

INFLUÊNCIA LOCAL NO MODELO ESTRUTURAL DE CALIBRAÇÃO COMPARATIVA

Olga Lidia Solano DÁVILA¹
Filidor Edilfonso Vilca LABRA²

- RESUMO: Neste trabalho fazemos um estudo de influência local no modelo estrutural de calibração comparativa baseado na parametrização de análise de fatores, proposta por Theobald & Mallison (1978), considerando três instrumentos ou métodos de medição. Supondo que as medições dos instrumentos são distribuídos de acordo com uma distribuição normal multivariada e considerando o método de influência local proposta por Cook (1986), apresentamos uma discussão sobre diagnóstico em influência local no modelo de calibração comparativa. Uma ilustração da metodologia é proposta com um conjunto de dados da literatura.
- PALAVRAS-CHAVE: influência, diagnóstico, afastamento pela verossimilhança, calibração comparativa.

Introdução

O objetivo de este trabalho é fazer um estudo influência local no modelo estrutural de calibração comparativa. O interesse deste modelo é comparar métodos ou instrumentos de medição da mesma quantidade desconhecida X em um grupo de n unidades experimentais, supondo que as medições dos instrumentos são distribuídos de acordo com uma distribuição normal multivariada.

1 Departamento de Matemática. Universidad Nacional Federico Villarreal. Calle San Marcos 351, Lima 21, Perú. E-mail: solano_olga@yahoo.com.br. Departamento de Estadística. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Av. Venezuela s/n. Lima 1 - Perú.

2 Departamento de Estatística. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Caixa Postal 6065, Campinas, SP, Brasil. E-mail: fily@ime.unicamp.br

Especificamente, vamos aplicar o método de influência local proposta por Cook (1986) no modelo de calibração comparativa para três instrumentos de medição, baseado na parametrização de análise de fatores considerada por Theobald & Mallison (1978).

Na literatura são poucos os trabalhos sobre influência no modelo com erros nas variáveis, em particular no modelo de calibração comparativa. Alguns trabalhos precursores em influência no modelo com erros nas variáveis foram desenvolvidos por Kelly (1984) que propõe um procedimento de diagnóstico baseado em uma função de influência; Tanaka, Watadoni & Moon (1991) usaram a função de influência de Hampel para desenvolver métodos na influência de uma observação individual em análise de estruturas de covariância. Abdullah (1995) apresenta vários métodos para detectar observações influentes no modelo de regressão funcional com erros nas variáveis. Mas essas medidas de diagnóstico avaliam o efeito dos parâmetros de regressão estimados, depois de excluir uma única observação do conjunto de dados.

Mais do que eliminar casos, Cook (1986) propõe um método geral para avaliar o efeito, sob o estimador de máxima verossimilhança, de pequenas perturbações no modelo estatístico ou nos dados. Resultados adicionais sob influência local e aplicações no modelo linear misto e de regressão podem ser encontrados em Beckman, Natchtsheim & Cook (1987), Lawrence (1988), Thomas & Cook (1990), Tsai & Wu (1992), Paula (1993), Galea-Rojas, Paula & Bolfarine (1997) e Lasafre & Verbeke (1998). Zhao & Lee (1996) utilizam o método de influência local em alguns modelos linear e não-linear.

Recentemente, Zhao & Lee (1998) e Kwan & Fung (1998) aplicaram o método de influência local em modelos de equações simultâneas e em análise de fatores, respectivamente.

Especificamente neste trabalho aplicamos o método de influência local no modelo de calibração comparativa considerando basicamente o esquema de perturbação de ponderação de casos.

Também pode-se considerar a perturbação na variável resposta, a qual esta associada com o problema de “leverage”, e isto é de interesse especial em calibração comparativa, porque para estimar o verdadeiro valor de x precisa-se das medições de Y_{ij} , já que $x_j = \frac{(y_{ij} - \alpha_i)}{\beta_i}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, n$, neste trabalho somente consideramos a perturbação de ponderação de casos.

Na seção 2 apresentamos o modelo de calibração comparativa para três instrumentos baseado no modelo proposto por Barnett (1969)

e Williams (1969) a qual é apresentado como o modelo estrutural de regressão de calibração e o modelo estrutural de calibração de análise de fatores, proposto por Theobald & Mallison (1978). Também apresentamos os estimadores de máxima verossimilhança sob a parametrização de análise de fatores. Utilizamos este modelo para achar a matriz observada e esperada de Fisher, as quais são apresentadas na seção 3 y 4, respectivamente. A estatística de Wald é proposta para testar hipóteses de interesse, isto é apresentado na seção 5. Na seção 6 revisamos o método de influência local proposta por Cook (1986). Na seção 7 apresentamos a formulação de influência local para o modelo de calibração de análise de fatores considerando o esquema de perturbação de ponderação de casos. Uma ilustração da metodologia é considerada com um conjunto de dados apresentados na literatura.

Modelo de calibração comparativa

Considere que temos à disposição p instrumentos de medição para medir uma característica x em um grupo de n unidades experimentais ou amostrais. Sejam x_j o valor verdadeiro da característica de interesse na unidade j e Y_{ij} a medida fornecida pelo instrumento i para a característica da unidade j - ésima, $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, n$. Um modelo comumente adotado (Barnett, 1969 e Theobald & Mallison, 1978) para este tipo de situações é definido pela relação linear

$$Y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_j + e_{ij}, \quad (2.1)$$

onde e_{ij} e x_j são independentes, $e_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2)$ e $x_j \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, n$. Os parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ estão associados aos vícios aditivos e β_1, \dots, β_p aos vícios multiplicativos das medidas dos instrumentos. Como é considerado na literatura, veja por exemplo, Barnett (1969) e Kimura (1992), vamos supor que $\alpha_1=0$ e $\beta_1=1$, isto é, o primeiro instrumento é considerado como o instrumento de referência, isto é requerido para que o modelo seja identificável.

Sob as condições do modelo de calibração comparativa em (2.1), $\theta = (\mu_x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma_x^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)^T$ não é identificável, isto é, existem θ_* e θ_{**} tais que $F(\mathbf{y}; \theta_*) = F(\mathbf{y}; \theta_{**})$, para todo \mathbf{y} , onde F é a distribuição de \mathbf{y}_j , $j=1, \dots, n$. Por exemplo, se $\theta_* = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T = \mathbf{1}_n^T$, e

$$\theta_{..} = (2, -2, -2, -2, 2, 2, 2, 2, 0.25, 1, 1, 1)^T, \quad \text{então} \quad E_{\theta_{..}}(\mathbf{Y}_j) = E_{\theta_{..}}(\mathbf{Y}_j) = (2, 2, 2)^T \quad e$$

$$Var_{\theta_{..}}(\mathbf{Y}_j) = Var_{\theta_{..}}(\mathbf{Y}_j) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A falta de identificabilidade implica ausência de estimadores consistentes, o que tem sérias implicações na teoria assintótica de estimação e testes de hipóteses. Uma das formas de contornar o problema de identificabilidade é colocar restrições sobre o parâmetro θ , é por isso que Barnett (1969) considera $\alpha_j=0$ e $\beta_j=1$.

Sob o modelo estrutural, supondo que as medições dos instrumentos são distribuídos de acordo com uma distribuição normal multivariada, com $p=3$, Barnett (1969) consegue estimativas de máxima verossimilhança explícitas para os parâmetros do modelo. Para $p>3$, os estimadores de máxima verossimilhança não têm uma forma explícita, mas podem ser encontrados utilizando métodos iterativos, como por exemplo em Bolfarine & Galea (1995b), onde é usado o algoritmo EM para encontrar estes estimadores.

Sob a parametrização de análise de fatores introduzida por Theobald & Mallison (1978), o modelo definido em (2.1), e considerando as condições de identificabilidade propostas por Barnett (1969), pode ser matricialmente escrito como

$$\mathbf{Y}_j = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}F_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\mathbf{v}_j, \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{3j})^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_j = (e_{1j}, \dots, e_{3j}), \quad \mathbf{v}_j = (F_j, \boldsymbol{\varepsilon}_j^T)^T, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mu_x,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \sigma_z \mathbf{b}, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{b}, I_3], \quad \text{com } \mathbf{a} = (0, \alpha_2, \alpha_3)^T \text{ e } \mathbf{b} = (1, \beta_2, \beta_3)^T, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sob normalidade $\mathbf{Y}_j \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, onde μ é escrito como em (2.2) e

$$\Sigma = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T + D(\boldsymbol{\varphi}), \quad \text{com } D(\boldsymbol{\varphi}) = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2), \quad \boldsymbol{\varphi} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)^T.$$

Seja o parâmetro de interesse $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\varphi}^T)^T$. Então o estimador de máxima verossimilhança é $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}^T, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T, \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T)^T$. São dados por $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{Y}}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)^T$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2)^T$,

com

$$\hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}, \quad \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_1 \frac{S_{23}}{S_{13}}, \quad \hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}_1 \frac{S_{23}}{S_{12}}, \quad \hat{\sigma}_i^2 = S_{ii} - \hat{\lambda}_i^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde \bar{Y} é a média amostral dos Y_j e S_{ij} são os elementos da matriz de covariância amostral.

Note que o estimador de σ_i^2 pode assumir valores negativos. Este problema pode ser contornado pelo estimador baseado na verossimilhança irrestrita proposta por Carter (1981).

A matriz de informação observada de Fisher

Seja $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\varphi}^T)^T$ o parâmetro de interesse para o modelo estrutural. De (2.2) a função de log-verossimilhança para o modelo é da forma

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n l_j(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.1)$$

onde

$$l_j(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{3}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|\Sigma| - \frac{1}{2} \|T_j\|^2,$$

com

$$\begin{aligned} \|T_j\|^2 &= (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu}), & |\Sigma| &= c|D(\boldsymbol{\varphi})|, & \Sigma^{-1} &= D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) - c^{-1}\mathbf{M} \\ e \\ c &= 1 + \boldsymbol{\lambda}^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\lambda}, & \mathbf{M} &= D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}), & j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A matriz de derivadas de segunda ordem com respeito a $\boldsymbol{\theta}$ é dada na forma triangular por

$$I_F(\boldsymbol{\theta}) = -\ddot{L} = -\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\begin{pmatrix} L_{\mu\mu} & L_{\mu\lambda} & L_{\mu\phi} \\ & L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda\phi} \\ \text{simetria} & & L_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$. Os elementos da matriz são apresentados no apêndice A.

A matriz de informação esperada de Fisher

A obtenção da matriz de informação esperada é muito importante para tratar hipóteses de interesse, por exemplo, se estamos interessados em testar se os três instrumentos medem a característica x sem vício e com a mesma confiabilidade, ou testar se os instrumentos medem x sem vício ou se os instrumentos são igualmente confiáveis.

A matriz de informação esperada que denotamos por $\mathbf{J}_F(\boldsymbol{\theta})$, é definida como sendo

$$J_F(\boldsymbol{\theta}) = E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}\right) = \begin{pmatrix} J_{\mu\mu} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda\lambda} & J_{\lambda\phi} \\ 0 & J_{\phi\lambda} & J_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} J_{\mu\mu} &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1}, \\ J_{\lambda\lambda} &= (1-c^{-1})D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) + c^{-1}(2c^{-1}-1)\mathbf{M}, \\ J_{\lambda\phi} &= c^{-1}D(\boldsymbol{\lambda})D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) - c^{-2}\mathbf{M}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})D(\boldsymbol{\lambda}), \\ J_{\phi\lambda} &= (J_{\lambda\phi})^T \quad \text{e} \\ J_{\phi\phi} &= \frac{D^{-2}(\boldsymbol{\varphi})}{2} - c^{-1}D^2(\boldsymbol{\lambda})D^{-3}(\boldsymbol{\varphi}) + \frac{c^{-2}}{2}D(\boldsymbol{\lambda})D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{M}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})D(\boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

A definição da confiabilidade do i -ésimo instrumento, sob o modelo(2.2), é dado por $\rho_i = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \sigma_i^2}$, $i=1,2,3$.

Seja $\theta_* = (\mu^T, \lambda^T, \rho^T)^T$, onde $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^T$, (que é função de λ e ϕ). Então pelo princípio da invariância do estimador de máxima verossimilhança, EMV, o EMV de θ_* é dado por $\hat{\theta}_* = (\hat{\mu}^T, \hat{\lambda}^T, \hat{\rho}^T)^T$, onde $\hat{\mu}$, $\hat{\lambda}$ e $\hat{\rho}$ são definidos na seção 2.

Com o objetivo de testar se os instrumentos medem a característica sem vício e com a mesma confiabilidade, vamos a apresentar a distribuição assintótica de $\hat{\theta}_*$.

Teorema 1

Sob o modelo de calibração definido em (2.2), temos que

- a) $\hat{\theta}_*$ é um estimador consistente de θ_* e
 b) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_* - \theta_*) \rightarrow N_9(\mathbf{0}, \Omega(\theta_*))$, onde $\Omega(\theta_*) = \mathbf{G}\mathbf{J}_F^{-1}\mathbf{G}^T$, (4.2)

com
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = 2D^{-1}(\lambda)D(\rho)[\mathbf{I}_3 - D(\rho)] \quad e$$

$$\mathbf{G}_2 = -D^{-2}(\lambda)D^2(\rho).$$

Corolário 1

Sob o modelo de calibração definido em (2.2).

$$\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{D} N_3(\mathbf{0}, \mathbf{Q}\mathbf{J}_F^{-1}(\theta)\mathbf{Q}^T), \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{Q} = (\mathbf{0}, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$, com \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 como no Teorema 1.

Testes de Hipóteses

Nesta seção apresentamos testes assintóticos de interesse. Para testar se os instrumentos medem a característica sem vício e com a mesma confiabilidade, a hipótese é

$$H_{01} : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \rho_1 = \rho_2 = \rho_3.$$

Note que, H_{01} pode ser escrita como

$$H_{01} : \mathbf{C}\boldsymbol{\theta}_* = \mathbf{q}_0,$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz de dimensão } 6 \times 9 \text{ de posto } 6, \text{ com}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

e $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ vetor nulo de dimensão 6. Logo, a estatística de Wald para testar H_{01} , denotada por W_{01} , é dada por

$$W_{01} = n(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}}_* - \mathbf{q}_0)^T (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\theta}_*)\mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}}_* - \mathbf{q}_0),$$

que converge em distribuição a uma variável aleatória $\chi^2_{(6)}$ sob H_{01} ; quando $n \rightarrow \infty$, $\hat{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\theta}_*)$ é uma matriz dada em (4.2) avaliada no EMV de $\boldsymbol{\theta}_*$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_*$. Portanto, H_{01} é rejeitada ao nível α se $W_{01} > \chi^2_{1-\alpha}(6)$, onde $\chi^2_{1-\alpha}(6)$ denota o percentil do $100(1-\alpha)\%$ da distribuição $\chi^2(6)$.

Para testar se os instrumentos medem sem vício, a hipótese é

$$H_{02} : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Note que, H_{02} pode ser escrita como

$$H_{02} : \mathbf{C}\boldsymbol{\theta}_* = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ é uma matriz de dimensão 4×9 de posto 4 com \mathbf{C}_1 como em (5.1) e $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ um vetor nulo de dimensão 4.

Assim, a estatística de Wald para testar H_{02} , denotada por W_{02} , é dada por

$$W_{02} = n(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}}_*)^T (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\theta}_*)\mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}}_*), \quad (5.2)$$

que converge em distribuição a uma variável aleatória $\chi_{(4)}^2$ sob H_{02} .

Portanto, H_{02} é rejeitada ao nível α se $W_{02} > \chi_{(1-\alpha)}^2(4)$, onde $\chi_{1-\alpha}^2(4)$ denota o percentil do $100(1-\alpha)\%$ da distribuição $\chi_{(4)}^2$.

Finalmente, para testar se os instrumentos são igualmente confiáveis, a hipótese de interesse é

$$H_{03} : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \quad \text{ou} \quad H_{03} : \mathbf{C}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0},$$

\mathbf{C}_1 como em (5.1). Assim, a estatística de Wald para testar H_{03} , que denotamos por W_{03} , é obtida do corolário 1 e é dada por

$$W_{03} = n(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\rho})^T (\mathbf{C}_1\mathbf{Q}\mathbf{J}_F^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{Q}^T\mathbf{C}_1^T)^{-1} (\mathbf{C}_1\boldsymbol{\rho}),$$

que converge em distribuição a uma variável aleatória χ_2^2 sob H_{03} .

Portanto, H_{03} é rejeitada a um nível α se $W_{03} > \chi_{1-\alpha}^2(2)$, onde $\chi_{1-\alpha}^2(2)$ denota o percentil do $100(1-\alpha)\%$ da distribuição $\chi^2(2)$.

Embora o estudo apresentado anteriormente tenha sido desenvolvido sob a parametrização de análise de fatores, aplicando o método delta podem ser obtidos resultados baseados na parametrização original em função dos parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, e $\boldsymbol{\varphi}$.

Influência local

Cook (1986) propõe o estudo do efeito de uma perturbação das componentes do modelo utilizando a função de afastamento pela verossimilhança do modelo estatístico. A perturbação das q componentes do modelo é considerada como um vetor \mathbf{w} de dimensão $qx1$ em um espaço de perturbações $\Omega \subset R$. Sejam $L(\boldsymbol{\theta})$ e $L(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{w})$ as funções de log-verossimilhança correspondentes ao

modelo postulado e perturbado, respectivamente. Assume-se que $\mathbf{w}_o \in \Omega$ tal que $L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{w}_o)$. Sejam $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_w$ os estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$, sob $L(\boldsymbol{\theta})$ e $L(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{w})$, respectivamente. Cook (1986) sugere que a avaliação da perturbação sob os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser estudada usando o afastamento pela verossimilhança, na forma

$$LD(\mathbf{w}) = 2[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_w)] \quad (6.1)$$

A idéia de influência local proposta por Cook (1986) consiste em investigar o comportamento de $LD(\mathbf{w})$ em uma vizinhança de \mathbf{w}_o . O procedimento consiste em escolher uma direção unitária \mathbf{d} , $\|\mathbf{d}\| = 1$, e assim considerar o gráfico de $LD(\mathbf{w}_o + t\mathbf{d})$ e t , com $t \in \mathbb{R}$. Este gráfico é chamado linha levantada “lifted line”. Cada linha pode ser investigada considerando a curvatura normal c_d (esta curvatura normal é considerada da superfície: $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{w}^T, LD(\mathbf{w}))^T$) em uma vizinhança de $t = 0$. Sugere-se considerar a direção \mathbf{d}_{max} correspondente à maior curvatura $C_{d_{max}}$. Um gráfico de \mathbf{d}_{max} vs a ordem das observações pode revelar quais são os casos que exercem maior influência sobre as estimativas dos parâmetros. Cook (1986) mostra que a curvatura normal na direção \mathbf{d} é dada por

$$C_d = 2 \left\| \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Delta}^T \ddot{\mathbf{L}}^{-1} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{d} \right\|, \quad (6.2)$$

onde

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{w})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{w}^T} \text{ e } \ddot{\mathbf{L}} = -\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}.$$

Ambas são avaliadas em $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_o$.

Aqui, $C_{d_{max}}$ é o maior autovalor da matriz $\boldsymbol{\Delta}^T \ddot{\mathbf{L}}^{-1} \boldsymbol{\Delta}$ e \mathbf{d}_{max} é o autovetor correspondente. Neste caso, a curvatura normal, chamada influência local total do individuo i , é dada por

$$C_i = 2 \left\| \Delta_i^T \ddot{L}^{-1} \Delta_i \right\|$$

Utilizamos \mathbf{d}_{max} e C_i como diagnóstico em influência local.

Quando um subconjunto da partição $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T)^T$ é de interesse, a curvatura na direção \mathbf{d} é dada por

$$C_d = 2 \left\| \mathbf{d}^T \Delta^T (\ddot{L}^{-1} - \mathbf{B}_{22}) \Delta \mathbf{d} \right\|, \quad (6.3)$$

onde

$$\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ddot{L}_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

e \ddot{L}_{22} é determinada pela partição de \ddot{L} de acordo com a partição de $\boldsymbol{\theta}$.

A influência local total do i -ésimo indivíduo é dado por

$$C_i = 2 \left| \Delta_i^T (\ddot{L}^{-1} - \mathbf{B}_{22}) \Delta_i \right|,$$

onde \mathbf{B}_{22} é considerado como em (6.3).

Derivação da curvatura para o modelo de calibração comparativa

Nesta seção derivamos a matriz Δ para perturbação de ponderação de casos no caso do modelo de calibração comparativa apresentado em (2.2).

Perturbação de ponderação de casos

Considerando o vetor de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$. A função de verossimilhança do modelo perturbado é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta} / \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^n w_j l_j(\boldsymbol{\theta}), \quad (7.1)$$

onde $l_j(\boldsymbol{\theta})$ é como em (3.1), com $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\varphi}^T)^T$. O vetor de não perturbação é denotado por $\mathbf{W}_0 = \mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^T$.

Seja

$$\boldsymbol{\Delta} = [\Delta_{1\theta}, \dots, \Delta_{n\theta}]_{9 \times n}, \quad (7.2)$$

onde

$$\Delta_j = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |\Sigma|}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \|T_j\|^2}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim, $\Delta_{j\mu}$, $\Delta_{j\lambda}$, $\Delta_{j\phi}$ dependem das derivadas do log com respeito a $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\phi}$, respectivamente. Estas derivadas são:

$$\begin{aligned} \Delta_{j\mu} &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{W}_j, \\ \Delta_{j\lambda} &= -c^{-1} [D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\lambda} - c^{-1} \mathbf{W}_j^T \mathbf{M} \mathbf{W}_j D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\lambda} + D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{W}_j \mathbf{W}_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\lambda}] \\ \Delta_{j\phi} &= -\frac{1}{2} \left[-c^{-1} D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda} + D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{1} - D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) D(\mathbf{W}_j) \mathbf{W}_j \right. \\ &\quad \left. - c^{-2} \mathbf{W}_j^T \mathbf{M} \mathbf{W}_j D(\boldsymbol{\lambda}) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\lambda} + 2c^{-1} D(\boldsymbol{\lambda}) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{W}_j \mathbf{W}_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\lambda} \right], \end{aligned}$$

onde

$\mathbf{W}_j = (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu})$, $D(\boldsymbol{\lambda}) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $D^{-k}(\boldsymbol{\varphi}) = \text{diag}(\phi_1^{-k}, \phi_2^{-k}, \phi_3^{-k})$ $k = 1, 2$, e as derivadas são avaliadas em $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}^T, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T, \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T)^T$ e $\mathbf{W}_0 = (1, \dots, 1)^T$. Observamos que, para esse esquema de perturbação, a matriz $\boldsymbol{\Delta}$ não depende do vetor \mathbf{W} . O vetor \mathbf{d}_{max} é então obtido, é o autovetor normalizado correspondente ao maior autovalor da matriz $\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Delta}$. Um gráfico de $|\mathbf{d}_{max}|$ versus a ordem das observações pode revelar quais são os casos que exercem mais influência sobre as estimativas dos parâmetros.

Análise do conjunto de dados do volume testicular

Nesta seção analisamos um conjunto de dados reais. Chipkevitch, Nishimura, Tu & Galea-Rojas (1996) analisaram a medição do volume testicular de 42 adolescentes a qual foi realizada em uma certa sequência usando cinco diferentes técnicas. Aqui consideraremos somente três delas: ultra-som (US), método gráfico proposto pelos autores (I) e método de medidas dimensionais (II). Por ser um método conhecido e comumente usado, adotaremos o ultra-som como sendo o método de referência.

Baseada no modelo de calibração comparativa por Theobald & Mallison (1978), será desenvolvida a aplicação do método de influência local apresentado na seção 6 e consideraremos a perturbação de ponderação de casos. Primeiro observaremos que os adolescentes têm um grande impacto sobre as estimativas dos parâmetros medidos por C_i . A Figura 1 mostra um gráfico de influência local total C_i . Desde que $\sum_{i=1}^{42} C_i = 1904,50$,

nossa regra (valor de corte = $\sum_{i=1}^{42} \frac{C_i}{42} = 181,38$) sugere que um indivíduo pode

ser considerado influente se C_i excede a 181,38. Dois indivíduos têm um valor de C_i que excede 181,38, são os adolescentes 31 e 38. Agora observaremos que parte dos parâmetros é afetada por estes indivíduos; os valores de corte para $C_i(\mu, \lambda)$ e $C_i(\varphi)$ são 180,40 e 1,27, respectivamente. A Figura 2 mostra que os indivíduos 31 e 38 têm um impacto local maior nas estimativas dos parâmetros (μ, λ) e (φ) . Como uma alternativa para complementar a análise de influência, pode-se usar o método de influência local baseado no afastamento pela verossimilhança, que é de muita utilidade quando existe o fenômeno de mascaramento (quando uma observação influente no modelo é considerada como uma observação não influente). Na figura 3 pode-se observar que, para o conjunto de dados considerados, ambas as aproximações produzem as mesmas observações influentes, os adolescentes 31 e 38. Porém o método do afastamento pela verossimilhança, além das observações 31 e 38, considera como influentes os indivíduos 11, 13 e 22 (ver figura 4). A figura 5 mostra um diagnóstico extra onde dois pontos, correspondendo aos adolescentes 31 e 38, se destacam do resto. A Figura 6 mostra um diagrama de dispersão sobre os dois primeiros vetores da direção \mathbf{d} baseado no afastamento pela verossimilhança, descrito na Seção 6. As observações 31 e 38 se destacam na primeira direção do vetor e as

observações 11, 22 e 13 têm uma direção absoluta maior na segunda direção do vetor.

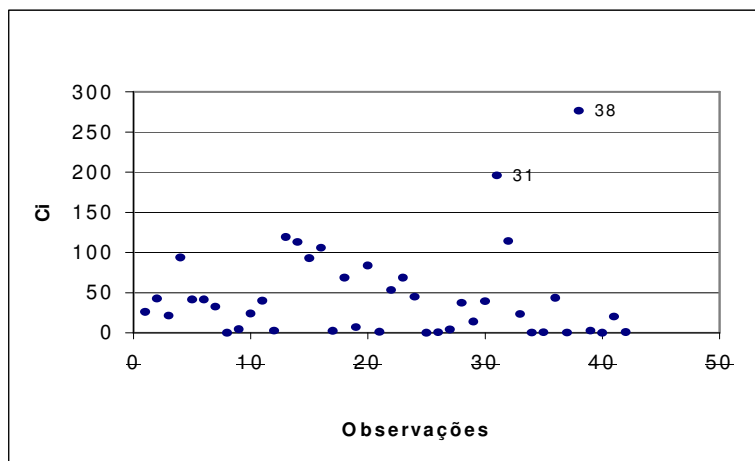


FIGURA 1 – Curvatura local total vs observações.

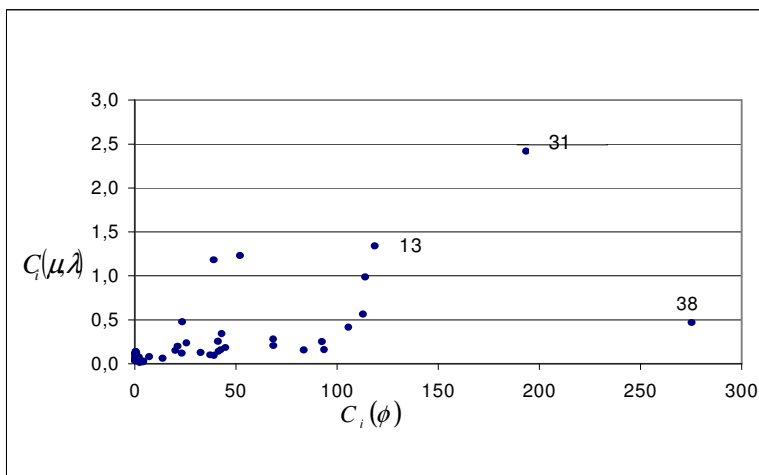


FIGURA 2 – Influência local de (μ, λ) - específico $C_i(\mu, \lambda)$ vs Influência local de ϕ -específico $C_i(\phi)$

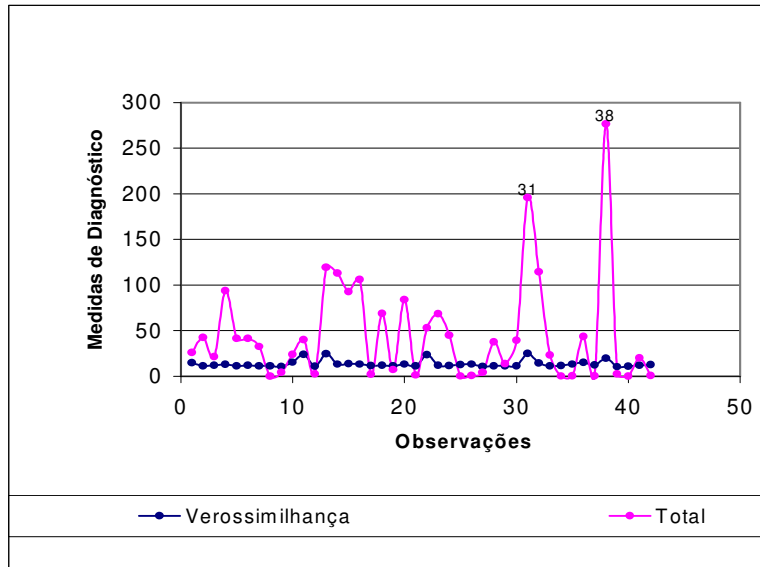


FIGURA 3 – Comparação do afastamento pela verossimilhança vs a curvatura local total.

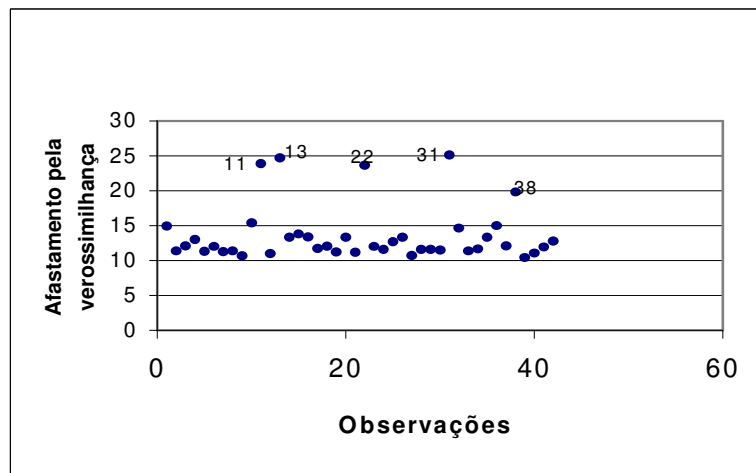


FIGURA 4 – Afastamento pela verossimilhança vs observações.

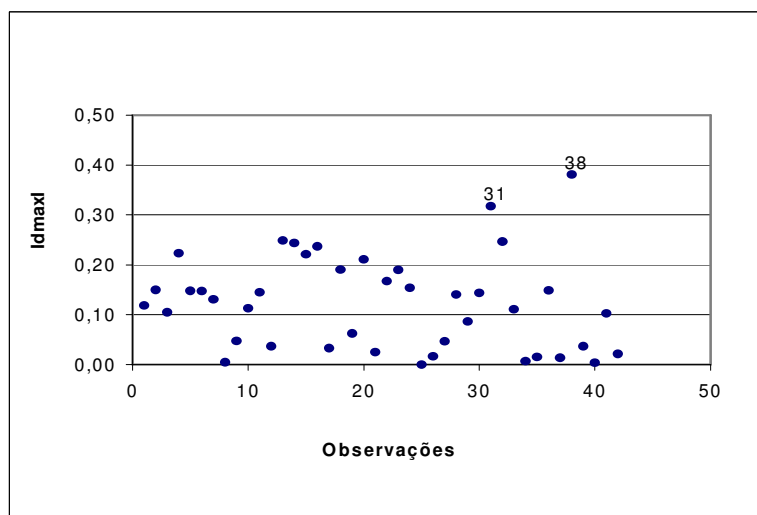


FIGURA 5 – $|d_{max}|$ vs observações.

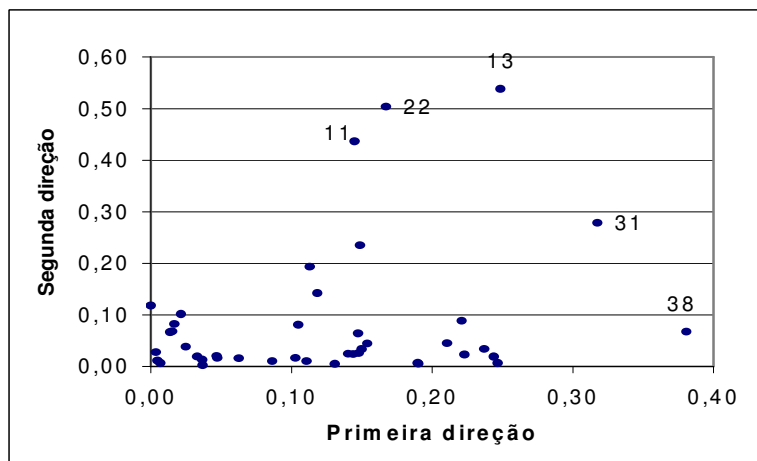


FIGURA 6 – Diagrama de dispersão da primeira e segunda direção.

No trabalho de Solano (2000) detectou-se possíveis “outliers” utilizando a distância de Mahalanobis (Johnson & Wichern, 1998: p.203); a análise revelou como “outliers” multivariados as medições dos testículos dos adolescentes 11, 13, 22, 31 e 38, o que coincide com as observações influentes detectadas aqui.

Para testar $H_{01} : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \rho_1 = \rho_2 = \rho_3,$

usamos $\hat{\Omega}(\theta_*)$ e a estatística de Wald como consideramos na seção 5. Para $n = 42$, temos $W_{01} = 30,997$, comparando com a $\chi_{95\%}^2(6) = 12,59$, se rejeita a hipótese nula, ao nível de 5%, isto é os métodos são viciados, ou seja medem com vício o volume do testículo direito ou não são igualmente confiáveis. Por outro lado, a hipótese $H_{03} : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ não é rejeitada, já que $W_{03} = 0,655$ e $\chi_{95\%}^2(2) = 5,99$, isto é, os métodos são igualmente confiáveis.

Comentários finais

O objetivo de nosso trabalho é fazer um estudo de influência local no modelo estrutural de calibração comparativa, considerando $p = 3$ instrumentos de medição. Para detectar indivíduos influentes fizemos uma avaliação de diagnóstico de C_i . Isto ajuda a ter uma idéia sobre quais indivíduos influentes distorcem a estimação do processo. Posteriormente fizemos uma comparação deste método de diagnóstico com o método de afastamento pela verossimilhança, que é muito útil quando temos o problema de mascaramento. E por último consideramos a análise de \mathbf{d}_{max} . No exemplo apresentado aqui mostramos que o método de influência local fornece informação valiosa acerca de possíveis candidatos em observações influentes. Utilizamos o Matlab para fazer os cálculos da matriz de informação esperada, $\hat{\Omega}(\theta_*)$, \mathbf{d}_{max} e para obter W_{01} e W_{03} .

DÁVILA, O L. S., LABRA, F. E. V. Local influence in structural comparative calibration model. *Rev. Mat. Estat. (São Paulo)*, v.20, p.103-123, 2002.

- **ABSTRACT:** *In this paper, we consider a study on local influence for the structural comparative calibration model using the factor analysis presented in Theobald and Mallison (1978), when considering three measuring devices. Assuming that measuring devices are distributed according to the multivariate normal distribution and considering the local influence approach proposed by Cook (1986), we present a discussion on diagnostic through local influence in comparative the calibration model. An ilustration of the methodology is proposed with a data set taken from the literature.*
- **KEYWORDS:** *Influence, diagnostic, likelihood displacement, comparative calibration.*

Referências

ABDULLAH, M. B. Detection of influential observations in functional errors-in-variables model. *Commun. Stat. Theory Meth.*, v.24, n.6, p.1585-1595, 1995.

BARNETT, V. D. Simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biometrics*, v.25, p.129-142, 1969.

BECKMAN, R.J.; NATCHTSHEIM, C. J.; COOK, R. D. Diagnostics for mixed-model analysis of variance. *Technometrics*, v.29, n.4, p. 413-426, 1987.

BOLFARINE, H.; GALEA-ROJAS, M. Maximum likelihood estimation of simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biom. J.*, v.37, p. 673-689, 1995b.

CARTER, R. Restricted maximum likelihood estimation of several bias and reliability in the comparison measuring methods. *Biometrics*, v.37, p. 733-741, 1981.

CHIPKEVITCH, E.; NISHIMURA, R. T., TU, D.G.S.; GALEA-ROJAS, M. Clinical measurement of testicular volume in adolescents: Comparison of the reliability of 5 methods. *J. Urol.*, v.156, n.6, p.2050-2053, 1996.

- GALEA_ROJAS, M.; PAULA, G. A.; BOLFARINE, H. Local influence in elliptical linear regression models. *Statistician*, v.46, p. 71-79, 1997.
- GRAYBILL, F.A. *Matrices with applications in statistics*. 2nd. ed. California: Wadsworth. 1983. 461p.
- JONHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. *Applied multivariate statistical analysis*. 4th.ed. New Jersey : Prentice Hall, 1998. 642p.
- KELLY, G. The influence function in the errors in variables problem. *Ann. Stat.*, v.12, p.87-100, 1984.
- KIMURA, D.K. Functional comparative calibration using an EM algorithm. *Biometrics*, v. 48, p.1263-1271, 1992.
- KWAN, C. W.; FUNG, W. K. Assessing local influence for specific restricted likelihood: Application to fator analysis. *Psychometrika*, v.63, n.1, p.35-46, 1998.
- LASAFRE, E.; VERBEKE, G. Local influence in linear mixed models. *Biometrics*, v.54, p.570-582, 1998.
- LAWRENCE, A. J. Regression transformation diagnostic using local influence. *J. Am. Stat. Assoc.*, v.83, p.1067-1072, 1988.
- PAULA, G. A. Assessing local influence in restricted regressions models. *Comput. Stat. Data Anal.*, v. 16, p. 63-79, 1993.
- SEN, P.K.; SINGER, J. M. *Large sample methods in statistics: an introduction with applications*. New York : Chapman y Hall, 1993. 382p.
- SOLANO, O. *Influência local em modelos de calibração comparativa*. 2000. 168f. Tese (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- TANAKA, Y.; WATADANI, S.; MOON, S. H. Influence in covariance structure analysis with an application to confirmatory factor analysis. *Commun. Stat. Theory Meth.*, v.20, n.12, p.3805-3821, 1991.
- THEOBALD, C.M.; MALLISON, J.R. Comparative calibration, linear structural relationship and congeneric measurements. *Biometrics*, v.34, p.39-45, 1978.
- THOMAS, W.; COOK, R.D. Assesing influence on predictions from generalized linear models. *Technometrics*, v.32, n.1, p.59-65, 1990.
- TSAI, C. L.; WU, X. Transformation-model diagnostics. *Technometrics*, v. 34, p.197-202, 1992.

WILLIAMS, E. J. Regression methods in calibration problems. *Bull. Int. Stat. Inst.*, v. 43, p.17-28, 1969.

ZHAO, Y.; LEE, H. Assessing local influence in measurement error models. *Biometrika*, v.38, n.7, p.829-841, 1996.

ZHAO, Y.; LEE, H. *Influence diagnostics for simultaneous equations models*. Australian Statistical Publishing Association, 1998, p. 345-357.

Recebido em 15.01.2002

Apêndice A

Nesta apêndice apresentamos os elementos da matriz de informação observada de Fisher.

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\mu} &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{-1} \\
 L_{\mu\lambda} &= -\sum_{j=1}^n c^{-1} \left\{ D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \lambda W_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) + \lambda^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) W_j \left[\Sigma^{-1} - C^{-1} M \right] \right\} \\
 L_{\mu\phi} &= \sum_{j=1}^n \left\{ -D(W_j) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) - c^{-2} M W_j \lambda^T D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) + c^{-1} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \lambda W_j^T D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) \right. \\
 &\quad \left. + c^{-1} D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) \lambda^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) W_j \right\} \\
 L_{\lambda\lambda} &= -\sum_{j=1}^n \left\{ c^{-1} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - c^{-1} M) + c^{-1} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) W_j W_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) - 2c^{-2} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) W_j W_j^T M \right. \\
 &\quad \left. - c^{-2} W_j^T M W_j (D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) - c^{-1} M - 3c^{-1} M) - 2c^{-2} M W_j W_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \right\} \\
 L_{\lambda\phi} &= \sum_{j=1}^n \left\{ c^{-1} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - 2c^{-3} W_j^T M W_j M D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) + 2c^{-2} M W_j W_j^T D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) \right. \\
 &\quad \left. + c^{-2} W_j^T M W_j D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) + c^{-2} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) W_j W_j^T M D(\lambda) D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \right. \\
 &\quad \left. - c^{-1} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) W_j W_j^T D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) - c^{-1} W_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \lambda D(W_j) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) \right\} \\
 L_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ -D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) + 2c^{-1} D^{-3}(\boldsymbol{\varphi}) D^2(\lambda) - c^{-2} D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) M D(\lambda) D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \right. \\
 &\quad \left. + 2D(W_j) D^{-3}(\boldsymbol{\varphi}) D(W_j) - 2c^{-3} W_j^T M W_j D(\lambda) D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) M D(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) \right. \\
 &\quad \left. + 2c^{-2} D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) W_j W_j^2 M D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) + 2c^{-2} W_j^T M W_j D(\lambda) D^{-3}(\boldsymbol{\varphi}) D(\lambda) \right. \\
 &\quad \left. + 2c^{-2} D(\lambda) D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) M W_j W_j^T D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) - 2c^{-1} D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) W_j W_j^T D(\lambda) D^{-2}(\boldsymbol{\varphi}) \right. \\
 &\quad \left. - 4c^{-1} D^{-3}(\boldsymbol{\varphi}) D(\boldsymbol{\varphi}) W_j^T D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \lambda D(W_j) \right\}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 W_j &= (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu}), \quad D(\lambda) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad D^{-k}(\boldsymbol{\varphi}) = \text{diag}(\phi_1^{-k}, \phi_2^{-k}, \phi_3^{-k}), \\
 k &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$