AS ÁLGEBRAS DOS OPERADORES DE CONSEQÜÊNCIA

Mauri Cunha do NASCIMENTO[1]
Hércules de Araújo FEITOSA[1]

▪ RESUMO: Neste trabalho, introduzimos as TK-álgebras associadas com os operadores de conseqüência de Tarski, mostramos algumas propriedades das referidas TK-álgebras e demonstramos dois teoremas de representação. Terminamos com algumas noções de uma lógica proposicional associada com a classe das TK-álgebras.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Operador de conseqüência; álgebra de Boole; modelo algébrico.

1 Introdução

Na década de 1930, Alfred Tarski(1956) com a intenção de caracterizar claramente as noções essenciais de uma lógica, introduziu o conceito de operador de conseqüência, o qual chamamos no texto de operador de conseqüência de Tarski. A definição original de Tarski era um pouco mais exigente que a adotada neste e em outros textos contemporâneos, pois exigia a consistência de cada sistema lógico e domínio enumerável. Diante de investigações recentes em Lógica, não é de todo apropriado manter tais quesitos, pois as lógicas paraconsistentes, bastante investigadas no Brasil, não admitem a primeira exigência e, também, abundam trabalhos em que a linguagem não é enumerável.

Retemo-nos então a três itens que fornecem bastante generalidade ao conceito de conseqüência e posterior sistema dedutivo.

Tratar sistemas gerais é conveniente pois nestas versões de lógicas abstratas os procedimentos particulares não precisam ser recuperados a cada abordagem.

Um dos objetivos centrais desta investigação é poder usar recursos algébricos para a análise dos operadores de Tarski, o que apresentamos neste trabalho, estendendo a estrutura algébrica a partir das álgebras de Boole (Miraglia(1974) e Rasiowa (1974)).

A opção pela álgebra de Boole, como estrutura subjacente, remonta ao fato de ser bastante conhecida e de manipulação simples.

2 O operador de conseqüência

Tarski, buscando uma caracterização geral para a noção de lógica, introduziu o conceito de operador de conseqüência.

[1]Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências - FC, UNESP, CEP 17033-670, Bauru, SP, Brasil. E-mail: *mauri@fc.unesp.br* / *haf@fc.unesp.br*

Um *operador de conseqüência* sobre S é a uma função $C: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ tal que, para todos $A, B \subseteq S$, valham:

- (C_1) $A \subseteq C(A)$
- (C_2) $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$
- (C_3) $C(C(A)) \subseteq C(A)$.

Certamente, para todo operador de conseqüência C, por (C_1) e (C_3), vale a igualdade $C(C(A)) = C(A)$. Também, de (C_1) segue que $C(S) = S$.

Seja C um operador de conseqüência sobre S. Dizemos que o conjunto A é *fechado* em S se $C(A) = A$, e que A é *aberto* se o complementar de A, indicado por A^C, é fechado.

Por um *sistema dedutivo* de Tarski[2] entendemos um par (S, C), em que S é um conjunto qualquer e C é um operador de conseqüência sobre S.

Proposição 1.1: *Em (S, C) uma intersecção qualquer de fechados é ainda um fechado.*
Demonstração: Seja A_λ, para cada $\lambda \in I$, um fechado de (S, C). Certamente, $\cap_{\lambda\in I} A_\lambda \subseteq C(\cap_{\lambda\in I} A_\lambda)$. Por outro lado, como cada A_λ é fechado, qualquer que seja λ, $A_\lambda = C(A_\lambda)$. Também $\cap_{\lambda\in I}A_\lambda \subseteq A_\beta$, para todo $\beta \in I$. Daí, $C(\cap_{\lambda\in I} A_\lambda) \subseteq C(A_\beta)$, para todo $\beta \in I$, e então $C(\cap_{\lambda\in I} A_\lambda) \subseteq \cap_{\lambda\in I} C(A_\lambda) = \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$. Concluindo, $C(\cap_{\lambda\in I} A_\lambda) = \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$ e o resultado está garantido.

Claramente, $C(\varnothing)$ e S correspondem ao menor e ao maior fechados, respectivamente, associadas ao operador de conseqüência C.

Dizemos que um sistema dedutivo (S, C) é *vácuo* se $C(\varnothing) = \varnothing$.

Podemos verificar que todo espaço topológico é um sistema dedutivo. Porém, não vale a recíproca porque, em geral, em um sistema dedutivo $C(\varnothing) \neq \varnothing$. Os espaços topológicos são exemplos de sistemas dedutivos vácuos e os de menor interesse do ponto de vista lógico.

Definimos *espaço quase topológico* por um par (S, θ), em que S é um conjunto não vazio e θ é uma coleção de subconjuntos de S satisfazendo a seguinte condição:

$$(QT_1) \text{ se } \{A_\lambda | \lambda\in I\} \subseteq \theta, \text{ então } \cup_{\lambda\in I}A_\lambda \in \theta.$$

Dizemos que a coleção $\theta \subseteq \mathcal{P}(S)$ é uma *quase topologia* e que cada membro de θ é um *quase aberto* segundo θ. Dizemos também que um conjunto F é *quase fechado* se F^C é um quase aberto em S.

Proposição 1.2: *Em um espaço quase topológico (S,θ), conjunto $\varnothing$ é quase aberto e S é quase fechado.*
Demonstração: Como $\varnothing \subseteq \theta$, por (QT_1), temos que $\varnothing \in \theta$. Assim, $\varnothing$ é um quase aberto em S, e como $\varnothing^C = S$, segue que S é um quase fechado.

Proposição 1.3: *Num espaço quase topológico (S,θ), a intersecção de uma quantidade qualquer de subconjuntos quase fechados é um quase fechado de S.*

[2] Para mais detalhes ver Wójcicki,(1988).

Demonstração: Para cada $\lambda \in I$, seja A_λ um quase fechado de S. Considerando que $(\cap_{\lambda\in I} A_\lambda)^C = \cup_{\lambda\in I} (A_\lambda)^C$ e que, para cada $\lambda \in I$, $(A_\lambda)^C$ é um quase aberto, segue por (QT_I) que $\cup_{\lambda\in I} (A_\lambda)^C$ é um quase aberto de S. Conseqüentemente, $(\cap_{\lambda\in I} A_\lambda)^C$ também é um quase aberto e, portanto, $\cap_{\lambda\in I} A_\lambda$ é um quase fechado.

A questão seguinte é saber se podemos definir um sistema dedutivo em uma abordagem semelhante àquela da topologia. A resposta é sim e de maneira um tanto surpreendente, pois os conceitos de sistema dedutivo e quase-topologia são equivalentes.

Seja (S, θ) uma quase-topologia. Verificamos que (S, θ) é um sistema dedutivo, em que para cada $A \subseteq S$, definimos o *fecho* de A por $C(A) = \cap\{X \subseteq S \,/\, X$ é quase fechado e $A \subseteq X\}$.

Proposição 1.4: *$C(A)$ é um quase-fechado.*
Demonstração: Segue da Proposição anterior.

Teorema 1.5: *Sejam (S, θ) um espaço quase topológico e $C(A) = \cap\{X \subseteq S \,/\, X$ é quase fechado e $A \subseteq X\}$. Então, (S, C) é um sistema dedutivo.*
Demonstração: É imediato que $A \subseteq C(A)$ e que se $A \subseteq B$ então $C(A) \subseteq C(B)$. Resta então verificar que $C(C(A)) \subseteq C(A)$ (ou que $C(C(A)) = C(A)$). Observemos que, se X é um quase fechado, então $A \subseteq X$ se, e somente se, $C(A) \subseteq X$. Assim, segue que $C(A) = C(C(A))$.

Por outro lado, se (S, C) é um sistema dedutivo, seja $\theta = \{X \subseteq S \,/\, X$ é aberto$\} = \{A^C /\, A$ é fechado$\} = \{A^C /\, C(A) = A\}$

Teorema 1.6: *Se (S, C) é um sistema dedutivo, então (S, θ) é um espaço quase topológico.*
Demonstração: Seja $B \subseteq \theta = \{A^C / C(A) = A\}$, digamos, $B = \{B_i \,/\, i \in I\}$. Então para cada $i \in I$, $B_i = A_i^C$ e $C(A_i) = A_i$. Assim, $\cup B_i = \cup(A_i^C) = (\cap A_i)^C$. Como $\cap A_i \subseteq A_i$, $C(\cap A_i) \subseteq \cap C(A_i) = \cap A_i \subseteq C(\cap A_i)$. Logo, $\cap A_i = C(\cap A_i)$. Portanto, $\cup B_i \in \theta$.

Introduziremos a seguir, as álgebras dos operadores de conseqüência de Tarski ou TK-álgebras.

3 As álgebras dos operadores de conseqüência de Tarski

Definimos uma *TK-álgebra* por uma sêxtupla $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ em que a quíntupla $(A, 0, 1, \vee, \sim)$ é uma álgebra de Boole e $\bullet$ é um novo operador, denominado *operador de Tarski*, sujeito às seguintes igualdades:

(i) $a \vee \bullet a = \bullet a$;

(ii) $\bullet a \vee \bullet(a \vee b) = \bullet(a \vee b)$;

(iii) $\bullet(\bullet a) = \bullet a$.

Como estamos tratando com uma álgebra de Boole, o item (i) da definição acima nos informa que, para todo $a \in A$, $a \leq \bullet a$ e o item (ii) que $\bullet a \leq \bullet(a \vee b)$.

Proposição 2.1: *Numa TK-álgebra vale o seguinte:* $a \leq b \Rightarrow \bullet a \leq \bullet b$.
Demonstração: $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow \bullet(a \vee b) = \bullet b \Rightarrow \bullet a \vee \bullet(a \vee b) = \bullet(a \vee b) = \bullet b \Rightarrow \bullet a \leq \bullet b$.

Exemplo 2.a: Cada espaço topológico é uma álgebra de Boole. Se, além disso, consideramos a operação de fecho do espaço topológico, então temos uma TK-álgebra.

Exemplo 2.b: Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{A} = (A, \emptyset, \mathbb{R}, \cup, {}^{C}, \bullet)$, em que A = $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, X^C é o complementar de X em $\mathbb{R}$ e $\bullet X = \cap \{I \,/\, I$ é um intervalo e $X \subseteq I\}$. Então $\mathcal{A}$ é uma TK-álgebra, pois valem as seguintes propriedades:

(i) $X \subseteq \bullet X$ *(ou* $X \cup \bullet X = \bullet X$*)*

(ii) $X \subseteq Z \Rightarrow \bullet X \subseteq \bullet Z$ (ou $\bullet X \cup \bullet(X \cup Y) = \bullet(X \cup Y)$)

(iii) $\bullet(\bullet X) = \bullet X$.

Proposição 2.2: *Numa TK-álgebra vale o seguinte*:

(i) $\bullet(a \wedge b) \leq \bullet a \wedge \bullet b$

(ii) $\bullet a \vee \bullet b \leq \bullet(a \vee b)$

(iii) $\bullet(\bullet a \wedge \bullet b) = \bullet a \wedge \bullet b$

(iv) $\bullet(\bullet a \vee \bullet b) = \bullet(a \vee b)$.

Demonstração: (i) $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b \Rightarrow \bullet(a \wedge b) \leq \bullet a$ e $\bullet(a \wedge b) \leq \bullet b \Rightarrow \bullet(a \wedge b) \leq \bullet a \wedge \bullet b$.

(ii) é similar a (i).

(iii) Basta verificarmos que $\bullet(\bullet a \wedge \bullet b) \leq \bullet a \wedge \bullet b$. Mas, por (i), $\bullet(\bullet a \wedge \bullet b) \leq \bullet\bullet a \wedge \bullet\bullet b = \bullet a \wedge \bullet b$

(iv) Como $a \leq \bullet a \leq \bullet a \vee \bullet b$ e $b \leq \bullet b \leq \bullet a \vee \bullet b$ então $a \vee b \leq \bullet a \vee \bullet b$. Logo, $\bullet(a \vee b) \leq \bullet(\bullet a \vee \bullet b)$. Agora, por (ii), $\bullet a \vee \bullet b \leq \bullet(a \vee b)$ e, daí, $\bullet(\bullet a \vee \bullet b) \leq \bullet\bullet(a \vee b) = \bullet(a \vee b)$.

Nos itens (i) e (ii) da proposição anterior, nem sempre vale a igualdade:

No Exemplo 2.b, tomando X = (0, 1) e Y = (2, 3), temos que $\bullet X = X$, $\bullet Y = Y$ e $\bullet(X \cup Y) = (0, 3)$. Assim, $\bullet X \cup \bullet Y = (0, 1) \cup (2, 3) \neq (0, 3) = \bullet(X \cup Y)$. Agora, para Y = {1, 2, 3} e X = {–1, 1, 2, 5}, temos $Y \cap X = \{1, 2\}$. Portanto, $\bullet(Y \cap X) = (1, 2) \subset (1, 3) = (1, 3) \cap (-1, 5) = \bullet Y \cap \bullet X$.

Definimos uma nova operação em uma TK-álgebra, dual de $\bullet$:

$$\circ a =_{df} \sim\bullet\sim a.$$

Proposição 2.3: *Numa TK-álgebra vale o seguinte*:

(i) $\bullet a = \sim\circ\sim a$

(ii) $\sim\circ a = \bullet\sim a$

(iii) $\sim\bullet a = \circ\sim a$

(iv) $\bullet\circ a = \sim\circ\bullet\sim a$

(v) $\circ\bullet a = \sim\bullet\circ\sim a$.

Demonstração: Segue da definição.

A proposição seguinte fornece resultados duais da definição de $\bullet$ e da Proposição 2.1, quando permutamos o operador $\bullet$ pelo operador $\circ$.

Proposição 2.4: *Numa TK-álgebra as seguintes condições são válidas*:

(i) $\circ a \leq a$ *(isto é,* $a \wedge \circ a = \circ a$*)*

(ii) $a \leq b \Rightarrow \circ a \leq \circ b$

(iii) $\circ a = \circ\circ a$

(iv) $\circ(a \wedge b) \leq \circ a$ *(isto é,* $\circ a \wedge \circ(a \wedge b) = \circ(a \wedge b)$*)*

Demonstração:

(i) $\sim a \leq \bullet\sim a \Rightarrow \sim\bullet\sim a \leq \sim\sim a = a \Rightarrow \circ a \leq a$.

(ii) $a \leq b \Rightarrow \sim b \leq \sim a \Rightarrow \bullet\sim b \leq \bullet\sim a \Rightarrow \sim\bullet\sim a \leq \sim\bullet\sim b \Rightarrow \circ a \leq \circ b$

(iii) $\circ a = \sim\bullet\sim a = \sim\bullet\bullet\sim a = \sim\bullet\sim\sim\bullet\sim a = \circ\circ a$

(iv) Segue de (ii).

O dual da Proposição 2.2 é dado a seguir.

Proposição 2.5: *Numa TK-álgebra as seguintes condições são válidas:*

(i) $\circ(a \wedge b) \leq \circ a \wedge \circ b$

(ii) $\circ a \vee \circ b \leq \circ(a \vee b)$

(iii) $\circ(a \wedge b) = \circ(\circ a \wedge \circ b)$

(iv) $\circ a \vee \circ b = \circ(\circ a \vee \circ b)$.

Demonstração:

(i) Por 2.4 (iv) temos $\circ(a \wedge b) \leq \circ a$ e $\circ(a \wedge b) \leq \circ b$. Logo, $\circ(a \wedge b) \leq \circ a \wedge \circ b$.

(ii) Por 2.4 (ii) temos $\circ a \leq \circ(a \vee b)$ e $\circ b \leq \circ(a \vee b)$. Logo, $\circ a \vee \circ b \leq \circ(a \vee b)$.

(iii) Por 2.2 (iv) e aplicando 2.3, temos $\bullet(\bullet\sim a \vee \bullet\sim b) = \bullet(\sim a \vee \sim b) \Rightarrow \bullet(\sim\circ a \vee \sim\circ b) = \bullet\sim(a \wedge b) \Rightarrow \bullet\sim(\circ a \wedge \circ b) = \bullet\sim(a \wedge b) \Rightarrow \sim\circ(\circ a \wedge \circ b) = \sim\circ(a \wedge b) \Rightarrow \circ(\circ a \wedge \circ b) = \circ(a \wedge b)$.

(iv) Por 2.2 (iii) e aplicando 2.3, temos $\bullet(\bullet\sim a \wedge \bullet\sim b) = \bullet\sim a \wedge \bullet\sim b \Rightarrow \bullet(\sim\circ a \wedge \sim\circ b) = \sim\circ a \wedge \sim\circ b \Rightarrow \bullet\sim(\circ a \vee \circ b) = \sim(\circ a \vee \circ b) \Rightarrow \sim\circ(\circ a \vee \circ b) = \sim(\circ a \vee \circ b) \Rightarrow \circ(\circ a \vee \circ b) = \circ a \vee \circ b$.

Nos itens (i) e (ii) nem sempre vale a igualdade, como pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 2.c: Consideremos $\mathcal{A} = (A, \varnothing, \mathbb{R}, \cup, {}^{C}, \bullet)$, em que $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, X^C é o complementar de X em $\mathbb{R}$ e $\bullet X = \cap\{I \ / \ I$ é um intervalo e $X \subseteq I\}$, do exemplo 2.b.

Para $X \subseteq \mathbb{R}$, $\bullet X^C = \cap\{I \mid I$ é um intervalo e $X^C \subseteq I\}$. Logo, $\circ X = (\bullet X^C)^C = \cup\{I^C \ / \ I$ é um intervalo e $X^C \subseteq I\} = \cup\{I^C \ / \ I$ é um intervalo e $I^C \subseteq X\}$.

Agora, para $X = (1, 2)$ e $Y = [2, +\infty)$, $\circ X = \emptyset$, $\circ Y = Y$, $X \cup Y = (1, +\infty)$ e $\circ(X \cup Y) = X \cup Y \neq Y = \circ X \cup \circ Y$. Para $X = (-\infty, 2)$ e $Y = (-2, +\infty)$, $\circ X = X$, $\circ Y = Y$, $\circ X \cap \circ Y = (-2, 2)$ e $\circ(X \cap Y) = \emptyset$. Assim, $\circ(X \cap Y) \neq \circ X \cap \circ Y$.

Proposição 2.6: *Numa TK-álgebra as seguintes condições são válidas:*

(i) $\sim\bullet a \leq \bullet\sim a$

(ii) $\circ\sim a \leq \sim\circ a$.

Demonstração:

(i) $\sim\bullet a = \circ\sim a \leq \sim a \leq \bullet\sim a$.

(ii) Segue de (i), visto que $\circ\sim a = \sim\bullet a$ e $\sim\circ a = \bullet\sim a$.

Na proposição anterior, nem sempre vale a igualdade, pois tomando $X = (0, 1)$ nos exemplos 2.b e 2.c, obtemos $\bullet X = X$, $(\bullet X)^C = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $X^C = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ e $\bullet X^C = \mathbb{R}$. Assim, $(\bullet X)^C \neq \bullet X^C$, e $(\circ X)^C \neq \circ X^C$ (isto é, $\sim\bullet X \neq \bullet\sim X$, e $\sim\circ X \neq \circ\sim X$). Observemos que se $X = \emptyset$, então $(\bullet X)^C = \bullet X^C = \mathbb{R}$.

Dizemos que um elemento $a \in \mathcal{A}$ é *fechado* se $\bullet a = a$ e que $a \in \mathcal{A}$ é *aberto* se $\circ a = a$.

Exemplo 2.d: Consideremos $\mathcal{A} = (A, \emptyset, \mathbb{R}, \cup, {}^C, \bullet)$, em que $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, X^C é o complementar de X em $\mathbb{R}$. Definindo $\bullet X = X \cup \{0\}$ temos $\bullet\emptyset = \{0\}$. Também, $\circ\mathbb{R} = \mathbb{R}-\{0\} \neq \mathbb{R}$. Note que $\circ X = X-\{0\}$. Ou seja, nesta TK-Álgebra, $\emptyset$ não é fechado e $\mathbb{R}$ não é aberto.

As Proposições 2.2 e 2.5 garantem que:

(i) se a e b são fechados então $a \wedge b$ é fechado

(ii) se a e b são abertos então $a \vee b$ é aberto.

Para $\mathcal{A} = (A, \emptyset, \mathbb{R}, \cup, {}^C, \bullet)$, em que $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, X^C é o complementar de X em $\mathbb{R}$ e $\bullet X = \cap\{I \ / \ I$ é um intervalo e $X \subseteq I\}$, do Exemplo 2.b, tomando $X = (0, 1)$ e $Y = (2, 3)$, temos $\bullet X = X$ e $\bullet Y = Y$, mas $\bullet(X \cup Y) = \bullet((0,1) \cup (2,3)) = (0,3) \neq (0,1) \cup (2,3) = X \cup Y$. Para $X = (-\infty, 2]$ e $Y = [-2, +\infty)$, $\circ X = X$, $\circ Y = Y$, $\circ X \cap \circ Y = [-2, 2] \neq \emptyset = \circ[-2, 2] = \circ(\circ X \cap \circ Y)$. Assim, temos exemplo para *a* e *b* fechados sem que $a \wedge b$ seja fechado e também para *a* e *b* abertos sem que $a \wedge b$ seja aberto.

Proposição 2.7:

(i) *Se a é um aberto, então* $a \leq b \Leftrightarrow a \leq \circ b$

(ii) *Se b é um fechado, então* $a \leq b \Leftrightarrow \bullet a \leq b$

(iii) *a é aberto* $\Leftrightarrow \sim a$ *é fechado.*

Demonstração:

(i) $(\Rightarrow)$ $a \leq b \Rightarrow \circ a \leq \circ b$. Como $a = \circ a$ então $a \leq \circ b$.

(ii) ($\Leftarrow$) Claro pois $\circ b \leq b$.

(iii) ($\Rightarrow$) $a \leq b \Rightarrow \bullet a \leq \bullet b = b$, pois b é fechado.

(iv) ($\Leftarrow$) Claro pois $a \leq \bullet a$.

(v) a é aberto $\Leftrightarrow a = \circ a \Leftrightarrow {\sim}a = {\sim}\circ a \Leftrightarrow {\sim}a = \bullet{\sim}a$.

Proposição 2.8: *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *a é aberto e fechado*

(ii) ${\sim}\bullet a = \bullet{\sim}a$

(iii) $\circ{\sim}a = {\sim}\circ a$.

Demonstração: *a* é aberto e fechado $\Leftrightarrow \bullet a = a = \circ a \Leftrightarrow {\sim}\bullet a = {\sim}a = {\sim}\circ a \Leftrightarrow$ (2.3) ${\sim}\bullet a = {\sim}a = \bullet{\sim}a \Leftrightarrow$ (2.3) $\circ{\sim}a = {\sim}a = {\sim}\circ a$.

Nos Exemplos 2.b e 2.c, conjuntos do tipo $X = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, são abertos e fechados pois $\bullet X = X$, $X^C = (-\infty, 0]$, $\bullet X^C = X^C$ e $\circ X = (\bullet X^C)^C = (X^C)^C = X$. Da mesma forma conjuntos do tipo $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ e $(-\infty, a]$ são abertos e fechados.

Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *não degenerada* se o seu universo A tem pelo menos dois elementos.

Proposição 2.9: *Em toda TK-álgebra temos* $\bullet a \to \bullet b \leq \bullet(a \to b)$.

Demonstração: $\bullet a \to \bullet b = {\sim}\bullet a \vee \bullet b \leq \bullet{\sim}a \vee \bullet b \leq \bullet({\sim}a \vee b) = \bullet(a \to b)$.

4 Filtros e ideais nas TK-álgebras

Seja $\mathcal{B} = (B, 0, 1, \vee, {\sim})$ uma álgebra de Boole. Um *filtro* em $\mathcal{B}$ é definido por um conjunto não vazio $F \subseteq B$ tal que para todos $a, b \in B$ valham:

(i) $a \in F$ e $b \in F \Rightarrow a \wedge b$ F

(ii) $a \in F$ e $a \leq b \Rightarrow b \in F$.

Como para todo $a \in B$, $1 \geq a$, então, por (ii), $1 \in F$.

Dizemos que um filtro F é *próprio* se $F \neq B$. Dizemos que o filtro F é *primo* se é próprio e para todos $a, b \in B$ vale:

(iii) $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ ou $b \in F$.

A partir desta definição, se F é um filtro primo e $a \in B$, então $a \vee {\sim}a = 1 \in F$. Logo, $a \in F$ ou ${\sim}a \in F$, e como F é próprio, não é o caso que $a \wedge {\sim}a = 0 \in F$. Assim, exatamente a ou ${\sim}a \in F$.

Proposição 3.1: *Um filtro próprio F é primo se, e somente se, para todos a, b ∈ A vale* $a \to b \in F$ *ou* $b \to a \in F$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se F é um filtro primo, então F $\neq$ A. Agora, sejam a, $b \in$ A. Como $a \in$ F ou $\sim a \in$ F, então $a \vee \sim b \in$ F ou $\sim a \vee b \in$ F. Logo, $b \rightarrow a \in$ F ou $a \rightarrow b \in$ F.

($\Leftarrow$) Sejam a, $b \in$ A tais que $a \vee b \in$ F. Por hipótese, $a \rightarrow b \in$ F ou $b \rightarrow a \in$ F, ou seja, $\sim a \vee b \in$ F ou $\sim b \vee a \in$ F. Assim, $(a \vee b) \wedge (\sim a \vee b) \in$ F ou $(a \vee b) \wedge (\sim b \vee a) \in$ F, isto é, $b = (a \wedge \sim a) \vee b = (a \vee b) \wedge (\sim a \vee b) \in$ F ou $a = a \vee (b \wedge \sim b) = (a \vee b) \wedge (\sim b \vee a) \in$ F.

Seja $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, $\vee$, $\sim$, $\bullet$) uma TK-álgebra. Desde que $a \leq \bullet a$, se $a \in$ F, então $\bullet a \in$ F.

Definimos um *TK-filtro* em $\mathcal{A}$ por um filtro F $\subseteq$ A tal que para todo $a \in$ A vale:

(iv) a $\in$ F $\Rightarrow$ a $\in$ F.

Consideremos $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e F um TK-filtro primo em $\mathcal{A}$. A seguinte relação $\equiv_F$ é uma equivalência em $\mathcal{A}$:

$$a \equiv_F b \text{ see } a \rightarrow b \in F \text{ e } b \rightarrow a \in F.$$

Em (Rasiowa e Sikorski, 1968, p.63) a relação de equivalência definida acima é uma congruência para uma álgebra de Boole, isto é, $[a] \vee [b] = [a \vee b]$, $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$, $\sim [a] = [\sim a]$, $[a] \rightarrow [b] = [a \rightarrow b]$, [1] é a unidade e [0] é o zero de $\mathcal{A} \mid \equiv_F$. Também, a relação de ordem em $\mathcal{A} \mid \equiv_F$ é definida por $[a] \leq [b]$ see $a \rightarrow b \in$ F.

Proposição 3.2: *A álgebra quociente $\mathcal{A} \mid \equiv_F$ é uma TK-álgebra, definindo $\bullet[a] = [\bullet a]$.*

Demonstração: Resta verificar que:

(i) $\mid \equiv$F está bem definida:

$[a] = [b] \Rightarrow a \rightarrow b \in$ F e $b \rightarrow a \in$ F $\Rightarrow \sim a \vee b \in$ F e $\sim b \vee a \in$ F

(Caso 1) $\sim a \in$ F $\Rightarrow a \notin$ F $\Rightarrow \bullet a \notin$ F $\Rightarrow \sim \bullet a \in$ F $\Rightarrow \sim \bullet a \vee \bullet b \in$ F $\Rightarrow \bullet a \rightarrow \bullet b \in$ F.

$\sim a \in$ F $\Rightarrow a \notin$ F $\Rightarrow \sim b \in$ F $\Rightarrow b \notin$ F $\Rightarrow \bullet b \notin$ F $\Rightarrow \sim \bullet b \in$ F $\Rightarrow \sim \bullet b \vee \bullet a \in$ F $\Rightarrow \bullet b \rightarrow \bullet a \in$ F.

Portanto, $[\bullet a] = [\bullet b]$

(Caso 2) $\sim a \notin$ F $\Rightarrow a \in$ F $\Rightarrow \bullet a \in$ F $\Rightarrow \bullet a \vee \sim \bullet$b $\in$ F $\Rightarrow \bullet b \rightarrow \bullet a \in$ F.

$\sim a \notin$ F $\Rightarrow b \in$ F $\Rightarrow \bullet b \in$ F $\Rightarrow \sim \bullet a \vee \bullet b \in$ F $\Rightarrow \bullet a \rightarrow \bullet b \in$ F.

Assim, $[\bullet a] = [\bullet b]$.

(ii) □ $\mid \equiv$F preserva as propriedades de TK-álgebra:

$[a] \vee \bullet[a] = [a] \vee [\bullet a] = [a \vee \bullet a] = [\bullet a] = \bullet[a]$.

$\bullet[a] \vee \bullet[a \vee b] = [\bullet a] \vee [\bullet(a \vee b)] = [\bullet a \vee \bullet(a \vee b)] = [\bullet(a \vee b)] = \bullet[(a \vee b)]$.

$\bullet\bullet[a] = [\bullet\bullet a] = [\bullet a] = \bullet[a]$

Proposição 3.3: *A álgebra quociente $\mathcal{A} \mid \equiv_F$ é linearmente ordenada.*

Demonstração: Seja F um TK-filtro primo e consideremos que a, $b \in$ A. Segue daí, que $a \rightarrow b \in$ F ou $b \rightarrow a \in$ F, ou seja, $[a] \leq [b]$ ou $[b] \leq [a]$ e, portanto, $\mathcal{A} \mid \equiv_F$ é linearmente ordenada.

Proposição 3.4: *Seja $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e $1 \neq a \in A$. Então existe um filtro primo F em $\mathcal{A}$ que não contém a.*
Demonstração: Este é o conhecido Teorema do Ultrafiltro (Rasiowa e Sikorski, 1968, p.49).

Da mesma forma que trabalhamos com filtros podemos também trabalhar com ideais em uma TK-álgebra.

Seja $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim)$ uma álgebra de Boole. Um *ideal* em $\mathcal{A}$ é definido por um conjunto não vazio $I \subseteq A$, tal que para todos $a, b \in A$:

(i) $a \in I$ e $b \in I \Rightarrow a \vee b$ I

(ii) $b \in I$ e $a \leq b \Rightarrow a \in I$.

Como $a \geq 0$, para todo $a \in A$, então, por (ii), $0 \in I$.

Dizemos que um ideal I é *próprio* se $I \neq A$. Dizemos que o ideal I é *primo* se é próprio e para todos $a, b \in A$ vale:

(iii) $a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

Assim, se I é um ideal primo e $a \in A$, então $a \wedge \sim a = 0 \in I$. Logo, exatamente a ou $\sim a$ $\in$ I.

Seja $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ uma TK-álgebra. Dizemos que um ideal I é um *TK-ideal* em $\mathcal{A}$ se para todo $a \in A$ vale:

(iv) $a \in I \Rightarrow \bullet a \in I$.

Proposição 3.5: *Sejam $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ uma TK-álgebra e I um subconjunto de A. Então I é um TK-ideal primo see o complementar de I é um TK-filtro primo.*
Demonstração: Seja F o complementar de I. Por (Rasiowa, Sikorski, 1968, p. 47) I é um ideal primo see F é um filtro primo.

($\Rightarrow$) Se I é um TK-ideal primo e $a \in A$ então $\bullet a \in F \Leftrightarrow \sim\bullet a \in I \Leftrightarrow \bullet a \notin I \Leftrightarrow a \notin I \Leftrightarrow a \in F$. Logo, F é um TK-filtro primo.

($\Leftarrow$) Se F é um TK-filtro primo e $a \in A$ então $a \in I \Leftrightarrow \sim a \in F \Leftrightarrow a \notin F \Leftrightarrow \bullet a \notin F \Leftrightarrow \bullet a \in I$. Logo, I é um TK-ideal primo.

Sejam $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e I um TK-ideal primo em $\mathcal{A}$. Consideremos a seguinte relação $\equiv_I$ em $\mathcal{A}$:

$$a \equiv_I b \text{ see } \sim(a \to b) \in I \text{ e } \sim(b \to a) \in I.$$

Considerando F o complementar de I, a relação $\equiv_I$ definida em A é a mesma relação $\equiv_F$ definida para TK-filtros primos, visto que $\sim(a \to b) \in I$ e $\sim(b \to a) \in I$ são equivalentes a $a \to b \in F$ e $b \to a \in F$.

Assim, definindo então $\bullet[a] = [\bullet a]$ em $\mathcal{A} \mid \equiv_I$, a álgebra quociente $\mathcal{A} \mid \equiv_I$ é ainda uma TK-álgebra.

5 Teoremas de representação para as TK-álgebras

Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, ∨, ~), seja $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ a classe de todos os filtros primos de $\mathcal{A}$. Para cada $a \in$ A, seja h(a) o conjunto de todos os filtros F de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ para os quais $a \in$ F e, finalmente, seja **P**($\mathcal{A}$) a classe de todos os conjuntos h(a) tais que a ∈ A. O Teorema do Isomorfismo de Stone nos garante que h é um isomorfismo Booleano de $\mathcal{A}$ sobre **P**($\mathcal{A}$), ou seja, toda álgebra Booleana é isomorfa a um corpo de conjuntos, isto é, a uma coleção não vazia de subconjuntos de um conjunto X, fechada em relação às operações de união, interseção e complementar (Rasiowa e Sikorski, 1968, p.83).

O resultado seguinte é uma extensão desse resultado para as TK-álgebras.

Proposição 4.1: *Para toda TK-álgebra $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, ∨, ~, •) existe um monomorfismo h de $\mathcal{A}$ num espaço quase topológico de conjuntos.*

Demonstração: Através dos isomorfismos de Stone, sabemos que existe um monomorfismo h da álgebra Booleana $\mathcal{A}$ = (A, 0, 1, ∨, ~) em um corpo de subconjuntos de um conjunto S ≠ ∅.

A seguir, introduzimos uma quase topologia em S da seguinte maneira. Para cada conjunto X ⊆ S seja:

C(X) = ∩{h(a) / $a \in$ A, X ⊆ h(a) e a = •a}.

Devemos mostrar que:

(i) X ⊆ C(X)

(ii) X ⊆ Y ⇒ C(X) ⊆ C(Y)

(iii) C(C(X)) ⊆ C(X)

(iv) h(•a) = C(h(•a)) = C(h(a)).

(i) É conseqüência direta da definição.

(ii) Seja a∈A tal que a = •a e Y ⊆ h(a). Como X ⊆ Y então X ⊆ h(a). Assim, {h(a) / a∈A, Y ⊆ h(a) e a = •a} ⊆ {h(a) / a∈A, X ⊆ h(a) e a = •a}. Logo, C(X) = ∩{h(a) / a∈A, X ⊆ h(a) e a = •a} ⊆ ∩ {h(a) / a∈A, Y ⊆ h(a) e a = •a} = C(Y).

(iii) Por (i), C(X) ⊆ C(C(X)). Por outro lado, se a ∈ A é tal que X ⊆ h(a) e a = •a então C(X) ⊆ h(a). Logo, {h(a) / a ∈ A, X ⊆ h(a) e a = •a} ⊆ {h(a) / a ∈ A, C(X) ⊆ h(a) e a = •a}. Portanto, C(C(X)) = ∩{h(a) / a ∈ A, C(X) ⊆ h(a) e a = •a} ⊆ ∩{h(a) / a ∈ A, X ⊆ h(a) e a = •a} = C(X).

(iv) C(h(•a)) = h(•a), pois, por (i), h(•a) ⊆ C(h(•a)). E, por outro lado, C(h(•a)) = ∩{h(b) / b ∈ A, h(•a) ⊆ h(b) e b = •b} ⊆ h(•a), pois •a = ••a e h(•a) ⊆ h(•a).

Agora, h(•a) = C(h(a)), pois sendo h um homomorfismo booleano e como $a \leq$ •a então h(a) ⊆ h(•a). Por (ii), C(h(a)) ⊆ C(h(•a)) = h(•a). E, reciprocamente, h(a) ⊆ h(b) ⇒ $a \leq b$ ⇒ •$a \leq$ •b ⇒ h(•a) ⊆ h(•b). Logo, h(•a) ⊆ ∩{h(b) / h(a) ⊆ h(b) e b = •b} = C(h(a)).

Teorema 4.2: *Cada TK-álgebra é uma sub-álgebra do produto direto de um sistema de TK-álgebras linearmente ordenadas.*

Demonstração: Seja **S** o sistema de todos os filtros primo de $\mathcal{A}$. Para cada F $\in$ **S**, seja $\mathcal{A}_F = \mathcal{A} \mid_{\equiv F}$ e consideremos o conjunto:

$$\mathbf{B} = \Pi_{F\in \mathbf{S}}\, \mathcal{A}_F.$$

Assim, aplicando a Proposição 3.3, **B** é o produto direto de TK-álgebras linearmente ordenadas $\{\mathcal{A}_F \,/\, F \in \mathbf{S}\}$.

Para cada $x \in \mathcal{A}$, seja $\varphi(x)$ o elemento $\{[x]_F\}_{F\in\mathbf{S}}$ de **B**.

A função φ preserva operações: pela Proposição 3.2, para cada filtro primo, a operação φ preserva as operações da TK-álgebra.

A função φ é injetora: sejam x, y $\in$ A tal que $x \neq y$. Assim, $x \not\leq y$ ou $y \not\leq x$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $x \not\leq y$, ou seja, $x \to y \neq 1$. Pela Proposição 3.4, existe um filtro primo F em $\mathcal{A}$ que não contém $x \to y$. Segue que em $\mathcal{A} \mid_F$, $[x]_F \not\leq [y]_F$ e, portanto, $[x]_F \neq [y]_F$, ou seja, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

6 Os teoremas de representação e a lógica TK

Estes teoremas de representação são usados na demonstração da completude da lógica proposicional TK que tem como modelos algébricos exatamente a variedade das TK-álgebras.

A lógica proposicional TK é determinada sobre a seguinte linguagem proposicional $L(\neg, \vee, \to, \blacklozenge, p_1, p_2, p_3, ...)$, pelo seguinte:

Axiomas:

Axiomas do Cálculo Proposicional Clássico (CPC) +

Ax_{TK1} $\mathbf{A} \to \blacklozenge\mathbf{A}$

Ax_{TK2} $\blacklozenge\blacklozenge\mathbf{A} \to \blacklozenge\mathbf{A}$

Regras de Dedução:

R_{TK1} *Modus Ponens* – MP

R_{TK2} $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \blacklozenge\mathbf{A} \to \blacklozenge\mathbf{B}$.

Os modelos algébricos de TK são caracterizados pelo que segue. Sejam **Var**(TK) o conjunto das variáveis proposicionais de TK, **For**(TK) o conjunto das fórmulas de TK e $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra.

Uma *valoração restrita* é uma função $v^\wedge$: **Var**(TK) $\to \mathcal{A}$, que atribui a cada variável de TK em um indivíduo de $\mathcal{A}$. Uma *valoração* é uma função v: **For**(TK) $\to \mathcal{A}$, que estende natural e unicamente $v^\wedge$ por:

$v(p) = v^\wedge(p)$

$v(\neg\mathbf{A}) = {\sim}v(\mathbf{A})$

$v(\mathbf{A}\vee\mathbf{B}) = v(\mathbf{A})\vee v(\mathbf{B})$

$v(\mathbf{A}\to\mathbf{B}) = v(\mathbf{A})\to v(\mathbf{B})$

$v(\blacklozenge\mathbf{A}) = \bullet v(\mathbf{A})$.

Como usualmente, os símbolos dos operadores dos membros da esquerda representam operadores lógicos enquanto os da direita representam operadores algébricos.

Seja $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra. Uma valoração v: **For**(TK) $\rightarrow \mathcal{A}$ é um *modelo* para um conjunto $\Delta \subseteq$ **For**(TK) se v(**A**) = 1, para cada fórmula **A** $\in \Delta$. Em particular, uma valoração v: **For**(TK) $\rightarrow \mathcal{A}$ é um modelo para **A** $\in$ **For**(TK) se v(**A**) = 1.

Uma fórmula **A** é *válida* em uma TK-álgebra $\mathcal{A}$ se cada valoração v: **For**(TK) $\rightarrow \mathcal{A}$ é um modelo para **A**.

Uma fórmula **A** é *TK-válida* quando é válida em toda TK-álgebra.

A correção do modelo algébrico dado pelas TK-álgebras consiste em mostrar que todo teorema de TK é uma fórmula TK-válida, o que, como em geral, não é muito difícil de se obter. Os teoremas de representação são usados para o resultado recíproco, conhecido como completude, que afirma que toda fórmula TK-válida é um TK-teorema.

A construção de uma lógica proposicional permite uma avaliação mais clara das relações entre lógica e álgebra e, neste caso particular, qual o papel desempenhado pelos operadores de Tarski.

Finalmente, a construção proposta neste artigo assume como sistemas básicos as álgebras de Boole, mas o que podemos alcançar com outros sistemas algébricos? As TK-álgebras introduzem um novo operador de modalidade (conseqüência) e resta compara-lo com os muitos outros operadores modais conhecidos na literatura.

NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. Algebras of consequence operators. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.23, n.1, p.19-30, 2005.

▪ *ABSTRACT: In this study we introduce the TK-algebras associated with the Tarski's consequence operator, present several properties of such algebras and demonstrate two theorems of representation. Thus we give ideas about a propositional logic associated with the variety of TK-algebras.*

▪ *KEYWORDS: Consequence operator; boolean algebra; algebric model.*

Referências:

MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional:* uma interação da álgebra e da lógica. Campinas: UNICAMP/CLE, 1987. 86p. (Coleção CLE, v.1)

RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974. 403p.

RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. *The mathematics of metamathematics*. 2.ed. Waszawa: PWN - Polish Scientific, 1968. 519p.

TARSKI, A. *Logic, semantics, mathematics*. Oxford: Clarendon, 1956. 430p.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*: basic theory of consequence operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. Chap.1, p.7-75. (Synthese Library, v.199).

Recebido em 11.05.2004.

Aprovado após revisão em 17.03.2005.