

UMA VERSÃO LINEAR DA FÓRMULA TRAPEZOIDAL ESTENDIDA LOCALMENTE UNIDIMENSIONAL

André Luiz NOGUEIRA¹
Maurílio BOAVENTURA¹
Heloisa Helena Marino SILVA¹

- RESUMO: Neste trabalho, propomos uma linearização da fórmula trapezoidal estendida localmente unidimensional (ETF-LOD), apresentada por Chawla e Al-Zanaidi (2001), para integração no tempo da equação de reação-difusão não-linear, $u_t = \nu(u_{xx} + u_{yy}) + p(u)$, em um espaço bidimensional. Resultados numéricos mostram que a linearização proposta diminui substancialmente o tempo de processamento sem um aumento significativo do erro.
- PALAVRAS-CHAVE: Equação de reação-difusão; fórmula trapezoidal estendida; método de diferenças finitas; estabilidade.

1 Introdução

Vários métodos numéricos têm sido propostos, na literatura, para a resolução da equação de reação-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\nu \text{ constante}),$$

dentre os quais destacamos a fórmula trapezoidal estendida localmente unidimensional, denotada por ETF-LOD, a qual é de terceira ordem e incondicionalmente estável (Chawla e Al-Zanaidi, 2001). Este método é baseado na fórmula trapezoidal estendida, proposta por Jacques (1988), para a integração de problemas de valores iniciais da forma

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

¹Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP, CEP: 15054-000, São José do Rio Preto, SP, Brasil. E-mail: andrepos@ig.com.br / maurilio@ibilce.unesp.br / hsilva@ibilce.unesp.br

e cujas equações são dadas por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_n + 8f_{n+1} - \hat{f}_{n+2}), \quad \hat{f}_{n+2} = f(x_{n+2}, y_{n+2}),$$

e

$$\hat{y}_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}.$$

Esta fórmula é L-estável (Lambert, 1991) e foi obtida por uma modificação da fórmula apresentada por Agarwal e Usmani (1985).

Neste trabalho propomos uma linearização da ETF-LOD para a obtenção de uma aproximação para a solução da equação de reação-difusão não-linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(u), \quad (\nu \text{ constante}). \quad (1)$$

Para este fim, primeiramente reescrevemos a equação (1) como duas EDPs, que representam o problema original em uma dimensão (Mitchell e Griffiths, 1987), da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}u_t = \nu u_{xx} + p(u), \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}u_t = \nu u_{yy} + p(u). \quad (3)$$

O passo seguinte é aplicar a fórmula trapezoidal estendida para cada uma das equações obtidas. A primeira equação, dada por (2), é integrada no intervalo $(t_n, t_{n+\frac{1}{2}})$ e a segunda equação, dada por (3), no intervalo $(t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$.

Como dito anteriormente, para a equação de reação-difusão não-linear, propomos uma linearização que consiste em avaliarmos a função $p(u)$ no tempo t_n e não nos tempos $t_{n+\frac{1}{2}}$ e t_{n+1} , ou seja,

$$\frac{1}{2}u_t = \nu u_{xx} + p(u)|_{t_n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}u_t = \nu u_{yy} + p(u)|_{t_n}.$$

A linearização apresentada acima diminui substancialmente o tempo de processamento sem um aumento significativo do erro, como pode ser observado nos resultados numéricos apresentados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2, apresentamos a fórmula trapezoidal estendida localmente unidimensional proposta por Chawla e Al-Zanaidi (2001); na seção 3, apresentamos uma linearização para essa fórmula; na seção 4, apresentamos os resultados numéricos obtidos com a fórmula linearizada e, finalmente, na seção 5, apresentamos algumas conclusões.

2 Fórmula trapezoidal estendida localmente unidimensional

Consideremos a equação de reação-difusão não-linear, dada por (1), com condição inicial:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y, \quad (4)$$

e condições de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= g_0(y, t), & u(l_x, y, t) &= g_1(y, t), \\ u(x, 0, t) &= f_0(x, t), & u(x, l_y, t) &= f_1(x, t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Para um inteiro positivo N , consideremos a malha espacial retangular (x_i, y_j) , $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, $i, j = 0, \dots, N + 1$, com incremento $\Delta x = \frac{l_x}{N + 1}$, $\Delta y = \frac{l_y}{N + 1}$ e $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\Delta t > 0$. Denotamos $u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n)$, $r_x = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $r_y = \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$.

Discretizando a derivada espacial na equação (2) pela fórmula de diferença centrada, para $j = 1, \dots, N$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) = \frac{2\nu}{\Delta x^2} [u_{i+1,j}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i-1,j}(t)] + 2p(u_{i,j}(t)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Tomando

$$u_j(t) = \begin{pmatrix} u_{1,j}(t) \\ u_{2,j}(t) \\ \vdots \\ u_{N-1,j}(t) \\ u_{N,j}(t) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$a_j(t) = \begin{pmatrix} u_{0,j}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N+1,j}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p(u_j(t)) = \begin{pmatrix} p(u_{1,j}(t)) \\ p(u_{2,j}(t)) \\ \vdots \\ p(u_{N-1,j}(t)) \\ p(u_{N,j}(t)) \end{pmatrix},$$

então

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j(t) = \frac{2\nu}{\Delta x^2} [a_j(t) - Ju_j(t)] + 2p(u_j(t)), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Aplicando, agora, a fórmula trapezoidal estendida para integração no tempo, em (5), no intervalo $(t_n, t_{n+\frac{1}{2}})$, temos:

$$\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n - 2r_x J u_j^{n+\frac{1}{2}} + 2r_x a_j^{n+\frac{1}{2}} + 2\Delta t p(u_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (6)$$

e

$$\begin{aligned} u_j^{n+\frac{1}{2}} &= u_j^n - \frac{r_x}{12} J [5u_j^n + 8u_j^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_j^{n+1}] + \frac{r_x}{12} [5a_j^n + 8a_j^{n+\frac{1}{2}} - a_j^{n+1}] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{12} [5p(u_j^n) + 8p(u_j^{n+\frac{1}{2}}) - p(\hat{u}_j^{n+1})]. \end{aligned} \quad (7)$$

Substituindo (6) no termo não linear de (7) e tomando $j = 1, \dots, N$, obtemos:

$$\left[I + \frac{2}{3}r_x J + \frac{1}{6}(r_x J)^2 \right] u_j^{n+\frac{1}{2}} = \left[I - \frac{1}{3}r_x J \right] u_j^n + \frac{5}{12}r_x a_j^n + \frac{r_x}{6} [4I + r_x J] a_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{r_x}{12} a_j^{n+1} + \frac{5}{12} \Delta t p(u_j^n) + \frac{\Delta t}{6} [4I + r_x J] p(u_j^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{12} p(\hat{u}_j^{n+1}). \quad (8)$$

Novamente, discretizando a derivada espacial na equação (3) pela fórmula centrada, tomando

$$p(v_i(t)) = \begin{pmatrix} p(u_{i,1}(t)) \\ p(u_{i,2}(t)) \\ \vdots \\ p(u_{i,N-1}(t)) \\ p(u_{i,N}(t)) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_i(t) = \begin{pmatrix} u_{i,1}(t) \\ u_{i,2}(t) \\ \vdots \\ u_{i,N-1}(t) \\ u_{i,N}(t) \end{pmatrix},$$

obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i(t) = \frac{2\nu}{\Delta y^2} [b_i(t) - Jv_i(t)] + 2p(v_i(t)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Aplicando a fórmula trapezoidal estendida para integração no tempo em (9), no intervalo $(t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$, obtemos:

$$\hat{v}_i^{n+\frac{3}{2}} = v_i^{n+1} - 2r_y J v_i^{n+1} + 2r_y b_i^{n+1} + 2\Delta t p(v_i^{n+1}) \quad (10)$$

e

$$v_i^{n+1} = v_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{r_y}{12} J [5v_i^{n+\frac{1}{2}} + 8v_i^{n+1} - \hat{v}_i^{n+\frac{3}{2}}] + \frac{r_y}{12} [5b_i^{n+\frac{1}{2}} + 8b_i^{n+1} - b_i^{n+\frac{3}{2}}] + \frac{\Delta t}{12} [5p(v_i^{n+\frac{1}{2}}) + 8p(v_i^{n+1}) - p(\hat{v}_i^{n+\frac{3}{2}})]. \quad (11)$$

Substituindo (10) no termo linear de (11) obtemos, para $i = 1, \dots, N$,

$$\left[I + \frac{2}{3}r_y J + \frac{1}{6}(r_y J)^2 \right] v_i^{n+1} = \left[I - \frac{1}{3}r_y J \right] v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}r_y b_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{r_y}{6} [4I + r_y J] b_i^{n+1} - \frac{r_y}{12} b_i^{n+\frac{3}{2}} + \frac{5}{12} \Delta t p(v_i^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{6} [4I + r_y J] p(v_i^{n+1}) - \frac{\Delta t}{12} p(\hat{v}_i^{n+\frac{3}{2}}). \quad (12)$$

O par de equações (8) e (12) descrevem o método ETF-LOD para a equação de reação-difusão (1). O número de sistemas não-lineares que aparecem em cada passo é $2N$, sistemas estes que podem ser resolvidos, por exemplo, pelo método de Newton.

A seguir apresentamos um processo de linearização dessa fórmula, que se mostrou bastante eficiente, conforme comprovam os resultados numéricos.

3 Linearização da fórmula trapezoidal estendida localmente unidimensional

Vimos anteriormente que o método ETF-LOD, aplicado à equação de reação-difusão, nos leva a resolver uma grande quantidade de sistemas não-lineares. Para tentar contornar essa situação, apresentamos, a seguir, um processo para uma linearização desse método. Com essa linearização a solução aproximada da equação é dada resolvendo-se sistemas lineares, o que representa uma diminuição considerável no tempo de processamento, sem aumentar muito a taxa do erro, como poderá ser observado nos testes apresentados posteriormente.

A idéia é substituir a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(u)$$

por duas equações que representam o problema original em uma dimensão (espacial), avaliando $p(u)$ no tempo t_n ,

$$\frac{u_t}{2} = \nu u_{xx} + p(u) \Big|_{t_n} \quad e \quad \frac{u_t}{2} = \nu u_{yy} + p(u) \Big|_{t_n}.$$

Discretizando a derivada espacial em $u_t = 2u_{xx} + 2p(u) \Big|_{t_n}$ pela fórmula de diferença centrada, para $j = 1, \dots, N$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}(t) = \frac{2\nu}{\Delta x^2} [u_{i+1,j}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i-1,j}(t)] + 2p(u_{i,j}(t)) \Big|_{t_n}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Utilizando as condições de fronteira de Dirichlet, as equações acima podem ser escritas na forma matricial:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j(t) = \frac{2\nu}{\Delta x^2} [a_j(t) - J u_j(t)] + 2p(u_j(t)) \Big|_{t_n}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Aplicando agora a ETF, dada por (8) e (12), no intervalo $(t_n, t_{n+\frac{1}{2}})$, temos:

$$\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n - 2r_x J u_j^{n+\frac{1}{2}} + 2r_x a_j^{n+\frac{1}{2}} + 2\Delta t p(u_j^n) \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned} u_j^{n+\frac{1}{2}} &= u_j^n - \frac{r_x}{12} J [5u_j^n + 8u_j^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_j^{n+1}] + \frac{r_x}{12} [5a_j^n + 8a_j^{n+\frac{1}{2}} - a_j^{n+1}] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{12} [5p(u_j^n) + 8p(u_j^{n+\frac{1}{2}}) - p(u_j^n)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo (14) em (15), e fazendo $j = 1, \dots, N$, obtemos:

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n - \frac{r_x}{12} J [5u_j^n + 8u_j^{n+\frac{1}{2}} - (u_j^n - 2r_x J u_j^{n+\frac{1}{2}} + 2r_x a_j^{n+\frac{1}{2}} + 2\Delta t p(u_j^n))] + \frac{r_x}{12} [5a_j^n + 8a_j^{n+\frac{1}{2}} - a_j^{n+1}] + \frac{\Delta t}{12} [5p(u_j^n) + 8p(u_j^{n+\frac{1}{2}}) - p(u_j^n)].$$

$$+ \frac{r_x}{12} [5a_j^n + 8a_j^{n+\frac{1}{2}} - a_j^{n+1}] + \frac{\Delta t}{12} [5p(u_j^n) + 8p(u_j^n) - p(u_j^n)].$$

Logo,

$$\left[I + \frac{2}{3}r_x J + \frac{1}{6}(r_x J)^2 \right] u_j^{n+\frac{1}{2}} = \left[I - \frac{1}{3}r_x J \right] u_j^n + \frac{5}{12}r_x a_j^n + \frac{r_x}{6} [4I + r_x J] a_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{r_x}{12} a_j^{n+1} + \Delta t p(u_j^n) + \frac{\Delta t}{6} r_x J p(u_j^n). \quad (16)$$

Novamente, discretizando a derivada espacial em $u_t = 2\nu u_{yy} + 2p(u)|_{t_n}$ pela fórmula centrada, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i(t) = \frac{2\nu}{\Delta y^2} [b_i(t) - Jv_i(t)] + 2p(v_i(t)) \Big|_{t_n}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Aplicando a fórmula trapezoidal estendida para integração no tempo em (17), no intervalo $(t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$, temos:

$$\hat{v}_i^{n+\frac{3}{2}} = v_i^{n+1} - 2r_y J v_i^{n+1} + 2r_y b_i^{n+1} + 2\Delta t p(v_i^n) \quad (18)$$

e

$$v_i^{n+1} = v_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{r_y}{12} J [5v_i^{n+\frac{1}{2}} + 8v_i^{n+1} - \hat{v}_i^{n+\frac{3}{2}}] + \frac{r_y}{12} [5b_i^{n+\frac{1}{2}} + 8b_i^{n+1} - b_i^{n+\frac{3}{2}}] + \frac{\Delta t}{12} [5p(v_i^n) + 8p(v_i^n) - p(v_i^n)]. \quad (19)$$

Substituindo (18) em (19) para $i = 1, \dots, N$, obtemos:

$$\left[I + \frac{2}{3}r_y J + \frac{1}{6}(r_y J)^2 \right] v_i^{n+1} = \left[I - \frac{1}{3}r_y J \right] v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}r_y b_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{r_y}{6} [4I + r_y J] b_i^{n+1} - \frac{r_y}{12} b_i^{n+\frac{3}{2}} + \frac{5}{12}\Delta t p(v_j^n) + \frac{\Delta t}{6} [4I + r_y J] p(v_i^n) - \frac{\Delta t}{12} p(v_i^n). \quad (20)$$

Logo,

$$\left[I + \frac{2}{3}r_y J + \frac{1}{6}(r_y J)^2 \right] v_i^{n+1} = \left[I - \frac{1}{3}r_y J \right] v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}r_y b_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{r_y}{6} [4I + r_y J] b_i^{n+1} - \frac{r_y}{12} b_i^{n+\frac{3}{2}} + \Delta t p(v_j^n) + \frac{\Delta t}{6} r_y J p(v_i^n).$$

Assim, o método linearizado é descrito pelas equações:

$$\left[I + \frac{2}{3}r_x J + \frac{1}{6}(r_x J)^2 \right] u_j^{n+\frac{1}{2}} = \left[I - \frac{1}{3}r_x J \right] u_j^n + \frac{5}{12}r_x a_j^n + \frac{r_x}{6} [4I + r_x J] a_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{r_x}{12} a_j^{n+1} + \Delta t p(u_j^n) + \frac{\Delta t}{6} r_x J p(u_j^n) \quad (21)$$

e

$$\begin{aligned} \left[I + \frac{2}{3}r_y J + \frac{1}{6}(r_y J)^2 \right] v_i^{n+1} &= \left[I - \frac{1}{3}r_y J \right] v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}r_y b_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{r_y}{6} [4I + r_y J] b_i^{n+1} \\ &\quad - \frac{r_y}{12} b_i^{n+\frac{3}{2}} + \Delta t p(v_i^n) + \frac{\Delta t}{6} r_y J p(v_i^n). \end{aligned} \quad (22)$$

As equações anteriores também poderiam ser obtidas substituindo-se na equação (8), $p(u_j^{n+\frac{1}{2}})$ e $p(\hat{u}_j^{n+1})$ por $p(u_j^n)$ e, na equação (12), $p(v_i^{n+\frac{1}{2}})$, $p(v_i^{n+1})$ e $p(v_i^{n+\frac{3}{2}})$ por $p(v_i^n)$. A seguir, apresentamos alguns resultados numéricos obtidos utilizando esse procedimento de linearização.

4 Resultados numéricos

Vamos avaliar o desempenho dos métodos não-linear ETF-LOD e linearizado ETF-LOD-L para a equação de reação-difusão não-linear (1) e (4). Consideramos para isso um problema-teste no qual utilizamos $N = 19$ e $l_x = l_y = 1$.

Seja, então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u^2(1-u), \quad 0 < x, y < 1, \quad t > 0,$$

com condição inicial dada por:

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{1 + e^{q(x+y)}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e com condições de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= \frac{1}{1 + e^{q(y-qt)}}, & u(1, y, t) &= \frac{1}{1 + e^{q(1+y-qt)}}, \\ u(x, 0, t) &= \frac{1}{1 + e^{q(x-qt)}}, & u(x, 1, t) &= \frac{1}{1 + e^{q(x+1-qt)}}. \end{aligned}$$

A solução exata é:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + e^{q(x+y-qt)}}.$$

No cálculo da solução do problema, usamos $\Delta t = 4$.

A seguir uma tabela é apresentada, na qual exibimos o erro máximo absoluto.

Tabela 1 - Erro máximo absoluto obtido pelos métodos ETF-LOD-L e ETF-LOD

t	ETF-LOD-L	ETF-LOD
4	9.9(-3)	1.8(-2)
8	3.1(-2)	5.2(-3)
12	4.8(-3)	8.0(-4)
16	6.8(-4)	1.1(-4)
20	9.2(-5)	1.5(-5)
24	2.2(-5)	2.0(-6)

Os programas foram testados em um micro computador AMD, 1GHz de clock e 256MB de memória RAM. A tabela a seguir contém os tempos de CPU (em segundos) dos métodos ETF e ETF-L.

Tabela 2 - Tempos de CPU, em segundos, dos métodos ETF e ETF-L

nº de iterações	ETF-LOD-L	ETF-LOD
1	5.0(-2)	312.6
3	11(-2)	993.6
5	17(-2)	1534.8

O gráfico a seguir mostra aproximações para $x = 0.35$ no instante de tempo $t = 12$, para os métodos descritos na tabela acima.

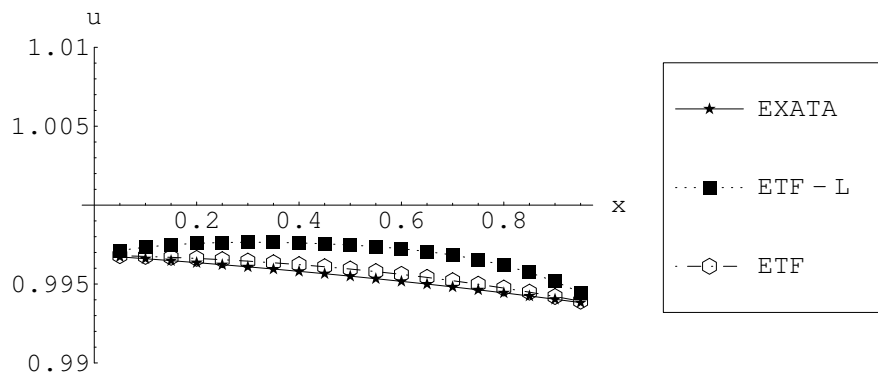


Figura 1 - Comparação entre as soluções numéricas e exata.

5 Conclusão

Neste trabalho, inicialmente, apresentamos a fórmula trapezoidal estendida para a equação diferencial parcial de reação-difusão não-linear (1) e (4), que

nos leva a resolver sistemas não-lineares que são difíceis de lidar e que possuem custo computacional alto, já que para cada passo devemos resolver $2N$ sistemas não-lineares. Para tentar contornar esse problema propomos uma linearização do método, obtendo, dessa forma, sistemas lineares que são de fácil manuseio. Essa linearização se mostrou bastante eficiente uma vez que o método obtido produziu uma aproximação da solução exata com precisão comparável à obtida pelo método ETF-LOD, não linearizado, como pode ser observado na Tabela 1 e na Figura 1. Além disso, a linearização diminuiu drasticamente o esforço computacional, como pode ser observado na Tabela 2.

Agradecimentos

À CAPES pela bolsa de pós-graduação concedida ao primeiro autor.

NOGUEIRA, A. L.; BOAVENTURA, M.; SILVA, H. H. M. A linear version of the locally one-dimensional extended trapezoidal formulae. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.23, n.1, p.93-102, 2005.

- **ABSTRACT:** We present a linear version of the locally one-dimensional extended trapezoidal formulae (ETF-LOD), proposed by Chawla and Al-Zanaidi (2001), for time integration of the non-linear reaction-diffusion equation in two dimensions space, $u_t = \nu(u_{xx} + u_{yy}) + p(u)$. Numerical results show that machine time processing is substantially reduced without a significant increase in error when linearization is used.
- **KEYWORDS:** Reaction-diffusion equation; extended trapezoidal formulae; finite difference schemes; stability.

Referências

- AGARWAL, R. P.; USMANI, R. A. An A-stable extended trapezoidal rule for the numerical integration of ordinary differential equations. *Comput. Math. Appl.*, Oxford, v.11, p.1183-1191, 1985.
- CHAWLA, M. M.; AL-ZANAIDI, M. . An extended trapezoidal formula for the diffusion equation in two space dimensions. *Comput. Math. Appl.*, Oxford, v.42, p.157-168, 2001.
- JACQUES, I. B. Extended one-step methods for the numerical solution of ordinary differential equation, *Intern. J. Computer Math.*, Loughborough, v.29, p.247-255, 1989.
- LAMBERT, J. D. *Numerical methods for ordinary differential Systems*. Chichester: J. Wiley, 1991. 293p.
- MITCHELL, A. R.; GRIFFITHS, D. F. *The finite difference method in partial differential equations*. Chichester: J. Wiley, 1987. 272p.

Recebido em 18.06.2004.

Aprovado após revisão em 08.04.2005.