

# USO DE MÉTODOS BAYESIANOS EM TESTES DE VIDA ACELERADOS ASSUMINDO A DISTRIBUIÇÃO WEIBULL-EXPONENCIADA E O MODELO LEI DE POTÊNCIA INVERSA

Denilton da Silva VIEIRA<sup>1</sup>  
Jorge Alberto ACHCAR<sup>1</sup>  
Vicente Garibay CANCHO<sup>2</sup>

- RESUMO: Neste artigo, exploramos o uso de técnicas de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) para desenvolver uma análise Bayesiana para testes de vida acelerados considerando a distribuição Weibull-exponenciada e o modelo da lei de potência inversa. Assumindo dados com censura de tipo II, consideramos uma análise clássica e uma análise Bayesiana assumindo densidades *a priori* informativas para os parâmetros do modelo, onde obtemos a densidade preditiva para uma observação futura e propomos um critério que pode ser usado em problemas de controle de qualidade. Ilustramos a metodologia com um exemplo numérico.
- PALAVRAS-CHAVE: Distribuição Weibull-exponenciada; testes de vida acelerados; densidades preditivas; MCMC.

## 1 Introdução

Um teste de vida acelerado (TVA) de um produto é comumente usado para reduzir o tempo de teste e os custos operacionais. O teste é realizado submetendo-se as unidades em teste a condições de estresse mais severas que as de uso normal. Por exemplo, se as falhas por corrosão ocorrem sob temperatura e umidade sob condições normais, então o mesmo tipo de corrosão acontecerá mais rapidamente em um ambiente úmido sob temperatura elevada. Existem vários métodos para a

---

<sup>1</sup>Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, CEP 13565-905, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: [denisnog@yahoo.com.br](mailto:denisnog@yahoo.com.br) / [jachcar@power.ufscar.com.br](mailto:jachcar@power.ufscar.com.br)

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - USP, Caixa Postal 668, CEP 13560-970, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: [gariby@icmc.usp.br](mailto:gariby@icmc.usp.br)

condução de um teste acelerado. O método mais simples tanto do ponto de vista físico quanto da análise e inferência estatística e que será adotado, é conhecido como teste acelerado de estresse constante (Nelson, 1990). Esse teste acelerado envolve a escolha de vários níveis de um ou mais tipos de variável estresse, e daí se executa um teste de vida de estresse constante para cada uma das combinações dos níveis de estresse. Os resultados obtidos nas condições aceleradas são extrapoladas para as condições normais de uso. Uma análise paramétrica de dados de TVA depende em grande parte do modelo escolhido para a distribuição do tempo de vida e a relação dos parâmetros com a variável de estresse. Para a relação parâmetro-estresse, existem alguns modelos empíricos comumente usados em engenharia, tais como o modelo de Arrhenius, Eyring e de Potência Inversa. Procedimentos para inferências com essa formulação são discutidos em Nelson (1990), Mann; Schafer e Singpurwalla (1974).

Normalmente, na indústria de componentes manufaturados, tais como semicondutores, é usado um TVA para determinar a confiabilidade dos produtos produzidos e para verificar se o processo em uma linha de produção está sob controle. Por exemplo, os engenheiros de qualidade com o objetivo de minimizar o custo e o tempo do experimento, consideram uma amostra aleatória de componentes em que todas as unidades são submetidas a teste com níveis de estresse,  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_k)$ , mais severos do que os usuais durante um período fixo de tempo  $Y$ . Eles verificam que a linha de produção está sob controle se a proporção de unidades na amostra é menor do que uma quantidade especificada, por um procedimento baseado em um teste de hipóteses. Frequentemente, os engenheiros da qualidade precisam encontrar o nível adequado de estresse e o período de tempo necessário para o teste de vida acelerado.

Neste artigo é considerada a distribuição Weibull-exponenciada (Mudholkar; Srivastava e Freimer, 1995) para os tempos de vida dos componentes, a Lei de Potência inversa para a relação parâmetro-estresse. Assumindo um esquema de censura do tipo II, isto é, o número de observações completas é fixado e a densidade *a priori* informativa para os parâmetros do modelo é a Weibull-exponenciada - Lei de Potência Inversa, determinamos a distribuição de uma observação futura no nível de estresse  $V_j$  e com essa distribuição é construído um planejamento de TVA que pode ser usado em controle de qualidade.

Na Seção 2, descreveremos o modelo Weibull-exponenciada-Lei de Potência Inversa. Na Seção 3, apresentaremos o procedimento de estimação de máxima verossimilhança e discutiremos um teste de aderência para o modelo Weibull - Lei de Potência Inversa e para o modelo exponencial-Lei de Potência inversa que são casos particulares do modelo Weibull-exponenciada. Na Seção 3, discutiremos o procedimento de inferência bayesiana do modelo Weibull-exponenciada - Lei de Potência Inversa e obtemos a densidade preditiva de uma observação futura a partir da qual construímos um planejamento de teste de vida para ser usado no controle de qualidade. Um exemplo na Seção 5 ilustra a metodologia apresentada.

## 2 Modelo Weibull-exponenciada – lei de potência inversa

Seja  $T \geq 0$  uma variável aleatória que representa o tempo de vida de um componente com função de densidade Weibull-exponenciada,

$$f(t|p, \theta, \lambda_i) = p\theta\lambda_i[1 - \exp(-(\lambda_i t)^p)]^{\theta-1} \exp[-(\lambda_i t)^p](\lambda_i t)^{p-1}, t \geq 0 \quad (1)$$

onde  $p > 0$ ,  $\theta > 0$  são os parâmetros de forma e  $\lambda_i > 0$  é o parâmetro de escala sob o nível de estresse Lei de Potência Inversa, isto é,

$$\lambda_i = \frac{V_i^\beta}{\alpha} \quad (2)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros desconhecidos tais que  $\alpha > 0$ ,  $-\infty < \beta < \infty$  e  $V_i$  denota o  $i$ -ésimo nível de estresse. Esse modelo será chamado Modelo Weibull-exponenciada-Lei de Potência Inversa (WE - PI). Como casos particulares, podemos obter o modelo exponencial - Lei de Potência Inversa (E - PI) quando  $p = 1$ ,  $\theta = 1$  e quando  $\theta = 1$  temos o modelo Weibull-Lei de Potência Inversa (W - PI). Alternativamente a relação entre o parâmetro de escala e nível de estresse dada em (2) pode ser representado pela relação,  $\lambda_i = \exp(-\beta_0 + \beta \log(V_i))$ , sendo  $-\infty < \beta_0 = \log(\alpha) < \infty$ . A lei de potência inversa considerada neste artigo é adequada para modelar o efeito de uma variável estresse em muitas aplicações industriais (por exemplo, voltagem). Outras formas paramétricas para modelar o efeito da variável de estresse também poderiam ser considerados (ver por exemplo, Nelson, 1990).

A função de sobrevivência para  $T$ , definida por  $S(t|p, \theta, \lambda_i) = P(T \geq t)$ , é dada por

$$S(t|p, \theta, \lambda_i) = 1 - [1 - \exp(-(\lambda_i t)^p)]^\theta. \quad (3)$$

A função risco de  $T$ , definida por  $h(t|p, \theta, \lambda_i) = f(t|p, \theta, \lambda_i)/S(t|p, \theta, \lambda_i)$ , é obtida pela expressões (1) e (3) e dada por

$$h(t|p, \theta, \lambda_i) = \frac{p\theta\lambda_i[1 - \exp(-(\lambda_i t)^p)]^{\theta-1} \exp(-(\lambda_i t)^p)(\lambda_i t)^{p-1}}{[1 - (1 - \exp(-(\lambda_i t)^p))^\theta]} \quad (4)$$

O modelo Weibull-exponenciada (WE) apresenta funções de risco do tipo *bathtub* ("banheira"), unimodal e monótona, isto é,  $h(t|p, \theta, \lambda_i)$  é

- (i) monótona crescente se  $p \geq 1$  e  $p\theta \geq 1$ ,
- (ii) monótona decrescente se  $p \leq 1$  e  $p\theta \leq 1$ ,
- (iii) forma de *bathtub* se  $p > 1$  e  $p\theta < 1$  e
- (iv) unimodal se  $p < 1$  e  $p\theta > 1$ .

As monotonicidades em (i) e (ii) são estritas exceto para a distribuição exponencial correspondente a  $p = \theta = 1$ .

A Figura 1, mostra alguns casos especiais da função risco (4).

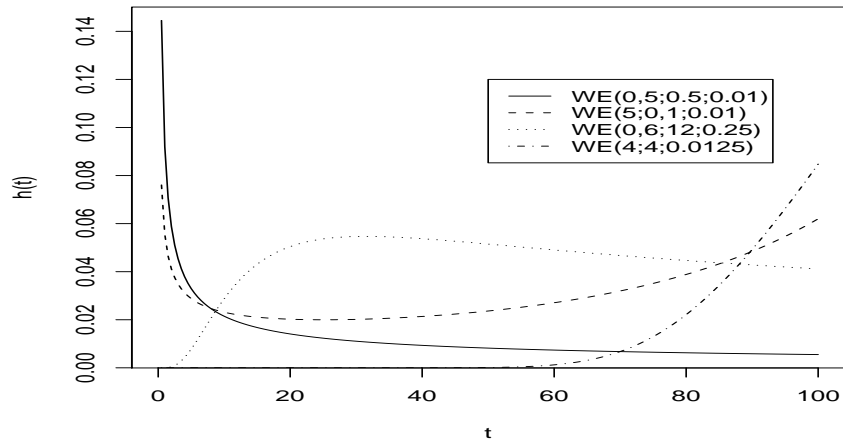


Figura 1 - Funções de risco do modelo Weibull-exponenciada ( $WE(p, \theta, \lambda)$ ).

As propriedades da distribuição WE foram estudadas em detalhe por Mudholkar e Hutson (1996), Nassar e Eissa (2003) e Nadarajah e Gupta (2005). Aplicações da distribuição WE em análise de dados de confiabilidade e de sobrevivência podem ser encontradas em Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995). Cancho; Bolfarine e Achcar (1999) apresentam análise clássica e bayesiana dos modelos regressão Weibull-exponenciada com dados censurados e Cancho e Bolfarine (2001) apresentam o modelo de mistura Weibull-exponenciada para análise de dados de sobrevivência com fração de cura.

### 3 Análise clássica do modelo Weibull-exponenciada – lei potência inversa

Considere um TVA com esquema de censura de tipo II com  $k$  níveis de estresse  $V_i, i = 1, \dots, k$ , isto é, o experimento termina quando  $r_i$  falhas são observadas entre as  $n_i$  unidades colocadas em teste no  $i$ -ésimo nível de estresse. Temos  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$  observações não-censuradas e  $n_i - r_i$  observações censuradas iguais a  $t_{ir_i}$ . A função de verossimilhança para os parâmetros do modelo WE - PI,  $\gamma = (p, \theta, \alpha, \beta)^T$ , dado o conjunto de observações, é dada por:

$$\begin{aligned}
L(\gamma|D) &\propto \theta^r p^r \alpha^{-pr} \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \quad (5) \\
&\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta-1} \\
&\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right\}^{(n_i - r_i)}
\end{aligned}$$

onde  $D$  é o conjunto de todas as observações e  $r = \sum_{i=1}^k r_i$  representa o número total de falhas observadas.

Os Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV) para  $p$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ , e  $\beta$  são valores que maximizam a função de verossimilhança em (5), o que equivale a maximizar o logaritmo da função de verossimilhança,  $\ell(\gamma|D) = \log(L(\gamma|D))$ , dada por,

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma|D) &\propto r \log(p) - rp \log(\alpha) + \beta p \sum_{i=1}^k r_i \log(V_i) + (p-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \log(t_{ij}) \quad (6) \\
&- \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p + (\theta-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \log\left(1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right) \\
&+ r \log(\theta) + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \log\left(1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right).
\end{aligned}$$

Equivalentemente, os EMV resultam da solução do sistema de equações  $S(\gamma) = \mathbf{0}$ , com  $S(\gamma) = \left(\frac{\partial \ell(\gamma|D)}{\partial p}, \frac{\partial \ell(\gamma|D)}{\partial \theta}, \frac{\partial \ell(\gamma|D)}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell(\gamma|D)}{\partial \beta}\right)$ . Inferências para  $\gamma = (p, \theta, \lambda, \alpha, \beta)^T$  podem ser obtidas da distribuição normal assintótica para os EMV  $\hat{\gamma} = (\hat{p}, \hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})^T$  (Cox e Hinkley, 1974), isto é,

$$(\hat{p}, \hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \sim N\left((p, \theta, \alpha, \beta), \mathbf{I}^{-1}(\hat{p}, \hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})\right) \quad (7)$$

onde  $\mathbf{I}(\hat{p}, \hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$  é a matriz de informação observada.

O teste de aderência do modelo Weibull contra a classe de alternativas irrestritas é complexo. Contudo, restringindo para o modelo WE podemos usar a estatística da razão de verossimilhança (Cox e Hinkley, 1974) para testar a adequabilidade do submodelo Weibull – Lei Potência Inversa (W - PI). A hipótese nula,  $H_{01} : \theta = 1$  corresponde ao submodelo Weibull e  $H_{02} : \theta = p = 1$  correspondente ao submodelo exponencial – Lei de Potência Inversa (do modelo

WE - PI). Se uma destas hipóteses ou ambas são rejeitadas na classe da família WE os submodelos são questionáveis.

A estatística da razão de verossimilhança para testar a adequabilidade do W - PI, isto é,  $H_{01} : \theta = 1$  contra  $H_{01} : \theta \neq 1$ , é dada por,

$$\Lambda_1 = -2 \left( \ell(\tilde{\alpha}_w, \tilde{\beta}_w, \tilde{p}_w, \theta = 1|D) - \ell(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}, \hat{\theta}|D) \right) \quad (8)$$

onde  $\tilde{\alpha}_w$ ,  $\tilde{\beta}_w$  e  $\tilde{p}_w$  são os EMV dos parâmetros do W - PI e  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{p}$  e  $\hat{\theta}$  são os EMV dos parâmetros WE - PI. Sob  $H_{01}$ ,  $\Lambda_1$  tem-se distribuição qui-quadrado com *um* grau de liberdade para tamanhos amostrais suficientemente grandes. Similarmente para testar a adequabilidade do modelo exponencial, a estatística da razão de verossimilhança é dada por:

$$\Lambda_2 = -2 \left( \ell(\tilde{\alpha}_e, \tilde{\beta}_e, p = 1, \theta = 1|D) - \ell(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}, \hat{\theta}|D) \right), \quad (9)$$

onde  $\tilde{\alpha}_e$  e  $\tilde{\beta}_e$  são os EMV dos parâmetros exponencial - Lei de Potência Inversa. Sob a hipótese  $H_{02} : \theta = p = 1$ ,  $\Lambda_2$  tem-se distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade para tamanhos amostrais suficientemente grande.

#### 4 Análise bayesiana do modelo WE – lei potência inversa

Como foi discutido na seção anterior, a distribuição dos EMVs somente são conhecidas assintoticamente, tornando-se assim um problema sério uma vez que em geral, trabalha-se com amostras não muito grandes. Um procedimento alternativo que pode contornar esse problema é o uso de métodos bayesianos. O uso de métodos bayesianos, além de ser uma alternativa de análise, permite ainda a incorporação de conhecimento *a priori* por meio de uma densidade *a priori* que seja informativa. Caso não exista conhecimento *a priori*, ou seja difícil expressá-lo, considera-se densidades *a priori* não informativas.

Para representar o grau de conhecimento sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$ , consideramos as seguintes distribuições *a priori*:

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \beta &\sim N(\mu, \sigma^2), \\ p &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ \theta &\sim \Gamma(a_3, b_3), \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\Gamma(a_i, b_i)$  denota uma distribuição Gama com média  $a_i/b_i$  e variância  $a_i/b_i^2$ ,  $N(\mu, \sigma^2)$  denota uma distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , e  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $\mu$ ,  $\sigma^2$  são constantes fixadas, baseadas na informação *a priori* de um especialista e da análise preliminar dos dados.

Assumindo independência entre os parâmetros, a densidade *a priori* conjunta para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$  é dada por:

$$\pi(\alpha, \beta, p, \theta) \propto \alpha^{a_1-1} p^{a_2-1} \theta^{a_3-1} \exp \left( -\alpha b_1 - p b_2 - \theta b_3 - \frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \mu)^2 \right) \quad (11)$$

Combinando (5) e (11), a densidade *a posteriori* conjunta de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$  é dada por,

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha, \beta, p, \theta \mid D) &\propto \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \alpha^{a_1 - p r - 1} p^{a_2 + r - 1} \theta^{a_3 + r - 1} \times \\
&\times \exp\left(-\alpha b_1 - p b_2 - \theta b_3 - \frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta-1} \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right\}^{(n_i - r_i)} \quad (12)
\end{aligned}$$

onde  $D$  denota o conjunto de dados observados.

Observe que a densidade *a posteriori* conjunta (12) não é uma densidade padrão, portanto só podemos avaliar as densidades *a posteriori* marginais por meio de métodos de aproximação, tais como o método de Laplace (Tierney e Kadane, 1986) ou usando métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), tais como Gibbs sampling (Casela e George, 1992), Metropolis–Hastings (Chib e Greenberg, 1995) e o método de amostragem por rejeição adaptativa (Gilks e Wild, 1992), usada comumente na amostragem Gibbs. Nesta análise consideramos os métodos de simulação por serem de simples implementação computacional. Para obtermos uma amostra *a posteriori* das densidades marginais de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$ , fazemos uso do algoritmo de Gibbs Sampling que se baseia em sucessivas gerações das distribuições condicionais *a posteriori* de  $\pi(\alpha \mid \beta, p, \theta, D)$ ,  $\pi(\beta \mid \alpha, p, \theta, D)$ ,  $\pi(p \mid \alpha, \beta, \theta, D)$ ,  $\pi(\theta \mid \alpha, p, \beta, D)$ .

Da densidade *a posteriori* conjunta dada em (12) podemos mostrar que as densidades condicionais *a posteriori* para o algoritmo de Gibbs são dadas por

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha \mid \beta, p, \theta, D) &\propto \alpha^{a_1 - p r - 1} \exp\left(-\alpha b_1 - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta-1} \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right\}^{(n_i - r_i)}, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(\beta \mid \alpha, p, \theta, D) &\propto \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\
&\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \mu)^2\right) \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta-1} \\
&\prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right\}^{(n_i - r_i)}, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(p \mid \alpha, \beta, \theta, D) &\propto \alpha^{-pr} p^{a_2+r-1} \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} (t_{ij})^{p-1} \times \\
&\times \exp\left(-pb_2 - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} V_i^{\beta p} t_{ij}^p\right) \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta-1} \times \tag{15} \\
&\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right\}^{(n_i - r_i)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\pi(\theta \mid \alpha, \beta, p, D) &\propto \theta^{a_3+r-1} \exp(-\theta b_3) \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ij}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta-1} \times \\
&\times \prod_{i=1}^k \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{V_i^{\beta p} t_{ir_i}^p}{\alpha^p}\right)\right]^{\theta}\right\}^{(n_i - r_i)}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Observe que as densidades dadas em (13), (14), (15) e (16) não são conhecidas e precisamos usar o algoritmo de Metropolis–Hastings para gerar amostras para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$ . Alternativamente, podemos usar o Algoritmo Rejeição Adaptativa (ARS) para gerar amostras para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$ . O algoritmo ARS está implementada no software BUGS (Spiegelhalter; Best e Gilks, 1997).



#### 4.1 Densidade preditiva para uma observação futura

A densidade preditiva para uma observação futura em  $T_{(n+1)j}$ , onde  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  é o número de observações em teste, considerando um nível de estresse  $V_j$  é dada por (ver, por exemplo, Press, 1989),

$$\begin{aligned} f^j(t_{(n+1)j} | \underline{t}, \underline{v}) &= \int \int \int \int f_j(t_{(n+1)j} | \lambda_j, p, \theta) \pi(\alpha, \beta, p, \theta | D) d\alpha dp d\theta d\beta \\ &= E(f_j(t_{(n+1)j} | \alpha, \beta, p, \theta)) \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\pi(\alpha, \beta, p, \theta | \underline{t}, \underline{v})$  é a distribuição *a posteriori* conjunta de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$  dada por

(12) e  $f_j(t_{(n+1)j} | \lambda_j, p, \theta)$  é dada em (1) com  $\lambda_j = \frac{V_j^\beta}{\alpha}$ .

A integral em (17) não tem uma solução analítica. Neste caso podemos usar métodos aproximados de integração, tais como o método de Laplace (Tierney e Kadane, 1986); métodos de integração numérica ou usando métodos de simulação de MCMC. Como caso especial, suponha que temos  $S$  amostras Gibbs geradas da distribuição *a posteriori* para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  e  $\theta$ , isto é,  $\{(\alpha^{(s)}, \beta^{(s)}, p^{(s)}, \theta^{(s)}), s = 1, \dots, S\}$ ; uma estimativa de Monte Carlo de (17), é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{f}^j(t_{(n+1)j} | D) &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p^{(s)} \theta^{(s)} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \right)^{p^{(s)}-1} \times \\ &\times \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \right)^{p^{(s)}} \right) \times . \\ &\times \left[ 1 - \exp \left( - \left( t_{(n+1)j} \frac{V_j^{\beta^{(s)}}}{\alpha^{(s)}} \right)^{p^{(s)}} \right) \right]^{\theta^{(s)}-1} . \end{aligned} \quad (18)$$

##### 4.1.1 Densidade preditiva considerando $\theta = 1$ , $p$ e $\beta$ conhecidos

Quando  $\theta = 1$  em (5), a função de verossimilhança para  $\alpha$ ,  $p$  e  $\beta$  dado o conjunto de observações é dada por,

$$L(\alpha, \beta, p | D) \propto \frac{p^r}{\alpha^{pr}} \times \left( \prod_{i=1}^k V_i^{\beta p r_i} \right) \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{p-1} \right) \times \exp \left( - \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right) \quad (19)$$

onde  $A_i(p) = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^p + (n_i - r_i) t_{ir_i}^p$ . Observe que (19) é função de verossimilhança do modelo Weibull – Lei de Potência, onde o parâmetro de escala  $\lambda_i = \frac{V_i^\beta}{\alpha}$  muda

a cada nível de estresse. Considerando que  $p$  e  $\beta$  em (19) são conhecidos, pode-se mostrar que a densidade *a priori* de Jeffreys (Box e Tiao, 1973) para  $\alpha$  é dada por

$$\pi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}.$$

Combinando a densidade *a priori* não-informativa de Jeffreys e (19) encontramos que a densidade *a posteriori* para  $\alpha$  com  $p$  e  $\beta$  conhecidos dada por:

$$\pi(\alpha | D) = \frac{\alpha^{-(pr+1)} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)\right)}{\int_0^{+\infty} \alpha^{-(pr+1)} \times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)\right) d\alpha} \quad (20)$$

Usando o resultado

$$\int_0^{+\infty} x^{-(p+1)} e^{-ax^{-\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \times a^{-\frac{p}{\alpha}} \times \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad (21)$$

a função densidade *a posteriori* para  $\alpha$  é dada por,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha | D) &= \frac{p \times \left[ \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p) \right]^r}{\Gamma(r)} \times \alpha^{-(pr+1)} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^k V_i^{\beta p} A_i(p)\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Com  $\theta = 1$ , em (1) a função densidade de  $T_{(n+1)j}$  dado os parâmetros é dada por,

$$f_j(t_{(n+1)j} | \lambda_j, p) = p \lambda_j (t_{(n+1)j} \lambda_j)^{p-1} \exp\left(-((t_{(n+1)j} \lambda_j)^p)\right), \quad (23)$$

que é função de densidade da distribuição Weibull com parâmetro  $p$  e  $\lambda_j = \frac{V_j^\beta}{\alpha}$ . Como discutido anteriormente supondo que  $\beta$  e  $p$  em (23) são conhecidos, a função densidade preditiva para uma observação futura em um nível  $j$  do estresse  $V$ , é dada por,

$$f^j(t_{(n+1)j} | D) = \frac{r \left[ \frac{C}{p V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^{p-1}} \right]^r}{\left[ \frac{t_{(n+1)j}}{p} + \frac{C}{p V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^{p-1}} \right]^{r+1}} t_{(n+1)j} > 0. \quad (24)$$

onde  $C = \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p}$ . A função de densidade em (24) é a densidade da distribuição de Pareto.

De (24) pode-se demonstrar que o valor esperado para  $T_{(n+1)j}$  é dado por,

$$E^j(T_{(n+1)} | D) = \frac{r \left[ \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p} \right]}{(r-1) V_j^{\beta p} t_{(n+1)j}^{p-1}}, \quad r > 1 \quad (25)$$

e sua variância é dada por,

$$Var^j(T_{(n+1)j} | D) = \frac{r \left( \sum_{i=1}^k A_i V_i^{\beta} + d \right)^2}{(r-1)^2 (r-2) V_j^{2\beta p} t_{(n+1)j}^{2p-2} p^2}, \quad r > 2. \quad (26)$$

#### 4.2 Uso da densidade preditiva em controle de qualidade

Podemos usar a densidade preditiva  $f^j(t_{(n+1)j} | D)$  para formular procedimentos em controle de qualidade em testes de vida acelerados. Normalmente, engenheiros de qualidade selecionam amostras aleatórias de cada lote de componentes manufaturados para verificar se o processo em uma linha está sob controle. Para minimizar o custo e o tempo do experimento, eles consideram unidades em teste de vida com altos níveis de estresse  $V_j$  por um período de tempo fixo,  $Y_j$ .

Usando a densidade preditiva (17) e considerando uma probabilidade  $1 - \gamma$ , pode-se encontrar valores de  $Y_j$ , tal que  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | D) = 1 - \gamma$ , isto é,

$$\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | D) = \int_{Y_j}^{\infty} f(t_{(n+1)j} | D) dt_{(n+1)j} = 1 - \gamma. \quad (27)$$

Como a equação (27) não tem uma solução analítica, podemos obter valores de  $Y_j$  por meio de um método numérico (por exemplo, o método de quadratura Gaussiana) ou usando o método da composição (ver, por exemplo, Tanner e Wong, 1987), onde  $1 - \gamma$  é fixado.

No caso com  $\theta = 1$  e  $\beta$  e  $p$  conhecidos, a densidade preditiva para uma observação futura é dada em (24). Nesse caso a equação em (27) resulta em,

$$\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j | D) = \int_{Y_j}^{\infty} \frac{r \times \left(\frac{C}{V_j^{\beta p}}\right)^r p t_{(n+1)j}^{p-1}}{\left(t_{(n+1)j}^p + \frac{C}{V_j^{\beta p}}\right)^{r+1}} dt_{(n+1)j} = 1 - \gamma \quad (28)$$

onde  $C = \sum_{i=1}^k A_i(p) V_i^{\beta p}$ . Resolvendo a integral dada (28), encontramos,

$$\left(\frac{C}{V_j^{\beta p}}\right)^r \times \left(\frac{1}{(Y_j^p + \frac{C}{V_j^{\beta p}})}\right)^r = 1 - \gamma \quad (29)$$

A partir de (29), é possível então determinar os valores de  $Y_j$  e  $V_j$ . Assim,

- fixando-se um nível  $V_j$  de estresse o período de tempo  $Y_j$  a ser considerado no teste de vida acelerado é dado por:

$$Y_j = \left[ \frac{C[1(-1-\gamma)^{\frac{1}{r}}]}{V_j^{\beta p}(1-\gamma)^{\frac{1}{r}}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (30)$$

- fixando-se o período de tempo  $Y_j$  de aplicação do teste de vida acelerado fixo, nível de estresse  $V_j$  a ser considerado é dado por:

$$V_j = \left\{ \frac{C \left[ 1 - (1-\gamma)^{\frac{1}{r+c}} \right]}{(1-\gamma)^{\frac{1}{r}} Y_j^p} \right\}^{\frac{1}{\beta p}} \quad (31)$$

Encontrados os valores de  $Y_j$  e  $V_j$  tais que,  $\Pr(T_{(n+1)j} > Y_j \mid D) = 1 - \gamma$  seja satisfeito, e definindo  $\pi^j = \Pr(T_{(n+1)j} \leq Y_j \mid D)$ , podemos colocar  $m$  unidades novas para serem testadas no nível de estresse,  $V_j$ , e observar seus tempos de sobrevivência durante um período fixo de tempo  $Y_j$  e considerar o teste de hipóteses,  $H_0 : \pi^j \leq \gamma$  (lote aprovado na inspeção por amostragem) contra  $H_1 : \pi^j > \gamma$  (lote não aprovado na inspeção por amostragem) supondo que o número  $x$  de falhas observadas no período de tempo  $Y_j$ , no nível de estresse  $V_j$ , na amostra de tamanho  $m$ , tenha uma distribuição Binomial, isto é,  $X \sim Bin(m, \pi^j)$ .

Seja  $W$  o número de componentes que falharam ( $W \leq m$ ) durante o teste. Se  $m$  é grande ( $m \geq 30$ ) então temos,

$$W \sim N \{ m\pi^j; m\pi^j(1 - \pi^j) \},$$

e um critério de controle da qualidade pode ser baseado no teste de hipótese usual, isto é, o lote não será aprovado na inspeção por amostragem se  $Z \geq z_\alpha$ , onde

$$Z = \frac{W - m\pi^j}{\sqrt{m\pi^j \times (1 - \pi^j)}} \sim N \{0, 1\},$$

e  $\alpha$  é o nível de significância e  $z_\alpha$  é tal que  $\Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ .

## 5 Aplicação

Para ilustrar a metodologia apresentada anteriormente consideramos o conjunto de dados completos sem censuras introduzido por Nelson (1990) (Tabela 3.1, p.129). Os dados referem-se ao tempo de ruptura de um tipo de isolamento de fluidos sob vários níveis de voltages (kv). Na Tabela 1, apresentamos algumas medidas descritivas desse conjunto de dados. Esses dados foram analisados com uma perspectiva clássica por Nelson (1990), considerando a distribuição Weibull para o tempo de vida e a lei de potência inversa para a variável de estresse.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos dados de tempo de ruptura de um tipo de isolamento de fluidos

Níveis de voltage ( $V_i$ )	$n_i$	Média	Mediana	Desvio-padrão
26	3	1.303,00	1.579,50	1.183,43
28	5	356,22	110,29	422,93
30	11	75,78	43,40	71,91
32	15	41,16	13,95	59,79
34	19	14,36	6,50	18,88
36	15	4,61	2,58	6,63
38	8	0,92	0,73	0,72

### 5.1 Análise clássica

Para os dados de Nelson (1990) (Tabela 1), ajustando o modelo paramétrico Weibull-exponencia – Lei de Potência Inversa, as estimativas de máxima verossimilhança (EMV) foram obtidas maximizando-se o log-verossimilhança dada em (6) e utilizando a sub-rotina MaxBFGS do aplicativo Ox.

As EMV dos parâmetros dos modelos WE - PI são dadas por  $\hat{\alpha} = 5,993 \times 10^{27}(3,54914 \times 10^{28})$ ,  $\hat{\beta} = 17,654(1,6483)$ ,  $\hat{p} = 0,60083(0,19344)$ ,  $\hat{\theta} = 1,6266(0,99458)$ . Cada valor entre parênteses ao lado das estimativas representa a raiz quadrada do correspondente elemento diagonal de  $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}, \hat{\theta})$  onde  $\mathbf{I}(\alpha, \beta, p, \theta)$  é a matriz de informação observada. Se admitirmos normalidade assintótica para a distribuição dos EMV,  $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}, \hat{\theta})$  corresponde à estimativa da matriz de covariância assintótica, e pode ser utilizada para obter inferências sobre os parâmetros.

A estatística da razão de verossimilhança para testar  $H_{01} : \theta = 1$  em (8) resultou em  $\Lambda_1 = 0,71147$ , com valor estimado de p-valor igual 0,599, indicando um ajuste adequado do Modelo Weibull – Lei de Potência Inversa. As estimativas de máxima verossimilhança (desvio padrões assintóticos) dos Modelos Weibull – Lei de Potência Inversa foram dadas por,  $\hat{\alpha} = 1,4548 \times 10^{28}(8,17524 \times 10^{28})$ ,  $\hat{\beta} = 17,730(1,6068)$  e  $\hat{p} = 0,77656(0,068346)$ .

A estatística da razão de verossimilhança para testar  $H_{01} : \theta = 1; p = 1$  em (9) resultou em  $\Lambda_2 = 10,15177$  (2 graus de liberdade) com uma estimativa do p-valor < 0,007, que indicou um ajuste inadequado do Modelo Exponencial – Lei de Potência Inversa para o conjunto de dados de Nelson (1990).

### 5.2 Análise Bayesiana

#### Modelo Weibull-exponenciada – Lei de Potência Inversa

Para analisarmos os dados de Nelson (1990) descritos anteriormente, com uma perspectiva Bayesiana, inicialmente é considerando o modelo Weibull-Exponenciada

– Lei de Potência Inversa (1) com  $\lambda_i = \exp(-\beta_0 + \beta \log(V_i))$  e densidade *a priori* dada em (10), com  $\beta_0 = \log(\alpha) \sim N(0, 10^6)$ ,  $\beta \sim N(0, 10^6)$ ,  $p \sim \Gamma(0, 1, 0, 1)$  e  $\theta \sim \Gamma(0, 1, 0, 1)$ . Com essa escolha foram geradas duas cadeias paralelas cada uma com 220.000 iterações; monitorou-se a convergência da amostras Gibbs usando o método de Gelman e Rubin (1992) que utiliza a técnica de análise de variância para determinar se mais iterações são necessárias. Para cada parâmetro as 20.000 primeiras iterações foram descartadas para eliminar o efeito dos valores iniciais, em seguida foram tomadas amostras de 20 em 20 totalizando uma amostra final de tamanho 20.000. O amostrador de Gibbs foi implementado usando o aplicativo Winbugs. Na Tabela 2, reportamos o resumo *a posteriori* dos parâmetros do modelo juntamente com os resultados da estimativa dos fatores de redução de escala potencial  $\hat{R}$  (Gelman e Rubin, 1992), para todos os parâmetros. Observamos valores bastante próximos de *um*, o que indica que as cadeias convergiram.

Tabela 2 - Sumário *a posteriori* para o Modelo Weibull-exponenciada – Lei de Potência Inversa

Parâmetros	Média	Mediana	D.P	Int. Cred. (95%)	$\hat{R}$
$\beta_0$	64,94	64,85	5,413	(55,31 ; 76,32)	1,017
$\beta_1$	18,00	17,97	1,506	(15,36 ; 21,2)	1,001
$p$	0,603	0,575	0,194	(0,003588 ; 1,062000)	1,001
$\theta$	2,151	1,693	1,611	(0,03713 ; 6,528)	0,993

Na Figura 2, temos as densidades *a posteriori* marginais aproximadas para o modelo de regressão Weibull-Exponenciada – Lei de Potência Inversa considerando os 20.000 pontos amostrais gerados.

### Modelo Weibull – Lei de Potência Inversa

Como foi anteriormente observado, o modelo WE - PI em (1) com  $\theta = 1$  é o modelo Weibull – Lei de Potência Inversa (W - PI). Para analisar os dados de Nelson (1990), consideramos agora o modelo W - PI, em que, como no caso da análise do modelo WE - PI, o parâmetro de forma  $p$  é suposto constante e o parâmetro de escala muda com o nível de estresse por meio da relação (Lei de Potência Inversa),  $\lambda_i = \exp(-\beta_0 + \beta \log(V_i))$ . Considerando as densidades *a priori* para os parâmetros do modelo W - PI, com,  $\beta_0 = \log(\alpha) \sim N(0, 10^6)$ ,  $\beta \sim N(0, 10^6)$  e  $p \sim \Gamma(0, 1, 0, 1)$ , com essa escolha geramos duas cadeias separadas de Gibbs, cada uma com 120.000 iterações e utilizamos o método de Gelman e Rubin (1992) para verificar a convergência das cadeias. Para cada parâmetro as 20.000 primeiras iterações foram descartadas para eliminar o efeito do valores iniciais e daí foram tomadas amostras de 10 em 10 o que totaliza uma amostra final de tamanho 20.000.

As quantidades *a posteriori* de interesse obtidas a partir das amostras selecionadas são dadas na Tabela 3, onde observamos que os fatores de redução

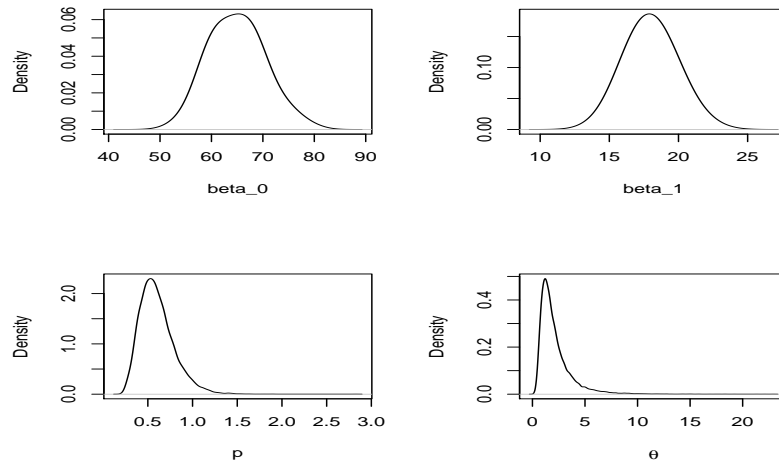


Figura 2 - Densidades marginais *a posteriori* aproximadas dos parâmetros do modelo Weibull-exponenciada – lei de potência inversa.

potencial são menores de 1.1 ( $\sqrt{\hat{R}} < 1.1$ ), indicando a convergência das amostras geradas.

Tabela 3 - Sumário *a posteriori* para o modelo Weibull – lei de potência inversa

Parâmetros	Média	Mediana	D.P.	Int. Cred. (95%)	$\hat{R}$
$\beta_0$	65,11	65,1	4,675	(0,3207 ; 74,58)	0,9916
$\beta_1$	17,8	17,8	1,337	(15,33 ; 20,51)	0,9959
$p$	0,7656	0,7636	0,06817	(0,6376 ; 0,9025)	1,0001

Na Figura 3, temos as densidades marginais *a posteriori* aproximadas considerando os 20.000 pontos amostrais gerados.

Para comparar o ajuste dos modelos Weibull-Exponenciada – Lei de Potência Inversa (1) e Weibull – Lei de Potência Inversa, aos dados de Nelson(1990), usamos alguns critérios Bayesianos existentes, como o critério BIC (*Bayes Information Criterion*) e o critério DIC (*Deviance Information Criterion*) (ver, Spiegelhalter; Best e Gilks, 2002). Na Tabela 4, reportamos a estimativa do BIC e do DIC baseada nas amostras Gibbs de cada modelo. As estimativas do BIC e DIC, indicam que o modelo Weibull – Lei de Potência Inversa se ajusta melhor aos dados de Nelson(1990).

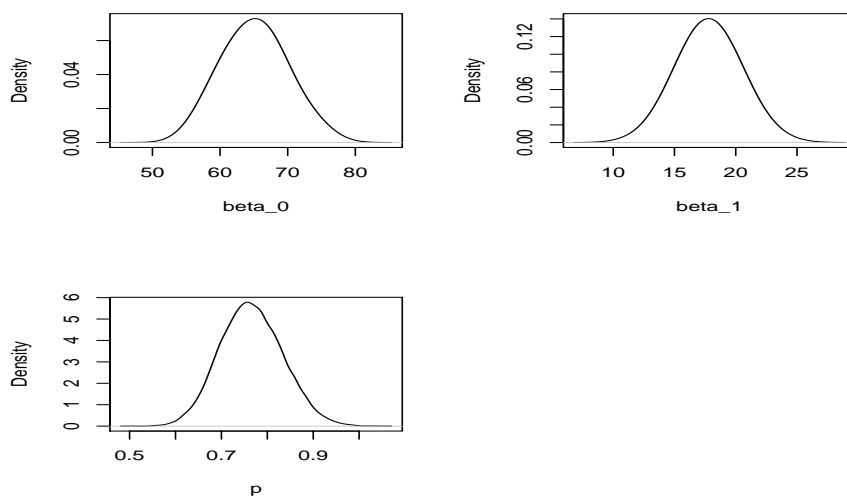


Figura 3 - Densidades marginais *a posteriori* aproximadas dos parâmetros do modelo Weibull – lei de potência inversa.

Podemos chegar a mesma conclusão ao observar o intervalo de credibilidade do parâmetro  $\theta$  no modelo WE - PI, pois contém o valor  $\theta = 1$ .

Tabela 4 - Critérios BIC e DIC

Modelo	BIC	DIC
Weibull – Lei de Potência Inversa	608,196	607,000
Weibull-exponenciada – Lei de Potência Inversa	612,962	608,500

### Uso de densidade preditiva em controle de qualidade

Aplicando o procedimento descrito na Subseção 4.2, mostramos na Figura 4, as densidades preditivas aproximadas para uma observação futura  $Y_{(n+1)j}$ , considerando os níveis de estresse  $V_j = 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38$ . A aproximação é baseada no método de composição, isto é, com as 20.000 amostras *a posteriori* dos parâmetros do modelo WE - PI, geramos para cada nível de estresse, uma amostra preditiva de tamanho 20.000; com essa amostra obtemos uma aproximação das



densidades preditivas de uma observação futura. Na Tabela 5 apresentamos uma estimativa para  $Y_{(n+1)j}$  dada em (27) considerando  $1 - \gamma = 0,90$ .

Tabela 5 - Valores de  $Y_j$  para  $V_j$  fixo com  $1 - \gamma = 0,90$ , considerando o modelo WE - PI

$V_j$	26	28	30	32	34	36	38
$Y_{(n+1)j}$	882,1	224,8	63,55	19,78	6,616	2,399	0,9109

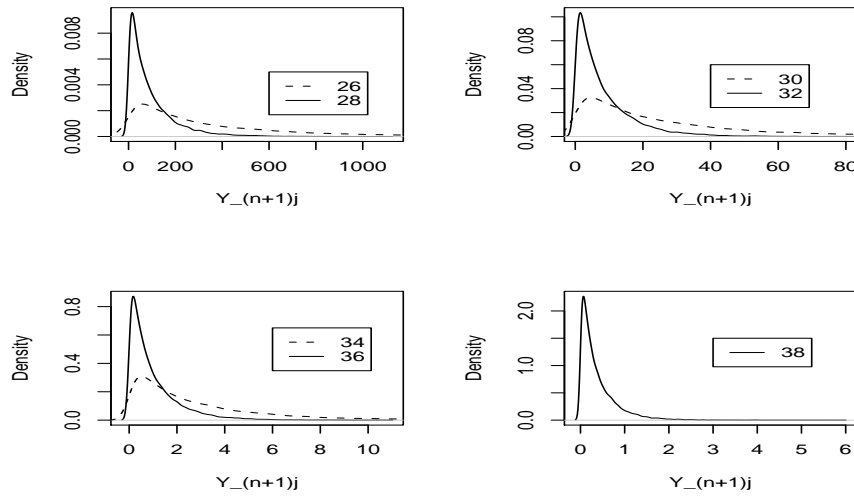


Figura 4 - Densidade preditiva para uma observação futura para níveis de estresse,  $V_j = 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38$ .

Usamos a densidade preditiva dada em (27) com  $\theta = 1$  e  $\beta$  e  $p$  conhecidos para determinar  $V_j$  e  $Y_j$ , para o problema de controle de qualidade. Neste caso assumindo  $\beta = 17,73$  e  $p = 0,77656$ , na Tabela 6, apresentamos os valores de  $Y_j$  dados em (30) para valores fixos de  $V_j$ , com  $1 - \gamma = 0,90$ . Os valores de  $V_j$  dada em (31) para valores fixos de  $Y_j$  é reportado na Tabela 6.

Esses resultados podem ser de grande interesse para os engenheiros de qualidade. Por exemplo, se o interesse é verificar se os componentes de um determinado lote estão sob controle, considerando uma probabilidade de sobrevivência após  $Y_j$  igual a 0.90, e temos para o experimento  $Y_j = 50$  unidades de tempo (pela Tabela 6); o experimento deve ser realizado a um nível de estresse

Tabela 6 - Valores de  $Y_j$  e  $V_j$  com  $1 - \gamma = 0,90$ , considerando o W - PI com  $\beta$  e  $p$  conhecidos

$V_j$ fixo		$Y_j$ fixo	
$V_j$	$Y_j$	$Y_j$	$V_j$
26	65,50115	10	28,90754
28	17,60413	30	27,17069
30	5,18044	50	26,39904
32	1,64975	100	25,38689
34	0,56313	200	24,41355
36	0,20440	300	23,86157
38	0,07837	500	23,18390

$V_j = 25,38689$  (kv). Similarmente, suponha que por questões técnicas somente é possível testar os componentes em  $V_j = 32$  (kv); pela Tabela 6, deve-se conduzir o experimento até  $Y_j = 1,64975$  unidades de tempo. Em ambos experimentos deve-se submeter  $m$  unidades ao nível de estresse  $V_j$ , no período fixo de tempo  $Y_j$  e observar a proporção de unidades que falham,  $p^j$ . Se  $p^j \leq 0,10$ , o lote está sob controle; do contrário, está fora de controle.

## Conclusões

Considerando a distribuição Weibull-exponenciada para os tempos de vida, podemos observar que o uso de métodos bayesianos em teste de vida acelerados podem ser de grande interesse prático na análise do modelo Lei de Potência Inversa.

O procedimento bayesiano é baseado em métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC), a implementação do método é simples, não exige um conhecimento computacional avançado e as inferências obtidas são bastante precisas e torna-se uma boa alternativa aos métodos clássicos usuais. Também, usando a densidade preditiva de uma observação futura desenvolvemos um procedimento para o controle de qualidade de um lote de componentes que tem grande aplicabilidade em indústrias de várias áreas.

VIEIRA, D. S.; ACHCAR, J. A; CANCHO, G. V. Use of bayesian methods in accelerated life tests assuming an exponentiated-Weibull distribution and a power inverse law model. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.24, n.2, p.17-36, 2006.

- **ABSTRACT:** *In this paper, we explored the use of Chains Markov Monte Carlo (MCMC) techniques to develop a Bayesian analysis for accelerated life tests considering the Weibull-exponentiated distribution. Assuming type II censored data, we considered a classic analysis and a Bayesian analysis assuming informative priors for the parameters of the model, where we obtained the predictive density for a future observation and proposed a criterion that can be used in quality control problems. We illustrated the methodology with a numeric example.*
- **KEYWORDS:** *Exponentiated-Weibull distribution; accelerated life tests; predictive densities; MCMC.*

## Referências

- BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. *Bayesian inference statistical analysis*. New York: Addison-Wesley, 1973. 588p.
- CANCHO, G. V.; BOLFARINE, H. Modelling the presence of immunes by using the exponentiated-Weibull model. *J. Appl. Stat.*, Abington, v.28, p.659-71, 2001.
- CANCHO, G. V.; BOLFARINE, H.; ACHCAR, J. A. A Bayesian analysis for the Exponentiated-Weibull distribution. *J. Appl. Stat. Sci.*, New York, v.8, n.4, p.227-242, 1999.
- CASELLA, G.; GEORGE, E. I. Explaining the Gibbs Sampler. *Am. Stat.*, Washington, v.46, p.167-174, 1992.
- CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hasting algorithm. *Am. Stat.*, Washington, v.49, n.4, p.327-335, 1995.
- COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical statistics*. Chapman and Hall, 1974, 519p.
- GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion). *Stat. Sci.*, Hayward, v.7, p.457-511, 1992.
- GILKS, W. R.; WILD, P. Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling. *J. R. Stat. Soc. Ser. C*, London, v.41, p.337-338, 1992.
- MANN, N. R.; SCHAFFER, R. E.; SINGPURWALLA, N. D. *Methods for statistical analysis of reliability and life data*. New York: Wiley, 1974. 576p.
- MUDHOLKAR, G. S.; HUTSON, A. D. The exponentiated Weibull family: some properties and a flood data application. *Commun. Stat. Theory Meth.*, New York, v.25, p.3059-3083, 1996.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVATAVA, D. K.; FREIMER, M. The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor failure data. *Techonometrics*, Washington, v.37, p.436-445, 1995.
- NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. On the moments of the exponentiated Weibull distribution. *Commun. Stat. Theory Meth.*, New York, v.34, p.253-256, 2005.

- NASSAR, M. M.; EISSA, F. H. On the exponentiated Weibull distribution. *Commun. Stat. Theory Meth.*, New York, v.32, p.1317-1336, 2003.
- NELSON, W. *Accelerated testing-statistical models, test plans and data analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1990. 601p.
- PRESS, S. J. *Bayesian statistics: principles, models and applications*. New York: John Wiley & Sons, 1989. 256p.
- SPIEGELHATER, D. J.; BEST, N. G.; GILKS, W. *BUGS-Bayesian inference using Gibbs sampling: version 0.6*. Cambridge: MCR Biostatistics Unit, 1997. 200p.
- SPIEGELHATER, D. J. et al. Bayesian measures of model complexity and fit (with discussion). *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, London, v.64 p.583-589, 2002.
- TANNER, M. A.; WONG, W. H. The calculation of posterior distributions by data augmentation (with discussion). *J. Am. Stat. Assoc.*, Washington, v.82, p.528-550, 1987.
- TIERNEY, L.; KADANE, J. B. Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. *J. Am. Stat. Assoc.*, Washington, v.81, p.82-86, 1986.

Recebido em 19.01.2006.

Aprovado após revisão em 13.06.2006.