RAZÃO CRUZADA: ASPECTOS ALGÉBRICOS E TOPOLÓGICOS

Angela Maria SITTA[1]
Hermes Antônio PEDROSO[1]
Wilson Maurício TADINI[2]

▪ RESUMO: Neste trabalho apresentamos alguns resultados sobre a topologia da razão cruzada. Para um ponto P=(x_1, x_2, x_3, x_4) onde x_1, x_2, x_3 e x_4 são dois-a-dois distintos, a razão cruzada pode assumir até seis valores distintos conforme a ordem considerada. Exibimos a topologia e a densidade do subconjunto de R^4 cujos pontos assumem os seis valores dois-a-dois distintos.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Razão Cruzada, Topologia.

Introdução

Chamaremos de razão cruzada (ou razão dupla ou ainda, razão anarmônica) de quatro pontos A, B, C, D de uma reta orientada r a relação $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} / \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$, envolvendo os segmentos orientados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$, sobre r, denotada por (AB, CD) (Eves, 1969).

A razão cruzada aparece pela primeira vez na Coleção Matemática de Papus (século III d.C.). O tratado de Papus é uma fonte primordial para o estudo da Geometria da época.

1 Departamento de Matemática – Ibilce – Universidade Estadual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto – SP.
2 Departamento de Matemática – UNIRP – Universidades Riopretenses, 15055-290, São José do Rio Preto – SP.

Um conceito de natureza projetiva poderia ter renascido na França no século XVII se o trabalho de Gérard Desargues (1591-1661) sobre secções cônicas tivesse sido notado.

O moderno desenvolvimento do conceito de razão cruzada se deve, com independência, a Chasles, em seu Aperçu historique sur l'origine et le développement de méthods en geométrie, de 1829 – 1837; em seu Traité de géométrie superieure, de 1852, e, em seu Traité des sections coniques, de 1865, e, a Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), em seu Der barycentrische Calcul, de 1827. Um tratamento isento de considerações métricas foi feito por Carl George Von Staudt, em seu Beiträge Zur Geometrie der Lage, de 1847. Não podemos esquecer que a idéia de segmentos orientados, que possibilita um melhor estudo da razão cruzada, foi explorada sistematicamente pela primeira vez por Lazare Carnot em seu Géométrie de Position, de 1803.

Apesar de um conceito antigo, muito utilizado em vários ramos da matemática, nos últimos 50 anos, inclusive no campo complexo, ninguém deu a ele um tratamento topológico.

Este é o nosso objetivo: com este artigo apresentar algumas relações topológicas e num próximo trabalho, relações diferenciáveis e o comportamento das fibras $\alpha^{-1}(P)$ como variedades diferenciáveis ou como reunião finita de variedades diferenciáveis, com um certo controle topológico. Também, descrever o comportamento dessas fibras nas vizinhanças dos pontos com coordenadas não duas-a-duas distintas.

Um teorema de classificação

Preliminares

Sejam R o conjunto dos números reais e R^4, o conjunto das 4-uplas de números reais, ambos com a topologia usual.

Denomina-se razão cruzada de quatro números reais x_1, x_2, x_3, x_4,, dois-a-dois distintos, o quociente $\frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}$ denotado por $[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Exemplos:

i. Fazendo $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ e $x_4 = \frac{5}{2}$ tem-se:

$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{15}{14}$; $[x_2, x_1, x_3, x_4] = \frac{14}{15}$;

$[x_1, x_3, x_2, x_4] = -\frac{1}{14}$;

$[x_3, x_1, x_2, x_4] = -14$; $[x_2, x_3, x_1, x_4] = \frac{1}{15}$ e

$[x_3, x_2, x_1, x_4] = 15$

ii. Fazendo $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$ e $x_4 = \frac{5}{2}$, tem-se:

$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{16}{15}$; $[x_2, x_1, x_3, x_4] = \frac{15}{16}$;

$[x_1, x_3, x_2, x_4] = -\frac{1}{15}$;

$[x_3, x_1, x_2, x_4] = -15$; $[x_2, x_3, x_1, x_4] = \frac{1}{16}$ e

$[x_3, x_2, x_1, x_4] = 16$

Através dos exemplos dados, constata-se:

1. A razão cruzada depende essencialmente da ordem dos números considerados.
2. Com as seis ordens apresentadas pode-se ter as razões duas-a-duas distintas, ou não.

Como a razão cruzada envolve quatro elementos, então, as permutações envolvidas são do grupo S_4, cuja ordem é 24. No que segue, usaremos S para representar o grupo das permutações S_4. Mostraremos adiante que existe uma partição $P = \{ S^i, i = 1, 2, ..., 6 \}$ de S tal que, $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ é invariante por S^i, $i = 1,2,...,6$, acarretando que a "órbita" $S.[x_1, x_2, x_3, x_4]$ tem no máximo seis elementos para cada $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^{(4)}$ fixado, onde $R^{(4)} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j\}$ e que, existe um único m tal que, S^m tem estrutura de subgrupo de S.

O teorema

Dado $\underline{s}$ em S, denotaremos $[x_{s(1)}, x_{s(2)}, x_{s(3)}, x_{s(4)}]$ por $s.[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Sejam a, b, c, d dois-a-dois distintos. Por s(a,b,c,d) denotaremos a permutação definida por s(a) = b, s(b) = c, s(c) = d e s(d) = a. Analogamente, representaremos por s(a,b,c) a permutação s(a) = b, s(b) = c, s(c) = a e s(d) = d. Finalmente entenderemos por s(a,b) a transposição s(a) = b, s(b) = a.

Apresentamos a seguir, um TEOREMA CLÁSSICO da literatura sobre razão cruzada.

Teorema I - (de Classificação). *Seja $r = [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Então:*

i) $s(1,2) \,.\, r = s(3,4) \,.\, r = \dfrac{1}{r}$;

ii) $s(2,3) \,.\, r = s(1,4) \,.\, r = 1 - r$;

iii) $s(1,3) \,.\, r = s(2,4) \,.\, r = \dfrac{r}{r-1}$.

Demonstração: A título de ilustração justificaremos o caso ii):

Temos $s(2,3) \,.\, r = s(2,3) \,.\, [x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1, x_3, x_2, x_4] = \dfrac{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(x_2 - x_3)}$. Dividindo a igualdade $(x_4 - x_1)(x_3 - x_2) + (x_4 - x_2)(x_1 - x_3) + (x_4 - x_3)(x_2 - x_1) = 0$ por $(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)$, temos:

$1 + \dfrac{(x_4 - x_2)(x_1 - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)} = -\dfrac{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}$, ou seja, $1 - r = s(2,3) \,.r$.

Analogamente, mostra-se que $s(1,4) \,.\, r = 1 - r$.

Corolário. *Seja $r = [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Então:*

i) $(s(1,2) \circ s(1,4)) \,.\, r = (s(3,4) \circ s(1,4)) \,.\, r = \dfrac{1}{1-r}$

ii) $(s(2,3) \circ s(1,2)) \,.\, r = (s(1,4) \circ s(3,4)) \,.\, r = \dfrac{r-1}{r}$

Proposição. *Seja* $r = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Então $S.r \subset \{r, \frac{1}{r}, 1- r, \frac{1}{1-r}, \frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1}\}$, *tendo pois, no máximo, seis elementos.*

Demonstração: (Eves, 1969).

Para cada $m \in \{r, \frac{1}{r}, 1- r, \frac{1}{1-r}, \frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1}\}$, consideremos $S(m,m) = \{ s \in S \mid s.m=m\}$. Logo, S(m,m) = {id, s(1,2) o s(3,4), s(1,3) o s(2,4), s(1,4) o s(2,3)} tem estrutura de subgrupo de S, bastando para isso observar a tabela abaixo.

	id	μ	φ	θ
id	id	μ	φ	θ
μ	μ	id	θ	φ
φ	φ	θ	id	μ
θ	θ	φ	μ	id

Onde μ = s(1,2) o s(3,4), φ = s(1,3) o s(2,4) e θ =s(1,4) o s(2,3).

Dados $m, n \in \{r, \frac{1}{r}, 1- r, \frac{1}{1-r}, \frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1}\}$, seja S(m,n) = $= \{ s \in S \mid s . m = n\}$.

Para $m \neq n$, S(m,n) não tem estrutura de subgrupo de S pois, não contém a permutação identidade. A título de ilustração temos:

- $S(r, \frac{1}{r})$ = {s(1,2), s(3,4), s(1,4,2,3), s(1,3,2,4)}
- S(r, 1-r) = {s(1,4), s(2,3), s(1,2,4,3), s(1,3,4,2)}
- $S(r, \frac{1}{1-r})$ = {s(1,3,2), s(2,3), s(2,3,4), s(1,2,4)}

- $S(r, \frac{r-1}{r}) = \{s(1,2,3), s(2,4,3), s(1,4,2), s(1,3,4)\}$
- $S(r, \frac{r}{r-1}) = \{s(1,3), s(1,4,3,2), s(2,4), s(1,2,3,4)\}$.

Observações:

A título de informação adicional, analisando o comportamento de S.r constatamos que é possível trocar a "ação" de S pela "ação" de S_3, grupo das permutações de três elementos, de uma forma conveniente.

Aspectos topológicos da razão cruzada

Temos que $R^{(4)}$ é aberto e denso em R^4 com relação à topologia usual.

Seja $\alpha_1 : R^{(4)} \to R$ definida por $\alpha_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Temos que α_1 é contínua pois, trata-se de uma função racional.

Dado $P = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^{(4)}$, existem dois conjuntos de pontos associados a P, denominados respectivamente "positivos" e "negativos", a saber:

$$(+) \begin{cases} P = P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \quad P_2 = (x_3, x_1, x_2, x_4) \\ \quad P_3 = (x_2, x_3, x_1, x_4) \end{cases} \qquad (-) \begin{cases} N_1 = (x_1, x_3, x_2, x_4) \\ N_2 = (x_2, x_1, x_3, x_4) \\ N_3 = (x_3, x_2, x_1, x_4) \end{cases}$$

Teorema II. *Com relação aos pontos acima considerados temos:*

i) $[\alpha_1(P_i) - \alpha_1(P_j)] . [\alpha_1(N_m) - \alpha_1(N_n)] \neq 0$, *se* $i \neq j$ *e* $m \neq n$.

ii) *Pode ocorrer* $\alpha_1(P_i) = \alpha_1(N_j)$. *Neste caso os valores possíveis são* -1, $\frac{1}{2}$ *e* 2.

Demonstração:

i. Seja $\alpha_1(P_1) = r$. Pelo Teorema I (de Classificação), segue que

ii. $\alpha_1(P_2) = \dfrac{1}{1-r}$, $\alpha_1(P_3) = \dfrac{r-1}{r}$, $\alpha_1(N_1) = 1 - r$, $\alpha_1(N_2) = \dfrac{1}{r}$ e $\alpha_1(N_3) = \dfrac{r}{r-1}$. Logo, para $i \neq j$ e $m \neq n$, tem-se $[\alpha_1(P_i) - \alpha_1(P_j)] \cdot [\alpha_1(N_m) - \alpha_1(N_n)] = 0$ se, e somente se, $r^2 - r + 1 = 0$.

iii. Temos: $\alpha_1(P_1) = \alpha_1(N_1) \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(P_1) &= \alpha_1(N_2) \Leftrightarrow r = -1\\
\alpha_1(P_1) &= \alpha_1(N_3) \Leftrightarrow r = 2\\
\alpha_1(P_2) &= \alpha_1(N_1) \Leftrightarrow r = 2\\
\alpha_1(P_2) &= \alpha_1(N_2) \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\\
\alpha_1(P_2) &= \alpha_1(N_3) \Leftrightarrow r = -1\\
\alpha_1(P_3) &= \alpha_1(N_1) \Leftrightarrow r = -1\\
\alpha_1(P_3) &= \alpha_1(N_2) \Leftrightarrow r = 2\\
\alpha_1(P_3) &= \alpha_1(N_3) \Leftrightarrow r = 1.
\end{aligned}$$

Dado $P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sejam:
$[P_1] = f_1(r) = r$, $[P_2] = f_2(r)$, $[P_3] = f_3(r)$, $[N_1] = g_1(r)$, $[N_2] = g_2(r)$ e $[N_3] = g_3(r)$.

Corolário. *Com as notações acima tem-se:*

i. Dados $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, $f_i(r) - f_j(r) = 0$ e $g_i(r) - g_j(r) = 0$ não têm soluções reais.

ii. Dados $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, existe $r \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ tal que $f_i(r) - g_j(r) = 0$.

Sejam $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$: $R^{(4)} \to R$ definidas por:

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{\alpha_1(x)}$$
$$\alpha_3(x) = 1 - \alpha_1(x)$$
$$\alpha_4(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x) - 1}$$
$$\alpha_5(x) = \frac{1}{1 - \alpha_1(x)}$$
$$\alpha_6(x) = \frac{\alpha_1(x) - 1}{\alpha_1(x)}$$

Seja $\alpha : R^{(4)} \to R^6$ definida por $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x), \alpha_5(x), \alpha_6(x))$.

Como α_1 é de classe C^∞, α também é de classe C^∞.

Proposição. *O conjunto* $A = \{ x \in R^{(4)} \,/\, \alpha(x) \in R^{(6)} \}$ *é aberto em* $R^{(4)}$.

Teorema III. *Existe* $O \subset R^4$ *aberto e denso tal que:*

i. $\alpha(x) \in R^{(6)}$ *se, e somente se,* $x \in O \cap R^{(4)}$,
ii. $R^{(4)} - O$ *é um cone de "vértice" em 0 em* R^4.

Demonstração: Seja $x \in R^{(4)}$.

Temos que $\Pi[\alpha_i(x) - \alpha_j(x)] = 0$ para $i \neq j$, se e somente se, $p_{12}(x) . p_{13}(x) . p_{14}(x) = 0$,
onde:

- $p_{12}(x) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4,$
- $p_{13}(x) = x_1x_3 + x_2x_4 - x_2x_3 - x_1x_4$ e,
- $p_{14}(x) = -x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_1x_4 + 2x_2x_4 - 2x_1x_3$

Para tal, basta observarmos que, para $x \in R^{(4)}$ tem-se:

- $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) \Leftrightarrow \alpha_3(x) = \alpha_6(x) \Leftrightarrow \alpha_4(x) = \alpha_5(x) \Leftrightarrow p_{12}(x) = 0$;
- $\alpha_1(x) = \alpha_3(x) \Leftrightarrow \alpha_2(x) = \alpha_5(x) \Leftrightarrow \alpha_4(x) = \alpha_6(x) \Leftrightarrow p_{13}(x) = 0$;
- $\alpha_1(x) = \alpha_4(x) \Leftrightarrow \alpha_2(x) = \alpha_6(x) \Leftrightarrow \alpha_3(x) = \alpha_5(x) \Leftrightarrow p_{14}(x) = 0$ e,
- $\alpha_1(x) = \alpha_5(x) \Leftrightarrow \alpha_2(x) = \alpha_3(x) \Leftrightarrow \alpha_2(x) = \alpha_4(x) \Leftrightarrow \alpha_3(x) = \alpha_4(x) \Leftrightarrow \alpha_1(x) = \alpha_6(x) \Leftrightarrow p_{15}(x) = 0$, que não admite raiz em $R^{(4)}$, onde $p_{15}(x) = (x_4 - x_2)^2(x_3 - x_1)^2 - -...- (x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_3 - x_1) + (x_4 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2$.

Sejam agora $p = p_{12}\, p_{13}\, p_{14}$ e $B = \{ x \in R^4 \mid p(x) = 0\}$. Como $p(x)$ é um polinômio homogêneo de grau 6, segue que B é um cone de vértice 0 em R^4.

Segue que $O = R^4 - B$ é aberto e denso em R^4 e verifica (i) e (ii).

Observações: Como podemos observar, embora o enunciado do Teorema III não deixa claro, a técnica de sua demonstração mostra ser ele uma versão polinomial do Teorema II.

Corolário A. *Seja* $x \in R^{(4)}$.

Então, $\alpha(x) \notin R^{(6)}$ se, e somente se, $p(x) = 0$.

Corolário B. *Seja* $x \in B \cap R^{(4)}$.

Então:

$$\alpha(x) = (-1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2) = Q_{12} \text{ ou,}$$

$$\alpha(x) = (\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, -1, 2, -1) = Q_{13} \text{ ou,}$$

$$\alpha(x) = (2, \frac{1}{2}, -1, 2, -1, \frac{1}{2}) = Q_{14}.$$

Demonstração:

Se $\alpha_1(x) = -1$ então, $\alpha(x) = Q_{12}$.

Se $\alpha_1(x) = \dfrac{1}{2}$ então, $\alpha(x) = Q_{13}$.

Se $\alpha_1(x) = 2$ então, $\alpha(x) = Q_{14}$.

Logo,

$$\alpha^{-1}(Q_{12}) = \alpha_1^{-1}(-1) = p_{12}^{-1}(0) \cap R^{(4)},$$

$$\alpha^{-1}(Q_{13}) = \alpha_1^{-1}(\frac{1}{2}) = p_{13}^{-1}(0) \cap R^{(4)} \text{ e}$$

$$\alpha^{-1}(Q_{14}) = \alpha_1^{-1}(2) = p_{14}^{-1}(0) \cap R^{(4)}.$$

Observações:

Os Corolários A e B são mais conseqüências da técnica de demonstração do Teorema III do que dele propriamente dito.

SITTA, A. M., PEDROSO, H. A, TADINI, W. M. Cross-ratio: algebraic and topological approaches. *Rev. Mat. Estat.* v.20, p.67-77, 2002.

- *ABSTRACT: In this work we describe the topology of the cross-ratio. Given a point $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, where $x_i \neq x_j$, $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$, the cross-ratio may assume up to six different values according to the ordering. We present the topology and the density of the subset in R^4 such that their points satisfy the following property: they assume six values, distinct two-by-two.*

- *KEYWORDS: Cross-ratio, topology.*

Referências

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *Que es la matemática?* Tradução Luis B. Gala. 4.ed. Madrid: Aguilar, 1964. 533p.

EVES, H. *Estudio de las geometrias*. Tradução Susana B. de Siperstein. México: Uteha, 1969.v.1. 488p.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995. 843p.

KLEIN, F. *Elementary Mathematics from and advanced Standpoint*. New York: Dover, 1939. v. 2.

Recebido em 10.05.2000