

ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DOS TESTES DE NORMALIDADE DE JARQUE-BERA E LILLIEFORS EM MODELOS DE REGRESSÃO LINEAR

Marcelo Rodrigo Portela FERREIRA¹

- RESUMO: Uma das suposições feitas acerca do modelo de regressão linear é que os erros seguem distribuição normal. Essa suposição nem sempre é necessária, contudo, na maioria das situações é razoável considerá-la, pois a suposição de normalidade dos erros torna-se importante quando desejamos construir intervalos de confiança e realizar testes de hipóteses. Existem vários testes que são utilizados para verificar se uma determinada amostra univariada segue ou não distribuição normal. Nesse trabalho iremos avaliar, pela de simulação de Monte Carlo, o desempenho, sob diversos cenários, de dois testes bastante utilizados na prática: o teste de Jarque-Bera e o teste de Lilliefors.
- PALAVRAS-CHAVE: Normalidade; teste de Jarque-Bera; teste de Lilliefors; simulação de Monte Carlo.

1 Introdução

Considere o modelo de regressão linear

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad (1)$$

onde \mathbf{y} ($t \times 1$) é a variável resposta, X ($t \times p$) é uma matriz (fixa) de covariáveis, $\boldsymbol{\beta}$ ($p \times 1$) é o vetor de coeficientes de regressão e \mathbf{u} ($t \times 1$) é o vetor de perturbações aleatórias associadas ao modelo. No modelo de regressão linear padrão é muito comum assumir que o vetor de erros \mathbf{u} segue distribuição normal. Essa suposição é muito atraente quando queremos realizar testes de hipóteses e construir intervalos de confiança. Apenas sob normalidade da estrutura de erros, o estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) dos parâmetros de regressão coincide com o Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV). Além disso, sob normalidade, o estimador de MQO

¹Departamento de Estatística, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, CEP: 50740-540, Recife, PE, Brasil, E-mail: marcelorpf@gmail.com

é o melhor estimador na classe dos estimadores não-viesados, ou seja, o estimador de MQO é eficiente.

Na prática, não conhecemos os valores das perturbações aleatórias associadas ao modelo de regressão postulado. Uma maneira de avaliar se a suposição de normalidade dos erros está sendo violada é analisando os resíduos do modelo ajustado. Neste trabalho, estamos interessados em avaliar o comportamento de dois testes muito utilizados na prática para verificar se a suposição de normalidade dos erros está sendo violada: o teste de Jarque-Bera e o teste de Lilliefors. Avaliaremos o desempenho desses testes considerando algumas situações de interesse, como autocorrelação e heteroscedasticidade. Na seções 2 e 3 descrevemos rapidamente os testes de Jarque-Bera e de Lilliefors, respectivamente. Na seção 4, descrevemos como foram realizados os experimentos de Monte Carlo. Na seção 5, apresentamos os resultados das simulações. Apresentamos também as conclusões extraídas dos resultados das simulações.

2 Teste de normalidade de Jarque-Bera

Trata-se de um teste assintótico. As hipóteses a serem testadas são: H_0 : o erro do modelo de regressão linear possui distribuição normal, contra H_1 : o erro do modelo de regressão linear possui distribuição não-normal na família de Pearson. O procedimento do teste consiste em calcular os valores da assimetria e da curtose da amostra e utilizar a seguinte estatística de teste:

$$JB = T \left(\frac{\hat{\alpha}_1}{6} + \frac{(\hat{\alpha}_2 - 3)^2}{24} \right), \quad (2)$$

onde $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ são, respectivamente, os coeficientes amostrais de assimetria e de curtose e T é o tamanho da amostra.

Sob a hipótese nula de que os erros se distribuem normalmente, Jarque e Bera (1987), mostraram que, assintoticamente, a estatística JB dada em (2) segue uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Assim, rejeitamos a hipótese de normalidade dos erros se $JB > \chi_{\alpha,2}^2$, onde $\chi_{\alpha,2}^2$ é o quantil de nível $1 - \alpha$ da distribuição χ^2 com dois graus de liberdade.

3 Teste de normalidade de Lilliefors

Nesse teste, consideramos que o erro do modelo de regressão linear corresponde a uma amostra X_1, \dots, X_n de tamanho n , de uma variável aleatória X com função de distribuição desconhecida, denotada por $F(x)$. As hipóteses a serem testadas são: H_0 : o erro do modelo de regressão linear possui distribuição normal, contra H_1 : o erro do modelo de regressão linear possui distribuição não-normal. Utilizamos a média amostral $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ como uma estimativa da média populacional μ e calculamos $s^2 = (n - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ como uma estimativa da variância

populacional σ^2 . Então, calculamos os valores Z_i , definidos como

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s}, \quad (3)$$

$i = 1, \dots, n$. A estatística de teste é calculada a partir dos valores calculados em (3) em vez de ser calculada a partir da amostra original e é definida como a máxima distância vertical entre a função de distribuição empírica dos Z'_i s, denotada por $S(x)$ e a função de distribuição normal com média estimada \bar{X} e variância estimada s^2 , denotada por $F^*(x)$. Essa distância é a estatística do teste. Ou seja, a estatística do teste de Lilliefors é

$$T_1 = \sup_x |F^*(x) - S(x)|. \quad (4)$$

A distribuição de (4) sob a hipótese nula pode ser obtida, aproximadamente, de forma computacional. Estimativas dos quantis da distribuição dessa estatística estão tabuladas e disponíveis na literatura; ver, por exemplo, Conover (1999, p.548), Tabela A14. Quantis exatos, assim como a forma matemática da distribuição sob a hipótese nula, são desconhecidos. A regra de rejeição é definida como: rejeitamos a hipótese de normalidade se $T_1 > c$, onde c é obtido dos valores tabulados, considerando nível de significância predefinido.

4 Experimentos de Monte Carlo

O estudo do tamanho dos testes consistiu em gerar valores para uma variável resposta como função de duas covariáveis fixas e um fator de perturbação aleatório e depois ajustar um modelo de regressão linear para a variável resposta e as covariáveis fixas, obtendo os resíduos do modelo ajustado, e, nestes, aplicar os testes de normalidade considerados. Esse procedimento foi repetido um grande número de vezes com o intuito de avaliar o comportamento dos testes. Abaixo estão listados os cinco cenários distintos, considerados no estudo do tamanho dos testes, via simulação de Monte Carlo. Para todos os cenários foi considerada a mesma forma funcional do modelo gerado, $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$, com, $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = -2$ e $t = 1, \dots, T$, alterando em seguida a estrutura de u_t , de forma a gerar uma situação de interesse.

1. $u_t \sim N(0, 1)$, $t = 1, \dots, T$.
2. $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, com $u_1 \sim N(0, 1/(1 - \rho^2))$, tomando $\rho = 0,1$, $t = 2, \dots, T$.
3. $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, com $u_1 \sim N(0, 1/(1 - \rho^2))$, tomando $\rho = 0,9$, $t = 2, \dots, T$.
4. $u_t \sim N(0, \exp\{c_1 + c_2 x_{1t}\})$, com $c_1 = c_2 = 0,1$, $t = 1, \dots, T$.
5. $u_t \sim N(0, \exp\{c_1 + c_2 x_{1t}\})$, com $c_1 = c_2 = 0,55$, $t = 1, \dots, T$.

Os valores das covariáveis x_1 e x_2 estão apresentados na Tabela 1. Em todos os cenários as amostras foram geradas replicando as observações das covariáveis da primeira amostra gerada, de tamanho dez. Isso garante que o coeficiente que mede o grau de heteroscedasticidade, $\lambda = \max(\sigma_i^2)/\min(\sigma_i^2)$, permaneça constante quando aumentamos o tamanho da amostra.

Tabela 1 - Valores de x_1 e x_2 para amostra de tamanho 10

x_1	x_2	x_1	x_2
1,0	9,0	6,6	6,0
3,7	9,0	3,1	6,0
0,8	8,0	8,5	8,0
9,9	1,0	6,3	12,0
1,2	8,0	7,3	16,0

No cenário 1 geramos os dados com erros distribuídos conforme a distribuição normal com média zero e variância constante e igual a um. Ou seja, consideramos que os erros são não-correlacionados e homoscedásticos.

Nos cenários 2 e 3, os dados foram gerados admitindo erros correlacionados, com $u_1 \sim N(0, 1/(1 - \rho^2))$ e $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 2, \dots, T$, onde ε_t segue uma distribuição normal com média zero e variância um. O cenário 2 foi gerado de modo que os erros fossem fracamente correlacionados; para isso, tomamos $\rho = 0,1$. Uma correlação mais forte foi considerada no cenário 3, onde tomamos $\rho = 0,9$.

O efeito da heteroscedasticidade foi investigado nos cenários 4 e 5. Nestes, consideramos um padrão de heteroscedasticidade, de modo que os erros fossem distribuídos conforme uma distribuição normal com média zero e variância $\exp\{c_1 + c_2 x_{1t}\}$. No cenário 4, consideramos $c_1 = c_2 = 0,1$, o que nos fornece $\lambda \approx 2,5$. Já no cenário 5, consideramos $c_1 = c_2 = 0,55$, o que nos fornece $\lambda \approx 149$.

No estudo de poder, os dados foram gerados utilizando a mesma forma funcional considerada no estudo do tamanho dos testes, contudo, com erros seguindo distribuição skew-normal. Nesse cenário, as estatísticas de teste foram comparadas com os quantis empíricos das estatísticas, obtidos por meio de dados gerados considerando estrutura de erros seguindo distribuição normal padrão (cenário 1).

Dizemos que uma variável aleatória Z segue distribuição skew-normal com parâmetro de forma $\gamma \in \mathbb{R}$ e denotamos por $Z \sim SN(\gamma)$, se ela tem a seguinte função densidade de probabilidade (fdp)

$$g(z; \gamma) = 2\phi(z)\Phi(\gamma z), \quad -\infty < z < \infty, \quad (5)$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são respectivamente a função densidade de probabilidade (fdp) e a função de distribuição acumulada (fda) normal padrão. Uma propriedade interessante dessa classe de distribuições é que a fdp de uma variável aleatória $SN(0)$ é idêntica à fdp de uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Por outro lado, quando $\gamma \rightarrow \infty$, temos que $g(z; \gamma) \rightarrow 2\phi(z)I_{z>0}$, que é a fdp de uma variável aleatória com distribuição half-normal.

Com isso, tomamos valores para γ de forma a nos afastarmos gradualmente da suposição de normalidade. Os valores considerados para γ foram 0 (normalidade), 3, 7, 15, 31. Estas situações estão ilustradas na figura abaixo.

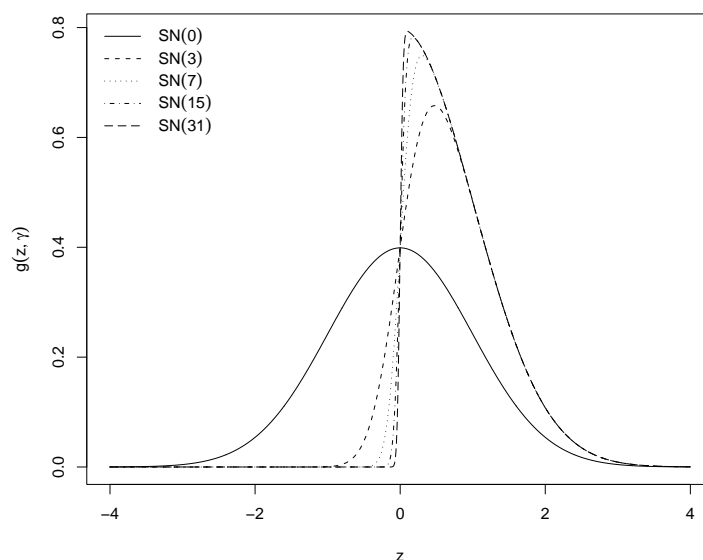


Figura 1 - Densidade Skew-normal para os valores de γ considerados.

Em nosso estudo foram utilizadas dez mil réplicas de Monte Carlo, considerando amostras de tamanhos 10, 50, 100, 500 e 1000, e níveis de significância de 10%, 5% e 1%. Todas as simulações foram realizadas utilizando a plataforma de programação, análise de dados e gráficos R, em sua versão 2.3.1 para o sistema operacional Linux, que pode ser obtida gratuitamente em <<http://www.r-project.org>>.

5 Resultados e discussão

Nesta seção apresentamos e discutimos os resultados obtidos por simulações. As Tabelas 2, 3 e 4 exibem as probabilidades empíricas de rejeição da hipótese de normalidade dos erros para os cenários 1, 2, 3 e 4, referentes à análise do tamanho dos testes. A Tabela 5 exhibe os resultados referentes ao estudo de poder dos testes.

A Tabela 2 exhibe os valores percentuais das taxas de rejeição para o cenário 1. Uma inspeção nessa tabela nos permite verificar que o desempenho do teste de Jarque-Bera melhora quando o tamanho da amostra cresce, enquanto o teste

de Lilliefors apresenta resultados satisfatórios mesmo com tamanhos de amostra pequenos. Ou seja, quando temos dados homoscedásticos e sem presença de autocorrelação, as taxas de rejeição da hipótese de normalidade pelo teste de Jarque-Bera tendem a se aproximar dos valores nominais dos níveis de significância quando o tamanho da amostra aumenta, enquanto as taxas de rejeição da hipótese de normalidade pelo teste de Lilliefors se apresentam próximas dos valores nominais dos níveis de significância mesmo quando temos amostras de tamanho reduzido.

Tabela 2 - Probabilidades (%) empíricas de rejeição da hipótese nula para os testes de Jarque-Bera e Lilliefors, considerando o cenário 1

t	Jarque-Bera			Lilliefors		
	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
10	1,75	0,64	0,25	10,05	5,24	1,16
50	5,50	3,92	1,71	10,07	4,63	0,94
100	7,28	3,99	1,81	10,75	4,90	0,98
500	8,68	4,69	1,53	9,88	4,57	0,90
1.000	9,46	4,77	1,28	10,66	4,67	0,93

Na Tabela 3 apresentamos os resultados referentes aos cenários 2 e 3, onde consideramos erros com estrutura de autocorrelação. Podemos verificar que na presença de autocorrelação fraca os resultados são bastante semelhantes aos obtidos para o cenário 1. Ou seja, para o teste de Jarque-Bera temos taxas de rejeição da hipótese nula se aproximando dos valores nominais dos níveis de significância quando aumentamos o tamanho da amostra e para o teste de Lilliefors temos taxas de rejeição próximas dos níveis nominais de significância mesmo para pequenas amostras. Em contrapartida, quando temos erros correlacionados fortemente, notamos que as taxas de rejeição da hipótese nula tendem a crescer para ambos os testes, e tornam-se rapidamente muito maiores que os valores nominais dos níveis de significância, ou seja, os testes tornam-se bastante liberais.

Os resultados referentes aos cenários 4 e 5 estão apresentados na Tabela 4. Podemos notar que, sob baixo grau de heteroscedasticidade, as taxas de rejeição da hipótese nula crescem quando o tamanho da amostra aumenta em ambos os testes, ou seja, os testes se tornam um pouco mais liberais. Contudo, nesta situação, o teste de Lilliefors se comporta um pouco melhor, pois suas taxas de rejeição se apresentam mais próximas dos valores nominais dos níveis de significância. Quando temos grau elevado de heteroscedasticidade, as taxas de rejeição da hipótese de normalidade crescem muito rápido quando o tamanho da amostra aumenta, em ambos os testes, chegando a aproximadamente 99% com tamanho de amostra 100 e a 100% para tamanhos de amostra maiores.

Tabela 3 - Probabilidades (%) empíricas de rejeição da hipótese nula para os testes de Jarque-Bera e Lilliefors, considerando os cenários 2 e 3

ρ	t	Jarque-Bera			Lilliefors		
		$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
0,1	10	1,67	0,89	0,21	10,45	5,32	1,03
	50	5,94	3,70	1,63	10,26	4,88	0,97
	100	6,83	3,73	1,87	10,38	5,37	0,98
	500	8,74	5,06	1,76	9,72	5,10	0,91
	1.000	9,73	4,69	1,40	10,31	4,57	0,81
0,9	10	1,11	0,40	0,10	8,29	3,79	0,56
	50	9,78	5,34	2,05	32,35	23,30	10,53
	100	27,25	16,23	6,68	42,89	32,40	16,45
	500	54,75	43,50	26,22	52,40	40,58	23,46
	1.000	60,17	49,95	32,56	53,76	41,41	23,99

Tabela 4 - Probabilidades (%) empíricas de rejeição da hipótese nula para os testes de Jarque-Bera e Lilliefors, considerando os cenários 4 e 5

λ	t	Jarque-Bera			Lilliefors		
		$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
2,5	10	1,93	0,97	0,17	10,87	5,25	1,04
	50	9,72	6,82	3,96	11,08	5,05	1,10
	100	13,33	9,52	5,53	11,20	5,55	1,33
	500	31,19	23,61	13,07	14,53	8,01	1,51
	1.000	46,58	37,22	22,48	20,42	10,54	2,37
149	10	8,83	4,88	0,67	21,20	12,34	2,88
	50	85,95	82,70	72,71	94,67	90,10	74,30
	100	99,34	98,73	97,42	99,99	99,86	99,04
	500	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	1.000	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Na Tabela 5 apresentamos os resultados referentes ao estudo de poder. Podemos observar que ambos os testes apresentam bons resultados quanto ao poder. Pode-se notar também que temos um aumento do poder dos testes quando o tamanho da amostra cresce, o que de fato é esperado. Os resultados também evidenciam que o teste de Jarque-Bera apresenta desempenho um pouco melhor que o teste de Lilliefors já que em grande parte dos casos suas taxas de rejeição da hipótese nula são maiores que as taxas de rejeição apresentadas pelo teste de Lilliefors. Por exemplo, para uma amostra de tamanho 50 e $\gamma = 3$ temos uma

taxa de rejeição de 42,78% para o teste de Jarque-Bera e 32,34% para o teste de Lilliefors, com $\alpha = 0,10$. Também podemos observar que para valores de $\gamma \geq 3$ e tamanhos de amostra maiores ou iguais a 500 temos taxas de rejeição maiores que 95% para ambos os testes. Quando temos $\gamma \geq 7$ e tamanhos de amostra maiores ou iguais a 500 temos eficiência máxima para ambos os testes.

Tabela 5 - Percentuais de rejeição da hipótese nula quando nos afastamos da suposição de normalidade dos erros

γ	t	Jarque-Bera			Lilliefors		
		$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
0	10	10,78	5,08	0,82	10,25	4,99	0,99
	50	9,42	4,96	1,22	10,22	5,44	0,88
	100	9,78	4,86	0,61	9,60	4,59	0,70
	500	10,22	5,10	0,92	9,96	5,33	0,86
	1.000	9,71	5,73	0,96	9,22	5,17	1,04
3	10	12,52	7,34	1,60	11,75	5,89	1,51
	50	42,78	29,17	8,41	32,34	22,40	8,80
	100	75,50	58,92	24,80	58,44	44,02	21,06
	500	100,00	99,99	99,79	99,79	99,43	95,29
	1.000	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,97
7	10	15,05	8,85	2,00	12,64	7,65	1,64
	50	71,79	49,57	18,95	55,39	41,69	19,22
	100	97,71	91,38	50,14	86,87	76,84	53,05
	500	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	1.000	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
15	10	16,14	8,53	2,01	14,78	6,85	1,63
	50	76,76	56,53	21,35	61,95	48,55	23,76
	100	99,22	94,68	56,79	91,96	83,83	60,40
	500	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	1.000	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
31	10	16,84	9,51	2,47	14,20	8,11	2,15
	50	81,90	55,22	20,68	64,45	50,57	26,49
	100	99,48	95,66	54,38	93,45	85,73	62,14
	500	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	1.000	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Conclusões

Algumas conclusões retiradas dos resultados dos experimentos de Monte Carlo.

a. Quanto ao estudo dos tamanhos dos testes:

a.1. Quando temos estrutura de erros não-correlacionados e homoscedásticos, os testes de Jarque-Bera e de Lilliefors de normalidade apresentam comportamentos bastante satisfatórios, com o teste de Lilliefors apresentando taxas de rejeição da hipótese de normalidade próximas dos valores nominais dos níveis de significância mesmo com pequenas amostras.

a.2. Quando há autocorrelação fraca dos erros, os desempenhos dos testes não sofrem alterações significativas.

a.3. Quando há autocorrelação forte dos erros, os desempenhos dos testes ficam comprometidos já que apresentam taxas de rejeição da hipótese de normalidade acima dos valores nominais dos níveis de significância.

a.4. Sob heteroscedasticidade em baixo grau, há um aumento significativo nas taxas de rejeição da hipótese de normalidade. Entretanto, o teste de Lilliefors continua tendo bom desempenho para tamanhos de amostra pequenos.

a.5. Sob heteroscedasticidade em grau elevado, há um aumento muito rápido nas taxas de rejeição da hipótese de normalidade, quando aumentamos o tamanho da amostra, obtendo taxas de rejeição de 100% em muitos casos.

b. Quanto ao estudo de poder:

b.1. De uma forma geral, ambos os testes apresentam bom poder.

b.2. Tanto para o teste de Jarque-Bera quanto para o teste de Lilliefors o poder aumenta quando o tamanho da amostra cresce, o que é esperado.

b.3. Para $\gamma \geq 7$ os dois testes apresentam bom poder mesmo para tamanhos de amostra moderados (50 e 100).

b.4. O teste de Jarque-Bera apresenta o melhor desempenho na maioria dos casos.

Agradecimentos

Ao professor Francisco Cribari Neto e aos amigos Geraldo Henrique, Hemílio Fernandes e Artur Lemonte, pela leitura cuidadosa e pelas valiosas críticas e sugestões.

FERREIRA, M. R. P. Sensitivity analysis of the Jarque-Bera and Lilliefors normality tests in linear regression models. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.24, n.2, p.89-98, 2006.

■ **ABSTRACT:** *One of the assumptions regarding the linear regression model is that errors are assumed to follow normal distribution. This is not always necessary; however, most of the times it is reasonable to consider it because the errors normality assumption becomes important when we want to construct confidence intervals and conduct hypotheses tests. There are some tests that are used to assess if one given univariate sample follows normal distribution or not. In this article, we will evaluate, through Monte Carlo Simulation, the performance under diverse scenarios of two tests that are probably the most widely used: the Jarque-Bera test and the Lilliefors test.*

■ **KEYWORDS:** *Normality; Jarque-Bera test; Lilliefors test; Monte Carlo simulation.*

Referências

- AZZALINI, A. A class of distribution which includes the normal ones. *Scand. J. Stat.*, Stockholm, v.12, p.171-178, 1985.
- AZZALINI, A. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, New York, v.46, p.199-209, 1986.
- CONOVER, W. J. *Practical nonparametric statistics*. 3.ed. New York: John Wiley, 1999. 584p.
- CRIBARI-NETO, F. Asymptotic inference under heteroskedastic of unknown form. *Comput. Stat. Data Anal.*, Amsterdan, v.45, p.215-233, 2004.
- DALLA VALLE, A. The skew-normal distribution. In: GENTON, M. G. (Ed.) *Skew-Elliptical distributions and their applications: a journey beyond normality*. Boca Raton: Chapman and Hall, 2004. p.3-24.
- DANIEL, W. W. *Applied nonparametric statistics*. 2.ed. Boston: PWS - Kent, 1990. 635p.
- GREENE, W. H. *Econometric analysis*. 5.ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003. 1026p.
- GUJARATI, D. N. *Econometria básica*. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2000. 846p.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. *Int. Stat. Rev.*, Woodbury, v.55, p.163-172, 1987.
- MAINDONALD, J. H; BRAUN, J. *Data analysis and graphics using R: An example-based approach*. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 362p.
- SOUZA, T. C. *Inferência em modelos heteroscedásticos na presença de pontos de alavanca*, 2003. 83f. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.
- VENABLES, W. N.; RIPLEY, B. D. *Modern applied statistics with S*. 4.ed. New York: Springer-Verlag, 2002. 495p.

Recebido em 31.10.2006.

Aprovado após revisão em 15.02.2007.