1 + \beta_2$, onde $\theta_1 \theta_3 = \lambda_{12}$ mede a correlação entre as causas de falha.

Nesta parametrização, a função densidade então é escrita na forma:

$$f(t) = (\theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t}) \exp \{ \theta_1 - \theta_2 t - \theta_1 e^{-\theta_3 t} \} , t \geq 0. \quad (14)$$

A função de sobrevivência é dada por:

$$S(t) = P(T > t) = \exp \{ \theta_1 - \theta_2 t - \theta_1 e^{-\theta_3 t} \} \quad (15)$$

A função de risco é dada por:

$$h(t) = \theta_2 - \theta_1 \theta_3 e^{-\theta_3 t} \quad (16)$$

É importante observar as seguintes características da função de risco:

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \theta_2$;

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \theta_2 - \theta_1 \theta_3$.

Observar que $\theta_2 - \theta_1 \theta_3 \leq h(t) \leq \theta_2$ e que $h(t)$ é uma função crescente em t . Na Figura 2 temos casos específicos da função de risco da distribuição de Ryu.

Observar ainda que,

(iii) Se θ_3 é grande, $h(t)$ converge rápido para θ_2 ; assim, as unidades rapidamente mudam da taxa de falha $\theta_2 - \theta_1 \theta_3$ para θ_2 ;

(iv) Se θ_3 é pequeno, $h(t)$ demora para mudar da taxa de falha $\theta_2 - \theta_1 \theta_3$ para θ_2 .

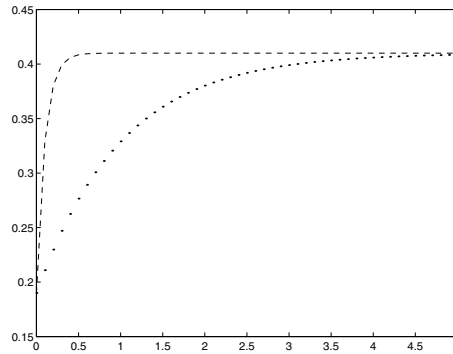


Figura - 2: Função de risco da distribuição de Ryu (- - $-\theta_1 = 0,022$; $\theta_2 = 0,41$ e $\theta_3 = 10$; $\theta_1 = 0,22$; $\theta_2 = 0,41$ e $\theta_3 = 1$)

3.4 O Modelo Generalizado de Ryu para tempo de falha precoce e falha por envelhecimento

Seja $T = \min(T_1, T_2)$ o tempo de vida de um componente, onde T_1 e T_2 são dois riscos competitivos. Considere a parametrização $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}$; onde $\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2$.

A função de sobrevivência para $T = \min(T_1, T_2)$ é dada por:

$$S(t) = P(T > t) = \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} - \lambda_{12} t_i - \lambda_1 t_i^{\alpha_1} - \lambda_2 t_i^{\alpha_2} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} e^{-\beta_{12} t_i} \right\} \quad (17)$$

A densidade para $T = \min(T_1, T_2)$ é da forma:

$$f(t) = \left\{ \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} (1 - e^{-\beta_{12} t}) \right\} \times \exp \left\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} (1 - e^{-\beta_{12} t}) \right\} \quad (18)$$

A função de risco é dada por,

$$h(t) = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} (1 - e^{-\beta_{12} t}) \quad (19)$$

Na Figura 3, temos casos especiais da função de risco (19).

Observamos uma grande flexibilidade de ajuste.

A função de sobrevivência para T é dada por:

$$P(T > t) = \exp \left\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 + \beta_2} (1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2) t}) \right\} \quad (20)$$

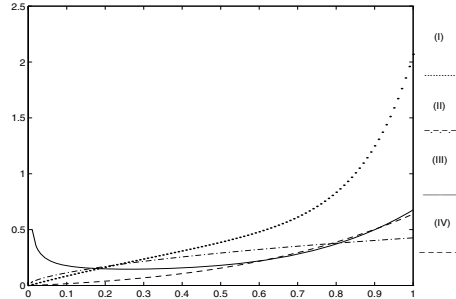


Figura - 3: Funções de risco 19 com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$, respectivamente. (I - $RG(10; 5; 1; 0, 1; 0, 1; 0, 9)$, II - $RG(1, 5; 1, 5; 1; 0, 1; 0, 1; 0, 2)$, III - $RG(5; 0, 5; 1; 0, 1; 0, 1; 0, 2)$, IV - $RG(4; 2, 2; 0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 2)$).

4 Análise Bayesiana para o modelo de Ryu

Sejam t_1, \dots, t_n os tempos de vida observados para uma amostra aleatória de n unidades com uma distribuição de probabilidade dada pela densidade $f(t_i; \theta)$. A função de verossimilhança é dada por,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta)$$

4.1 O Modelo Generalizado de Ryu

Se considerarmos um conjunto de observações T_1, \dots, T_n *iid*, tais que $T_i = \min(T_{1i}, T_{2i})$, $i = 1, \dots, n$ em que a população está sujeita a duas causas de falha (falhas precoces e falhas por envelhecimento), a função de verossimilhança para este modelo é dada por:

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^3 f_j(t | \Theta) \right\} S(t | \Theta)$$

onde, $\Theta = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_{12})$, e

$$\begin{cases} f_1(t | \Theta) = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} \\ f_2(t | \Theta) = \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} \\ f_3(t | \Theta) = \lambda_{12} (1 - e^{-\beta_{12} t}) \end{cases}$$

Considerando a função de sobrevivência dada em (17), podemos escrever:

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^n \{ \lambda_{12} + \lambda_1 \alpha_1 t_i^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2 \alpha_2 t_i^{\alpha_2 - 1} - \lambda_{12} e^{-\beta_{12} t_i} \} \times \exp \left\{ \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} - \lambda_{12} t_i - \lambda_1 t_i^{\alpha_1} - \lambda_2 t_i^{\alpha_2} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} e^{-\beta_{12} t_i} \right\} \quad (21)$$

Para simplificar a obtenção das distribuições a posteriori vamos considerar a introdução de variáveis latentes $\underline{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}), i = 1, \dots, n$ as quais transformam o modelo em componentes independentes (ver Tanner & Wong, 1987). Deste modo, o cálculo das densidades marginais à posteriori de Θ , necessárias para a implementação dos algoritmos de simulação de amostras do tipo MCMC, fica simplificado. A variável $\underline{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}), i = 1, \dots, n$ segue uma distribuição multinomial, onde $v_{ij} = 1, j = 1, \dots, 3$ se t_i for considerado como originado de uma população com função de densidade de probabilidade f_j e $\sum_{j=1}^3 v_{ij} = 1$. Deste modo, $v_i \sim MULT(h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}), i = 1, 2, \dots, n$ onde,

$$h_{ij} = \frac{f_j(t_i | \theta)}{\sum_{j=1}^3 f_j(t_i | \theta)}, \text{ onde } j = 1, 2, 3; \sum_{j=1}^3 h_{ij} = 1 \text{ } i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, $\pi(\underline{v}_i | h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}) \propto h_{1i}^{v_{1i}} h_{2i}^{v_{2i}} h_{3i}^{v_{3i}}$, onde $h_{3i} = 1 - h_{1i} - h_{2i}$.

Portanto,

$$\pi(\underline{v}_i | h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}) \propto \prod_{j=1}^3 \frac{f_j^{v_{ji}}(t_i | \theta)}{\sum_{j=1}^3 f_j(t_i | \theta)}, \text{ pois, } \sum_{j=1}^3 v_{ji} = 1.$$

Assim, podemos escrever a função de verossimilhança na forma,

$$L(\Theta | \underline{t}, \underline{v}) \propto \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^3 f_j^{v_{ji}} \right\} S(t_i | \Theta)$$

Isto é, a verossimilhança para Θ é dada por

$$L(\Theta | \underline{t}, \underline{v}) \propto \lambda_1^{\sum_{i=1}^n v_{1i}} \alpha_1^{\sum_{i=1}^n v_{1i}} \lambda_2^{\sum_{i=1}^n v_{2i}} \alpha_2^{\sum_{i=1}^n v_{2i}} \lambda_{12}^{\sum_{i=1}^n v_{3i}} \times \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\beta_{12} t_i})^{v_{3i} \delta_i} \times \left\{ \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1 - 1} - \lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2 - 1} - \lambda_{12} \sum_{i=1}^n t_i + n \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} - \frac{\lambda_{12}}{\beta_{12}} \sum_{i=1}^n e^{-\beta_{12} t_i} \right\} \quad (22)$$

onde, $r_j = \sum_{i=1}^n v_{ji}$; $j = 1, 2, 3$; $R_j = \sum_{i=1}^n v_{ji} \ln(t_i)$; $j = 1, 2$.

Considerando para $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, a distribuição a priori dada por,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\sim \Gamma(a_1, b_1); \quad \alpha_2 \sim \Gamma(a_2, b_2); \quad \beta_{12} \sim \Gamma(a_3, b_3); \\ \lambda_1 &\sim \Gamma(a_4, b_4); \quad \lambda_2 \sim \Gamma(a_5, b_5); \quad \lambda_{12} \sim \Gamma(a_6, b_6) \end{aligned} \quad (23)$$

onde a_i, b_i são conhecidos, as distribuições condicionais completas necessárias para o algoritmo Gibbs Sampling são dadas por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_1 | \Theta_{(1)}, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \times \Psi_1(\Theta) \\ \text{onde,} \\ \Psi_1(\Theta) &= \exp \left\{ r_1 \ln \alpha_1 + \alpha_1 R_1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right\} \\ \pi(\alpha_2 | \Theta_{(2)}, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \times \Psi_2(\Theta) \\ \text{onde,} \\ \Psi_2(\Theta) &= \exp \left\{ r_2 \ln \alpha_2 + \alpha_2 R_2 - \lambda_2 \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} \right\} \\ \pi(\beta_{12} | \Theta_{(3)}, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \beta_{12}^{a_3-1} e^{-b_3 \beta_{12}} \times \Psi_3(\Theta) \\ \text{onde,} \\ \Psi_3(\Theta) &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n v_{3i} \delta_i \ln(1 - e^{-\beta_{12} t_i}) + \frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} \left(n - \sum_{i=1}^n e^{\beta_{12} t_i} \right) \right\} \\ \pi(\lambda_1 | \Theta_{(4)}, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \Gamma \left(a_4 + r_1, b_4 + \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_1} \right) \\ \pi(\lambda_2 | \Theta_{(5)}, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \Gamma \left(a_5 + r_2, b_5 + \sum_{i=1}^n t_i^{\alpha_2} \right) \\ \pi(\lambda_{12} | \Theta_{(6)}, \underline{t}, \underline{v}) &\propto \Gamma \left(a_6 + r_3, b_6 + \sum_{i=1}^n t_i + \frac{1}{\beta_{12}} \sum_{i=1}^n e^{\beta_{12} t_i} - \frac{n}{\beta_{12}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

onde $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, e $\Theta_{(i)} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \theta_6)$.

Observar que α_1, α_2 e β_{12} devem ser gerados usando o algoritmo Metropolis-Hastings.

4.2 Método Bayesiano para seleção de Modelos

Em análise Bayesiana, para selecionar o modelo que melhor se ajusta a cada conjunto de dados, podemos utilizar a técnica das densidades preditivas condicionais ordenadas (CPO) para $t_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ dado $\underline{t}_{(i)} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$.

A densidade preditiva para t_i dado o vetor $\underline{t}_{(i)}$ é dada por:

$$C_i = f(t_i | \underline{t}_{(i)}) = \int f(t_i | \theta) \pi(\theta | \underline{t}_{(i)}) d\theta \quad (25)$$

onde $\pi(\theta | \underline{t}_{(i)})$ é a densidade a posteriori de θ dado $\underline{t}_{(i)}$

Utilizando as amostras geradas pelo algoritmo Gibbs Sampling-Metropolis, $f(t_i | \underline{t}_{(i)})$ pode ser aproximada pela estimativa de Monte Carlo,

$$f(\widehat{t_i | \underline{t}_{(i)}}) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R f(t_i | \theta^{(r)}) \quad (26)$$

onde R é o número de amostras $\theta^{(r)}$ geradas pelo algoritmo.

Pode-se utilizar C_i para selecionar os modelos. Uma forma é considerar gráficos de C_i versus i , ($i = 1, \dots, n$) para os diferentes modelos, onde maiores valores de C_i indicam o melhor modelo. Outra forma é escolher o modelo cujo produto de C_i seja máximo, ou seja, $C(l) = \prod_{i=1}^n C_i(l)$, onde l é o índice do modelo. Neste trabalho, são considerados: $l = 1 =$ Weibull exponenciada, $l = 2 =$ Modelo IDB, $l = 3 =$ Potência exponencial, $l = 4 =$ Modelo de Ryu e $l = 5 =$ Generalizado de Ryu.

5 Um exemplo de aplicação

Considere um conjunto de dados introduzidos por Aarset (1987), consistindo dos tempos de vida de 50 componentes (ver Tabela 1).

Tabela 1 - Tempos de vida de 50 componentes

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6	7	11	12	18	18
18	18	18	21	32	36	40	45	46	47	50	60	63	63	67
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83	84	84	84	85	85
85	85	86	86											

As estatísticas descritivas do conjunto de dados apresentados na Tabela (1) são dadas por: média = 45,6860; mediana = 48,5000; variância = 1078.

Para os dados da Tabela (1), consideramos os modelos Weibull- Exponenciada (1), Modelo IDB (2), Potência Exponencial (3), Modelo de Ryu (4) e Modelo Generalizado de Ryu (5).

Para cada distribuição considerada para os dados foi feita uma análise clássica baseada em estimadores de máxima verossimilhança e intervalos de confiança assintóticos e uma análise Bayesiana com o uso de priori informativa. Os estimadores de máxima verossimilhança foram encontrados utilizando a rotina NLPRR do módulo IML-SAS (Statistical Analysis Sistem) que

utiliza o método iterativo de Newton-Raphson para maximizar a função objetivo. Para a análise Bayesiana foi utilizado o OX -An Object-Oriented Matrix Language para o modelo Generalizado de Ryu, e para os demais modelos o módulo IML-SAS através do método de simulação MCMC, mais especificamente algoritmo Gibbs-Sampling (ver por exemplo, Gelfand & Smith, 1990) e Metropolis-Hastings (ver por exemplo, Smith & Roberts, 1993).

Para o ajuste dos modelos Weibull-Exponenciada, IDB, Potência-Exponencial, e Modelo de Ryu, foram geradas duas cadeias separadas de 10.000 iterações das quais excluiu-se as 2000 primeiras, considerando-se as iterações de 5 em 5, totalizando uma amostra final com $S = 3202$ pontos. Para o modelo Generalizado de Ryu, foram geradas 3 cadeias separadas de 10.000 iterações das quais excluiu-se as 5000 primeiras, considerando as iterações de 10 em 10, totalizando uma amostra final com $S = 1503$ pontos. A convergência das amostras geradas pelo algoritmo Gibbs com Metropolis-Hastings foi monitorada utilizando o método proposto por Gelman & Rubin (1992) o qual baseia-se na técnica de análise de variância. Para cada modelo apresentamos um resumo das estimativas, onde em cada tabela apresenta-se as médias a posteriori, intervalos de credibilidade de 95% , os estimadores dos fatores de redução de escala potencial \hat{R} (veja, Gelmann & Rubin, 1992), onde observamos convergência para todas as amostras ($\sqrt{\hat{R}} < 1.1$), estimadores de máxima verossimilhança (EMV) e intervalos de confiança assintóticos, respectivamente.

5.1 O Modelo de Ryu

Considerando o modelo (14) foram utilizadas as densidades a priori gama com $\theta_1 \sim \Gamma(20000; 100)$, $\theta_2 \sim \Gamma(280; 1000)$ e $\theta_3 \sim \Gamma(1, 82952; 100000)$. Os valores escolhidos para os hiperparâmetros foram baseados a partir de uma análise preliminar dos dados e conhecimento dos estimadores de máxima verossimilhança. Na Tabela (2) apresenta-se os resumos das estimativas encontradas para o modelo de Ryu.

Na Figura 4, temos os gráficos das densidades a posteriori marginais para θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Tabela 2 - Sumário a posteriori e E.M.V para o modelo de Ryu

	Gibbs-Metropolis			E.M.V	
	méd. a post.	i.cred. 95 %	\hat{R}	emv	i.conf.95 %
θ_1	201,4074	(198,6175;203,8958)	1,0002	201,2109	(198,2515;204,1704)
θ_2	0,2617	(0,2376;0,2949)	1,0005	0,2338	(0,1478;0,3197)
θ_3	0,0010	(0,0010;0,0011)	0,9999	0,00109	(0,0006;0,0015)

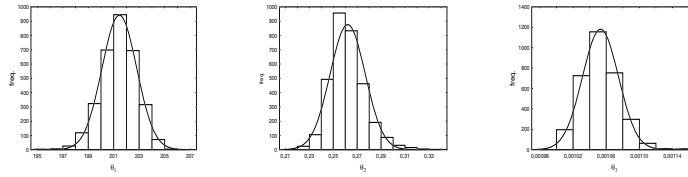


Figura - 4: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo de Ryu para os dados de Aarset.

5.2 O Modelo Generalizado de Ryu

Considerando o modelo (18), foram utilizadas as densidades a priori (23) com $\alpha_1 \sim \Gamma(100; 100)$, $\alpha_2 \sim \Gamma(100; 100)$, $\beta_{12} \sim \Gamma(100; 100)$, $\lambda_1 \sim \Gamma(100; 1000)$, $\lambda_2 \sim \Gamma(100; 1000)$, $\lambda_{12} \sim \Gamma(200; 1000)$. Os valores dos hiperparâmetros foram escolhidos a partir de uma análise preliminar dos dados e estimativas dos parâmetros usando o método dos momentos. Na Tabela (3) apresenta-se os resumos das estimativas encontradas para o modelo Generalizado de Ryu. Neste caso, não foi possível encontrar os estimadores de máxima verossimilhança pelo método adotado previamente para os outros modelos.

Tabela 3 - Sumário a posteriori para o modelo Generalizado de Ryu

	Gibbs-Metropolis		\hat{R}
	média a post.	i.cred. 95 %	
α_1	0,1987	(0,17177;0,22772)	0,999947
α_2	0,48163	(0,36831;0,64187)	1,00525
β_{12}	0,89737	(0,72355;1,08605)	1,00138
λ_1	0,09300	(0,07657;0,11138)	0,99918
λ_2	0,08648	(0,06358;0,10722)	1,00312
λ_{12}	0,01131	(0,00621;0,01538)	1,00134

Na Figura 5, temos os gráficos das densidades a posteriori marginais para os parâmetros do modelo.

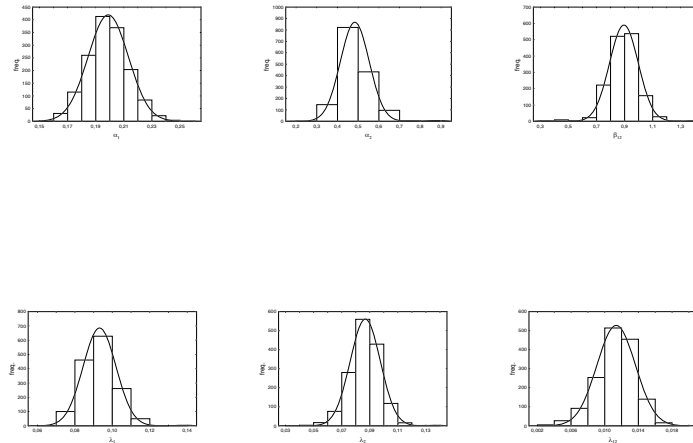


Figura - 5: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros do modelo Generalizado de Ryu para os dados de Aarset.

5.3 Discriminação dos Modelos para os dados de Aarset

Para selecionar o melhor modelo, utilizou-se a técnica escrita na seção (4.2). Com isso, foram calculados os valores de $C(l) = \prod_{i=1}^n C_i(l)$, onde l indexa modelo ($l = 1$, Weibull exponenciada; $l = 2$, modelo IDB; $l = 3$, potência exponencial; $l=4$, modelo de Ryu, $l=5$, Generalizado de Ryu). os quais se encontram na Tabela 4.

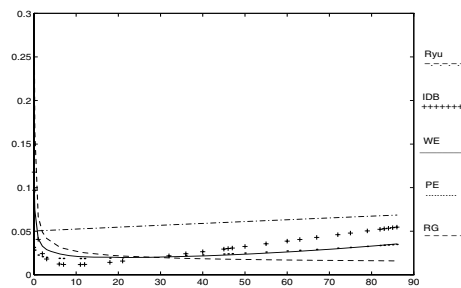


Figura - 6: Funções de risco para diferentes modelos com as estimativas bayesianas para os dados de Aarset.

Podemos observar pela Tabela (4) que o melhor modelo é o Generalizado de Ryu. Na Figura 5, temos os gráficos das funções

de risco para vários modelos.

Tabela 4 - Valores do índice geral $C(l)$

Modelo	$C(l) = \prod_{i=1}^n C_i(l)$
1	1,17e-101
2	1,28e-100
3	1,01e-102
4	1,72e-115
5	2,33e-096

6 Conclusões

O uso de métodos MCMC para a análise Bayesiana de dados de sobrevivência com função de risco em forma de U (banheira) pode simplificar a obtenção das inferências de interesse para diferentes modelos paramétricos usados para analisar os dados. Também observamos que os modelos de Ryu e Ryu Generalizado podem ser bem ajustados a vários conjuntos de dados de sobrevivência com funções de risco em forma de U, conforme observamos no exemplo de aplicação introduzido na seção 5.

Assim temos uma nova classe de modelos para ser usada em análise de dados de sobrevivência.

Além disso, podemos usar outras distribuições a priori para os parâmetros incorporando informações de especialistas ou de análise preliminar dos dados.

Na discriminação dos diferentes modelos podemos usar técnicas Bayesianas baseadas nas distribuições preditivas.

ACHCAR, J.A.; BARBOSA, V.F. Bayesian Analysis for survival data with hazard function in form of U. *Rev. Mat. Estat.* (São Paulo) v.20, p.253-271, 2002.

■ **ABSTRACT:** *In this paper, we consider the use of Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods for a Bayesian analysis of survival data with hazard function in form of U. Different models are considered being the model introduced by Ryu (1993) studied in details. An example is introduced with real data to illustrate the proposed methodology.*

- **KEYWORDS:** survival data, hazard function in form of U , Bayesian analysis.

Referências

- AARSET, M.V. *How to identify a bathtub hazard rate.* IEEE Transactions on Reliability, R-36, p.106-108, 1987.
- BERGER, J.O.; SUN, D. *Bayesian analysis for the Poly-Weibull distribution.* Journal of the American Statistical Association, v.88, p.1412-1418, 1993.
- BERGER, J.O.; SUN, D. *Bayesian inference for a class of Poly-Weibull distributions.* In Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics - essays in Honor of Arnold Zellner, Edited by Berry, D.,A., Chaloner, K.M. and Geweke, J.K., p.101-113, New York: Wiley, 1996.
- CHAN, V.; MEEKER, W.Q. *A Failure time model for infant mortality and wearout failure modes.* Iowa State University, Ames, 1997, 125p.
- GELFAND, A.E.; SMITH, A.F.M. *Sampling based approaches to calculating marginal densities.* Journal of the American Statistical Association, v.85, p.398-409, 1990.
- GELMAN, A.; RUBIN, B. D. *Inference from iterative Simulation Using Multiple Sequences.* Statistical Science, n.4, p.457-511, 1992.
- HJORTH, U. *A Reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub shaped failure rates.* Technometrics, 22, p.99-107, 1980.
- KALBFLEISCH, J.D.; PRENTICE, R.L. *The statistical analysis of failure data.* New York: Wiley, 1980, 321p.
- LOUZADA-NETO, F. *Polyhazard regression models for lifetime data.* Biometrics, 55, p.1281-1285, 1999.
- MARSHALL, A.,W.; OLKIN, I. *A multivariate exponential distribution.* Journal of the American Statistical Association, v.62, p.30-44, 1967.
- MOESHBERGER, M.L. *Life tests under dependent competing causes of failure.* Technometrics, v.16, p.39-47, 1974.

- MUDHOLKAR, G.S; SRIVASTAVA, D.K.,FREIMER,M. *The Exponenciated Weibull family. A reanalysis of the bus - motor - failure data.* *Tecnometrics* , v.4, p.436-445, 1995.
- MUDHOLKAR G.,S.; SRIVASTAVA, D.D; KOLLIA, G.,D. *A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data.* *Journal of the American Satistical Association* , v.91, p.1575-1583, 1996.
- RAJARSHI, S.; RAJARSHI, M.,B. *Bathtub distributions: a review.* *Communication in Statistics - Theory Methods*, v.17, p.2597-2621, 1988.
- RYU, K. *An extension of Marshall and Olkin's bivariate exponencial distribution.* *Journal of the american Statistical Association*, 424, p.1458-1465, 1993.
- SMITH,R.M.;BAIN,L.J. *An Exponential Power Life Testing Distribution.* *Communications in Statistics, Part A - Theory and Methods*, 4, p.469-481, 1975.
- SMITH,A.F.M; ROBERTS, G.O. *Bayesian computation via Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods.* *Journal of the Royal Statistical Society B*, 55, p.3-23, 1993.
- STACY,E.W. *A generalization of the Gamma distribution.* *Annals of Statistics*, 33, p.1187-1192, 1982.
- TANNER, M.A.; WONG, W.H. *The calculation of posterior distributions via data argumentation with discussion.* *Journal of the American Statistical Association*, 82, p.528-550, 1987.

Recebido em 01.11.2001.