

# ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DOS ESTIMADORES DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL NA PRESENÇA DE DADOS SUJEITOS A CENSURA ALEATÓRIA

Almir MANTOVANI<sup>1</sup>

Maria Aparecida de Paiva FRANCO<sup>2</sup>

- RESUMO: O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo sobre a distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da Weibull na presença de dados censurados utilizando simulação. Especificamente considerou-se o caso em que a inferência sobre os parâmetros é feita a partir da observação de uma amostra de tamanho  $n$  de  $(X, \delta)$  onde  $X = \min(T, C)$ , sendo que  $T$  tem distribuição de Weibull com parâmetros  $p$  e  $\lambda$ ,  $C$  é uma variável aleatória independente de  $T$  com distribuição Uniforme em  $(0, c)$ , e  $\delta$  é uma indicadora do evento  $(X=T)$ . Foram simuladas 1.000 amostras de  $(X, \delta)$  para cada um dos seguintes tamanhos de amostra: 10, 20 e 50, para diversos valores de  $c$  e diferentes porcentagens esperadas de censura. Os resultados apontam para a validade da aproximação assintótica normal para as distribuições marginais dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da Weibull na presença de censura.
- PALAVRAS-CHAVE: Análise de sobrevivência; censuras; distribuição assintótica; máxima verossimilhança; simulação; Weibull.

## 1 Introdução

Na ausência de censura e sob condições de regularidade sobre a função densidade de probabilidade  $f(t, \theta)$  de uma variável aleatória  $T$ , os estimadores de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros  $\theta$  a partir de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de  $T$ , têm uma distribuição assintótica conjunta normal multivariada com vetor de médias igual ao vetor de parâmetros e com matriz de covariância igual à inversa da matriz de Informação de Fisher (Cordeiro, 1992, Leite e Singer, 1990). Quando  $T$  tem distribuição de Weibull com dois parâmetros estas condições são satisfeitas (Kotz e Johnson, 1988, p.551). No entanto, o mesmo não ocorre com a distribuição de Weibull com três parâmetros (Johnson e Kotz, 1970, p.256).

É prática usual na literatura de Análise de Sobrevivência (Kalbfleisch e Prentice, 1980, Lawless, 1982) usar o Teorema sobre a distribuição assintótica dos estimadores de

---

<sup>1</sup>Departamento de Educação, Ciências Sociais e Política Internacional; Faculdade de História, Direito e Serviço Social; Universidade Estadual Paulista - UNESP, CEP14400-690, Franca, SP, Brasil. E-mail: [almir@franca.unesp.br](mailto:almir@franca.unesp.br)

<sup>2</sup>Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, CEP 13565-905, São Carlos, SP, Brasil.

máxima verossimilhança deduzido sob condições de regularidade da distribuição de  $T$ , mesmo no caso em que os estimadores são obtidos a partir de observações possivelmente censuradas de  $T$ . O objetivo deste trabalho é fazer um estudo por simulação da validade de tal procedimento no caso em que  $T$  tem distribuição de Weibull com dois parâmetros, e as observações são sujeitas à censura tipo  $I$  por uma variável  $C$  com distribuição Uniforme.

Foram escolhidos diversos tamanhos de amostras e diversos valores para os parâmetros da Weibull. Para avaliar o efeito da porcentagem de observações censuradas na amostra sobre propriedades destes estimadores, foram calculados os valores do parâmetro  $c$  da distribuição Uniforme em  $(0, c)$  que propiciam determinadas porcentagens esperadas de valores censurados.

Na seção 2 deste trabalho, é apresentada a parametrização usada para representar a distribuição de Weibull e a expressão da função de verossimilhança para os parâmetros da Weibull, a partir de amostras de tamanho  $n$ , sujeitas à censura por uma variável aleatória independente  $C$ . Ainda nesta seção, é apresentado o desenvolvimento feito aqui para calcular  $P(T > C)$ , isto é, a probabilidade de se obter um valor censurado, como função dos parâmetros da Weibull e da Uniforme, quando  $T$  e  $C$  são independentes. Os valores escolhidos dos parâmetros das distribuições de Weibull e Uniforme para o estudo por simulação estão na Tabela 1.

Na seção 3, estão descritos os procedimentos realizados para o estudo por simulação da estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança, no caso de distribuições de Weibull com dados censurados. Na seção 4, são apresentados os resultados relativos ao estudo empírico das propriedades dos estimadores de Máxima Verossimilhança. Na seção 5 encontra-se a Conclusão seguida do Abstract e das Referências.

## 2 Estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull por máxima verossimilhança

Se a distribuição do tempo de vida  $T$  pertence à família Weibull com parâmetro de forma  $p$  e de escala  $\lambda$ , as funções densidade de probabilidade, de sobrevivência e de risco são dadas respectivamente por (2.1), (2.2) e (2.3), (Lee, 1992, Miller, 1981).

$$f_T(t) = p \left( \frac{1}{\lambda} \right)^p t^{p-1} \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\lambda} \right)^p \right\} \quad t \geq 0, \lambda, p > 0 \quad (2.1)$$

$$S_T(t) = \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\lambda} \right)^p \right\}, \quad (2.2)$$

$$h(t) = \frac{1}{\lambda} p \left( \frac{1}{\lambda} t \right)^{p-1}, \quad \text{para } t \geq 0, p, \lambda > 0 \quad (2.3)$$

Quando algumas das  $n$  observações são censuradas em uma amostra de  $n$  indivíduos observados sob um esquema de censura aleatória tipo  $I$ , e os tempos de vida seguem a

distribuição Weibull com função densidade dada por (2.1), a função de verossimilhança dos parâmetros  $\lambda$  e  $p$  é dada por (2.4).

$$L(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n (f_T(t_i; \lambda, p))^{\delta_i} \prod_{i=1}^n (S_T(t_i; \lambda, p))^{1-\delta_i}. \quad (2.4)$$

Com relação à função de risco e à função de Sobrevivência, a função de verossimilhança pode, ainda, ser escrita como:

$$L(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n (h_T(t_i; \lambda, p))^{\delta_i} \prod_{i=1}^n (S_T(t_i; \lambda, p)), \quad (2.5)$$

Portanto,

$$L(\lambda, p) = \prod_{i=1}^n \left( p \left( \frac{1}{\lambda} \right)^p t_i^{p-1} \right)^{\delta_i} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ - \left( \frac{t_i}{\lambda} \right)^p \right\}. \quad (2.6)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é

$$\log[L(\lambda, p)] = r \log(p) - rp \log(\lambda) + (p-1) \sum_1^n \delta_i \log(t_i) - \sum_1^n \left( \frac{t_i}{\lambda} \right)^p \quad (2.7)$$

onde  $r = \sum_{i=1}^n \delta_i$  é o número de observações não censuradas.

A expressão (2.7) foi utilizada, neste trabalho, no programa computacional escrito para o cálculo das estimativas dos parâmetros de uma distribuição de Weibull. De (2.7), obtém-se

$$\frac{\partial \log L(\lambda, p)}{\partial \lambda} = -\frac{rp}{\lambda} + \frac{p}{\lambda} \sum_1^n \left( \frac{t_i}{\lambda} \right)^p$$

e

$$\frac{\partial \log L(\lambda, p)}{\partial p} = \frac{r}{p} - r \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \delta_i \log(t_i) \sum_1^n \left( \frac{t_i}{\lambda} \right)^p \log \left( \frac{t_i}{\lambda} \right) \quad (2.8)$$

As expressões (2.8), para as derivadas parciais da função de log verossimilhança, podem ser utilizadas para o cálculo das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros através do método de Newton Raphson. Resultados da literatura afirmam que as condições de regularidade exigidas para os resultados assintóticos a respeito da

distribuição de máxima verossimilhança dos parâmetros são sempre satisfeitas quando as observações são completas (Kotz e Johnson, 1988, p.551).

## 2.1 Porcentagem esperada de valores censurados em amostras da distribuição de Weibull, com observações sujeitas a censura aleatória do Tipo I

A probabilidade de obter um valor censurado em uma observação de  $T$  e  $C$  é dada por  $P[T > C]$ , que pode ser calculada, conforme exposto abaixo, no caso de censura aleatória tipo I, quando  $T$  e  $C$  são variáveis não negativas e independentes:

$$P[T > C] = \int_0^{\infty} \int_0^t f_T(t) \times f_C(c) dc dt = \int_0^{\infty} f_T(t) dt - \int_0^{\infty} f_T(t) S_C(t) dt, \quad (2.9)$$

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foi necessário calcular a probabilidade (2.9), quando  $T$  tem distribuição Weibull  $(p, \lambda)$ , e  $C$  tem distribuição Uniforme em  $[0, c]$ .

Assim, a porcentagem esperada de censuras, que só depende de  $p$  e da razão

$\left\{ \left( \frac{c}{\lambda} \right)^p \right\}$ , é dada por:

$$P[T > C] = \exp \left\{ - \left( \frac{c}{\lambda} \right)^p \right\} + \frac{\lambda}{c} \left( \Gamma \left( 1 + \frac{1}{p} \right) - \Gamma \left( 1 + \frac{1}{p}; \left( \frac{c}{\lambda} \right)^p \right) \right) \quad (2.10)$$

onde

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{é a Função Gama}$$

e

$$\Gamma(x, z) = \int_z^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{é a Função Gama incompleta.}$$

Na Figura 1, ilustra-se a porcentagem esperada de censuras, através da função  $g(p) = P[T > C]$ , quando  $T$  tem distribuição de Weibull de parâmetros de forma  $p$  e de escala  $\lambda = 3,15$  com censura Uniforme em  $(0, 5)$ .

Usando a expressão (2.10) e fixando-se o valor de um dos parâmetros, por exemplo, o parâmetro de escala  $\lambda$ , e o valor de  $C$  da distribuição Uniforme, obtém-se o valor do parâmetro de forma  $p$ , de modo que  $P[T > C]$  seja igual a um valor  $P$  desejado, por

exemplo  $P=0,50$ . No caso da Figura 1, onde  $\lambda$  é igual a 3,15, para obter 50% de censuras é preciso que  $p$  seja igual a 1.

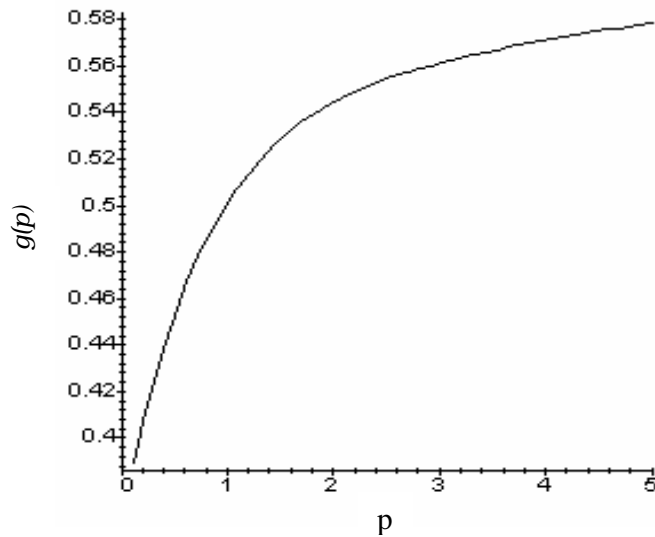


FIGURA 1 - Função  $g(p)=P[T>C]$  para  $T$  com distribuição Weibull ( $p; \lambda=3,15$ ) e  $C$  com distribuição  $U(0,5)$ , independente de  $T$ .

## 2.2 Escolha dos parâmetros das distribuições Weibull e Uniforme de modo a obter uma determinada porcentagem esperada de observações censuradas

Em amostras casuais de tamanho  $n$  de  $(T,C)$ , a porcentagem esperada de censuras entre as  $n$  observações é dada por  $P[T>C]$ . Em uma simulação de uma amostra de  $n$  pares  $(T,C)$ , a frequência relativa de observações censuradas na amostra é uma variável aleatória com Esperança igual a  $P[T>C]$ . Pela lei forte dos grandes números, a frequência relativa de observações censuradas na amostra é próxima de sua Esperança, de modo que, cerca de  $P[T>C]100\%$  das observações na amostra serão censuradas.

Neste estudo de simulação, 42 diferentes casos para os parâmetros das distribuições de  $T$  e de  $C$  foram analisados. Os parâmetros para a distribuição dos tempos de vida foram escolhidos de modo que o coeficiente de variação assumisse os valores 0,25, 0,33, 0,4, 0,5, 1 e 2. O limite superior  $c$  da distribuição de censura  $U(0,c)$  foi escolhido de modo a produzir as proporções esperadas de observações censuradas em amostras de tamanho  $n$  de  $(X,\delta)$  iguais a 0,25, 0,50 ou 0,75.

A Tabela 1 apresenta as informações referentes ao caso 2 e ao caso 25, cujos resultados gráficos (quantis e funções densidades) são apresentados na seção 4.

Tabela 1 - Parâmetros da distribuição de  $T$  (Weibull) com coeficientes de variação especificados, da distribuição de  $C$  (Uniforme) e porcentagens esperadas de observações censuradas

Caso	Coeficiente de variação de $T$	Parâmetros da distribuição de $T$		Parâmetros da distribuição de $C$		% esperada de censuras	
		$P$	$\lambda$	1ª amostra	2ª amostra	1ª amostra	2ª amostra
2	1	1	1,28	5	5	25%	25%
25	0,4	2,5	4,22	15	7,45	25%	50%

### 3 Estudo por simulação da estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança, no caso de distribuições de Weibull com dados censurados

Em cada um dos 42 casos estudados, incluindo os casos apresentados na Tabela 1, foram geradas 1.000 amostras independentes de mesmo tamanho  $n$  de pares  $(T, C)$ , onde  $T$  tem distribuição de Weibull e é independente de  $C$  que tem distribuição Uniforme. Cada par  $(T, C)$  foi transformado no par  $(X, \delta)$  onde  $X = \text{mínimo}(T, C)$  e  $\delta$  é a variável indicadora de censura. Para cada caso, foi feito o estudo com amostras de tamanho 10, 20 e 50.

Em cada uma das 1.000 amostras aleatórias independentes de pares de  $(X, \delta)$  de um determinado tamanho  $n$ , foram calculadas as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição de  $T$ , utilizando um programa escrito em S-Plus, que faz uso do procedimento NLMIN.

Para verificar a validade da aproximação assintótica pela distribuição normal da distribuição dos estimadores dos parâmetros da distribuição Weibull, com dados censurados, foi feita a comparação das distribuições empíricas dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros com a distribuição Normal, por meio do gráfico de densidades e de gráficos de quantis dessas distribuições empíricas *versus* quantis da distribuição Normal.

### 4 Resultados

As Figuras 2, 3, 4, 5, 6 e 7 ilustram um dos casos estudados (caso 2), quando  $T$  tem distribuição de Weibull de parâmetros de forma  $p=1$  e de escala  $\lambda=1,28$ , com censura Uniforme em (0,5) e visam a comparação dos resultados obtidos por simulação, relativos à estimação dos parâmetros da distribuição Weibull por Máxima Verossimilhança com os resultados assintóticos, válidos sob condições de regularidade.

Nas Figuras 2, 3 e 4, comparam-se os quantis da distribuição empírica das estimativas dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita) com os quantis da distribuição normal padrão, a partir de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$  (gráficos superiores) e mais 1.000 amostras independentes de  $(X, \delta)$  (gráficos inferiores), para amostras de tamanho 10, 20 e 50 respectivamente.

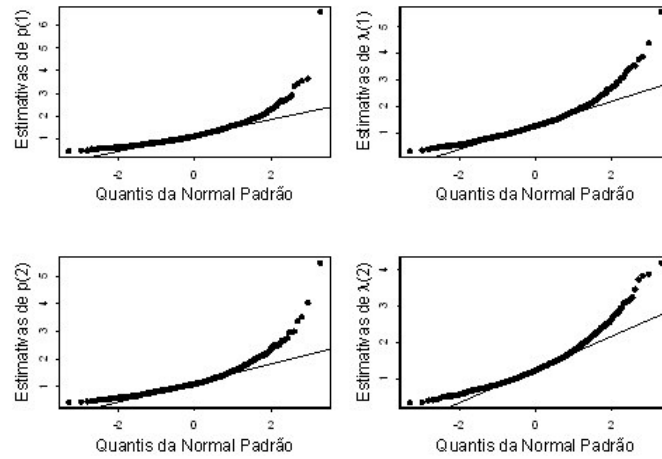


FIGURA 2 - Quantis das estimativas por Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim \text{Weibull}(1; 1, 28)$  e  $C \sim \text{Uniforme}(0, 5)$  versus quantis da normal padrão, para  $n=10$ .

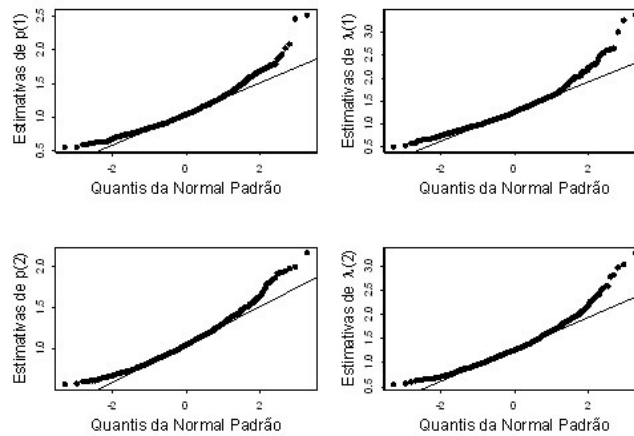


FIGURA 3 - Quantis das estimativas por Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim \text{Weibull}(1; 1, 28)$  e  $C \sim \text{Uniforme}(0, 5)$  versus quantis da normal padrão, para  $n=20$ .

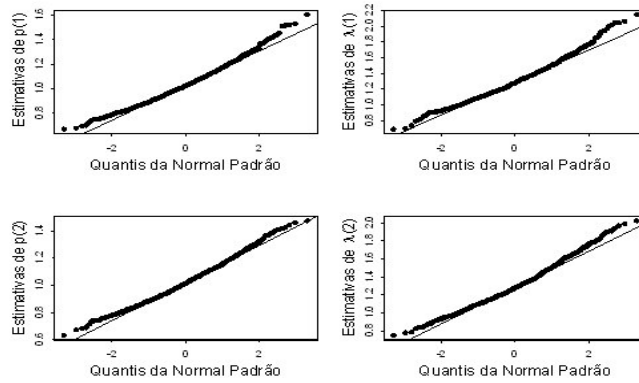


FIGURA 4 - Quantis das estimativas por Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim \text{Weibull}(1; 1,28)$  e  $C \sim \text{Uniforme}(0, 5)$  versus quantis da normal padrão, para  $n=50$ .

As Figuras 2, 3 e 4 sugerem que a distribuição dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros se afasta da distribuição normal nas caudas das curvas, com afastamento mais acentuado à direita. Para amostras de tamanho 50, esse afastamento ocorre de maneira menos acentuada que nos casos onde  $n=10$  ou 20.

Nas Figuras 5, 6 e 7 estão as estimativas de funções densidades dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$  (gráficos superiores) e mais 1.000 amostras independentes de  $(X, \delta)$  (gráficos inferiores), quando  $T$  tem distribuição de Weibull de parâmetros de forma  $p=1$  e de escala  $\lambda=1,28$ , com censura Uniforme em  $(0,5)$  para amostras de tamanho 10, 20 e 50 respectivamente.

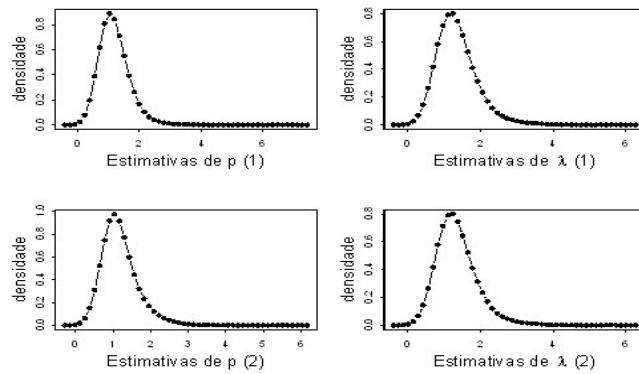


FIGURA 5 - Estimativas das funções densidade dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim \text{Weibull}(1; 1,28)$  e  $C \sim \text{Uniforme}(0, 5)$  para  $n=10$ .



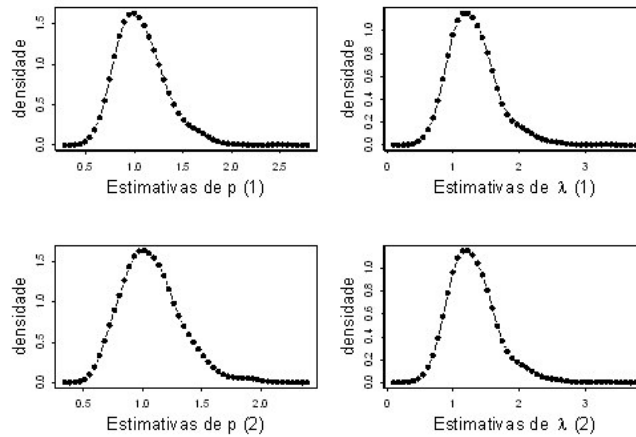


FIGURA 6 - Estimativas das funções densidade dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim \text{Weibull}(1; 1,28)$  e  $C \sim \text{Uniforme}(0, 5)$  para  $n=20$ .

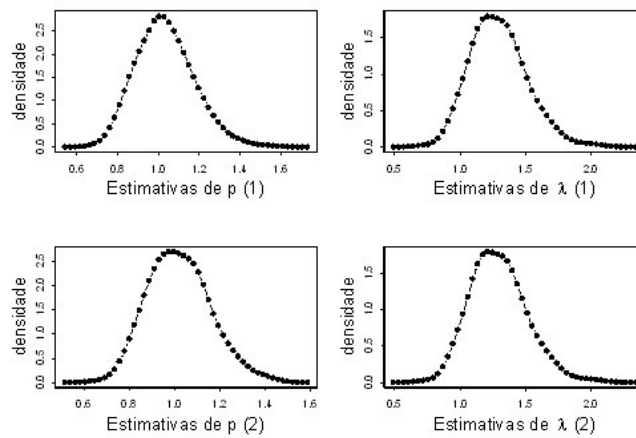


FIGURA 7 - Estimativas das funções densidade dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim \text{Weibull}(1; 1,28)$  e  $C \sim \text{Uniforme}(0, 5)$  para  $n=50$ .

As Figuras 5 e 6 confirmam que a distribuição dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros se afasta da distribuição normal nas caudas das curvas para amostras de tamanho 10 ou 20. Para amostras de tamanho 50 esse afastamento ocorre, porém, de maneira menos acentuada como pode ser observado na Figura 7.

A seguir, ilustra-se o estudo realizado para o caso 25, onde  $T$  tem distribuição de Weibull de parâmetros de forma  $p=2,5$  e de escala  $\lambda=4,22$  e  $C$  tem distribuição Uniforme em  $(0,c)$ . O valor do parâmetro da distribuição de  $C$  para uma porcentagem esperada de censura da ordem de 25% para a primeira amostra é  $c=15$ , e  $c=7,45$  para a segunda amostra para uma porcentagem esperada de censura da ordem de 50%.

Nas Figuras 8, 9 e 10, comparam-se os quantis da distribuição empírica das estimativas dos parâmetros com os quantis da distribuição normal padrão.

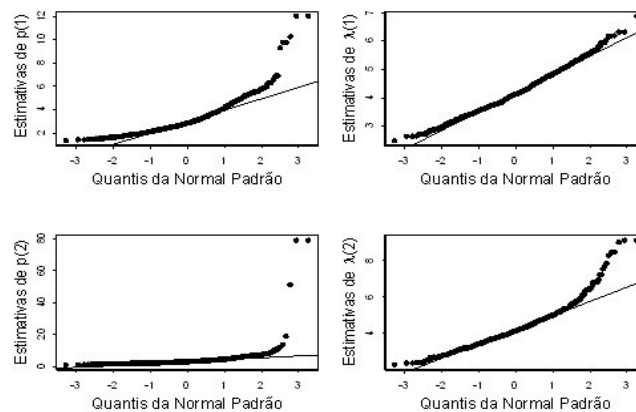


FIGURA 8 - Quantis das estimativas por Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T$ -Weibull  $(2,5; 4,22)$  e  $C$ -Uniforme  $(0, c)$  versus quantis da normal padrão, para  $n=10$ .

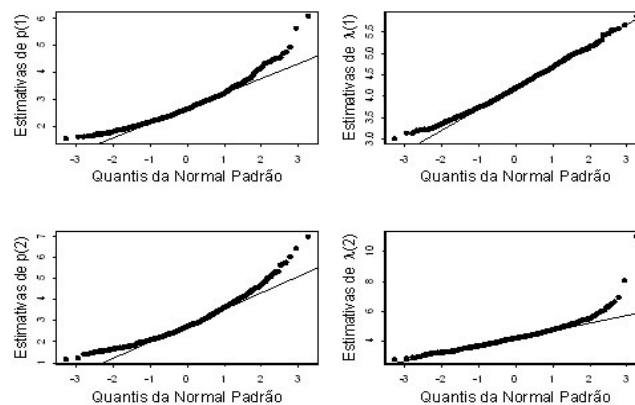


FIGURA 9 - Quantis das estimativas por Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T$ -Weibull  $(2,5; 4,22)$  e  $C$ -Uniforme  $(0, c)$  versus quantis da normal padrão, para  $n=20$ .

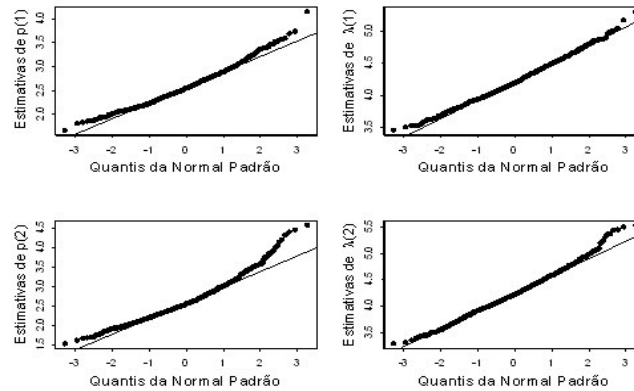


FIGURA 10 - Quantis das estimativas por Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim$ Weibull  $(2,5; 4,22)$  e  $C \sim$ Uniforme  $(0, c)$  versus quantis da normal padrão, para  $n=50$ .

Nota-se, nas Figuras 8, 9 e 10, que a distribuição dos estimadores de Máxima Verossimilhança do parâmetro de forma se afasta da distribuição normal nas caudas das curvas e que o afastamento é menos acentuado para o parâmetro de escala.

As Figuras 11, 12 e 13 ilustram, para amostras de tamanho 10, 20 e 50, respectivamente, as estimativas de funções densidades dos estimadores de Máxima Verossimilhança, quando  $T$  tem distribuição de Weibull de parâmetros de forma  $p=2,5$  e de escala  $\lambda=4,22$  e  $C$  tem distribuição  $U(0; 15)$  para a primeira amostra, e  $U(0; 7,45)$  para a segunda amostra.

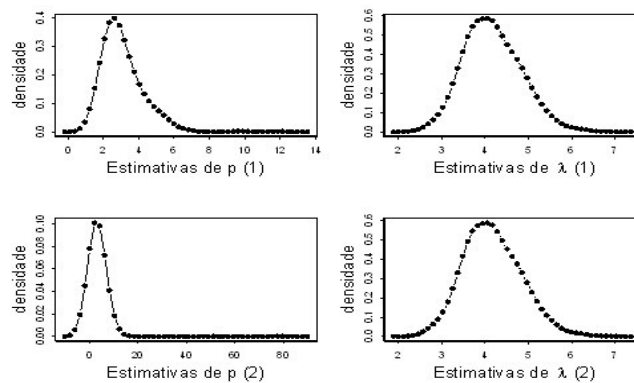


FIGURA 11 - Estimativas das funções densidade dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T \sim$ Weibull  $(2,5; 4,22)$  e  $C \sim$ Uniforme  $(0, c)$  para  $n=10$ .

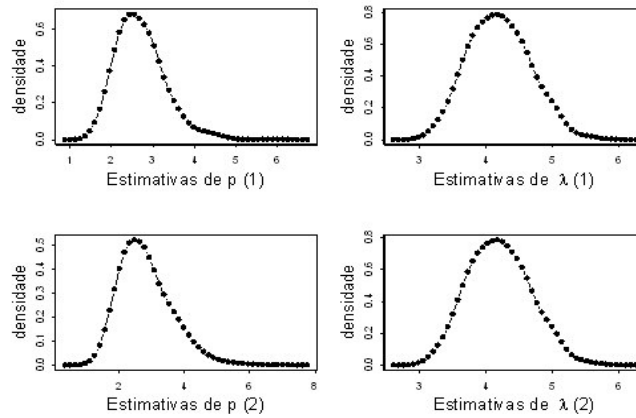


FIGURA 12 - Estimativas das funções densidade dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T$ -Weibull  $(2,5; 4,22)$  e  $C$ -Uniforme  $(0, c)$  para  $n=20$ .

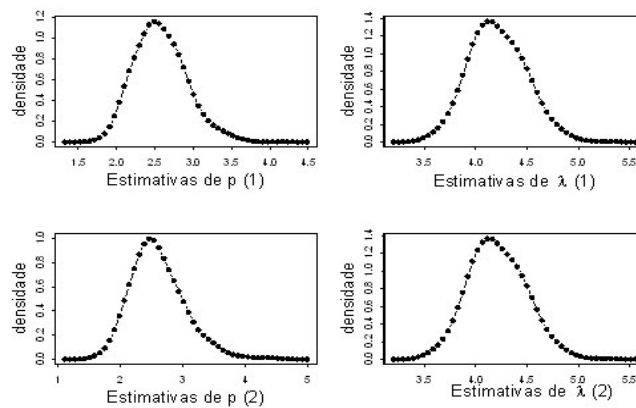


FIGURA 13 - Estimativas das funções densidade dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros  $p$  (à esquerda) e  $\lambda$  (à direita), a partir de dois conjuntos de 1.000 amostras de  $(X, \delta)$ , para  $T$ -Weibull  $(2,5; 4,22)$  e  $C$ -Uniforme  $(0, c)$  para  $n=50$ .

As Figuras 11 e 12 sugerem que a distribuição dos estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros se afasta de uma distribuição normal, principalmente nas caudas das curvas e para amostras de tamanho 10 e 20. Como observado nas Figuras 8 e 9, esse afastamento é menos acentuado no caso dos parâmetros de escala. Para amostras de tamanho 50, no entanto, as Figuras 10 e 13 sugerem que a distribuição assintótica dos estimadores se aproxima de uma distribuição normal.

Para a maioria dos 42 casos estudados, observou-se que os resultados obtidos para as estimativas dos parâmetros da distribuição de Weibull por Máxima Verossimilhança, eram semelhantes aos dois casos aqui descritos.

## Conclusão

Os resultados obtidos no estudo da distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Weibull, sujeito a censura aleatória à direita pela distribuição Uniforme, sugerem que a aproximação normal ainda não é adequada, principalmente no que se refere ao parâmetro de forma para amostras de tamanho 10 e 20. Para amostras de tamanho 50 há uma indicação de que a aproximação normal é satisfatória para as distribuições marginais dos estimadores de cada um dos parâmetros (de forma e de escala). Este estudo deve ser confirmado usando outras distribuições para a variável de censura  $C$ .

MANTOVANI, A.; FRANCO, M. A. de P. A study on the asymptotic distribution of maximum likelihood estimators for a two-parameter Weibull distribution in censored samples. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.22, n.3, p.7-20, 2004.

- *ABSTRACT: The objective of this work is to study by simulation the asymptotic distribution of maximum likelihood estimators of the parameters of a Weibull distribution, when observations are subject to random censorship. The study was made by supposing that  $C$  has a Uniform distribution in  $[0,c]$  and is independent of  $T$ . The inference is made from samples of  $(X,\delta)$ , where  $X = \min(T,C)$  and  $\delta$  is the indicator variable of the event  $(X=T)$ . The study comprises the simulation of 1,000 samples of each one of the following sizes 10, 20 and 50. Several values of  $c$  giving different expected percentages of censored values in the sample were considered. The conclusion is that there is empirical evidence of an asymptotic normal distribution for each marginal distribution of the maximum likelihood estimators of parameters of Weibull distribution.*
- *KEYWORDS: Survival analysis; censorship; maximum likelihood; simulation; Weibull.*

## Referências

- CORDEIRO, G. M. *Introdução à teoria de verossimilhança.*: livro-texto do 10º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Rio de Janeiro, 1992.174p.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S. *Continuous univariate distributions.* Boston: Houghton Mifflin, 1970.,v.1, 756p.
- KALBFLEISCH, J. D.; PRENTICE, R. L. *The statistical analysis of failure time data.* New York: John Wiley, 1980. 321p.
- KOTZ, S.; JOHNSON, N. L. *Encyclopedia of statistical sciences.* New York: John Wiley, 1988., v.9, 762p.
- LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data.* New York: John Wiley, 1982. 580p.

LEE, E. T. *Statistical methods for survival data analysis*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: John Wiley, 1992. 482p.

LEITE, J. G.; SINGER, J. M. *Métodos assintóticos em estatística: fundamentos e aplicações*. São Paulo: IME-USP, 1990. 130p.

MILLER, R. G. *Survival analysis*. New York: John Wiley, 1981. 238p.

Recebido em 23.09.2003.

Aprovado após revisão em 02.12.2004.