UMA EXTENSÃO DO MODELO WEIBULL BIVARIADO DE RYU: UMA APLICAÇÃO BAYESIANA EM RISCOS COMPETITIVOS

Eduardo Yoshio NAKANO[1]
Josemar RODRIGUES[2]

- RESUMO: Como a suposição de independência em riscos competitivos pode ser questionável em alguns casos, a formulação de modelos bivariados é fundamental para explicar uma possível dependência entre os tempos de vida. Modelos bivariados baseados em processos de choques geralmente são aceitos na literatura. Entre eles podemos citar o modelo exponencial bivariado de Marshall e Olkin (1967) e o modelo Weibull bivariado de Ryu (1993). Neste estudo, o modelo Weibull bivariado de Ryu foi estendido de forma permitir que os choques se alterem ao longo do tempo. Um modelo de riscos competitivos foi formulado a partir deste modelo e, utilizando dados simulados, seus parâmetros foram estimados por meio de procedimentos bayesianos via MCMC com variáveis latentes.

- PALAVRAS-CHAVE: Não-identificabilidade, risco crude, risco net, variáveis latentes.

1 Introdução

Muitos estudos em análise de sobrevivência estão centrados em apenas uma causa de morte (falha). Entretanto causas que competem entre si para que o evento de interesse ocorra são também comuns. Os estudos que consideram várias causas de morte são conhecidos na literatura como análise de dados de riscos competitivos. Neste tipo de estudo, observa-se apenas o par (Y, c_i), onde $Y = \min(T_1,...,T_k)$ é o mínimo tempo de sobrevivência entre os tempos de sobrevivência relacionados à c_i, causa de morte i, i=1, ..., k. No caso de um cenário de riscos competitivos, a adequação do modelo pode ser obtida diretamente. Uma possibilidade simples é assumir que os riscos afetam o indivíduo independentemente, sendo neste caso, a função de risco global é dada pela soma dos riscos relacionados a cada causa de morte. Mas como na prática a suposição de independência entre os tempos de vida é às vezes questionável, torna-se importante o estudo de modelos bivariados pelo fato de poder considerar uma possível dependência entre os tempos de vida.

Marshall e Olkin (1967) formularam um modelo exponencial bivariado baseado em processos de choques que consideram tempos dependentes. No entanto, este modelo não é absolutamente contínuo, isto é, $P[T_1=T_2]>0$. Em riscos competitivos, existe a suposição de um indivíduo não poder morrer devido a duas causas simultaneamente, ou seja,

[1] Departamento de Estatística, Universidade de Brasília - UnB, CEP: 70910-900, Brasília, DF, Brasil, E-mail: *nakano@unb.br*

[2] Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, Caixa Postal 676, CEP: 13565-905, São Carlos, SP, Brasil, E-mail: *vjosemar@power.ufscar.br*

$P[T_1=T_2]=0$. Portanto, para satisfazer essa suposição é desejável formular um modelo bivariado que seja absolutamente contínuo. Ryu (1993) apresentou um modelo exponencial bivariado absolutamente contínuo como uma extensão do modelo exponencial bivariado de Marshall e Olkin, mas esse modelo não é identificável para riscos competitivos. O modelo de Ryu também é baseado em processos de choques e ele considera que o impacto dos choques em cada componente é constante no tempo, ou seja, o impacto não se altera com a falha de um dos componentes.

São poucos os trabalhos na literatura que tratam o problema de riscos competitivos utilizando modelos bivariados. Entre eles é possível citar os seguintes trabalhos: Moeschberger (1974) obtém um modelo Weibull para riscos competitivos a partir da distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin; Bhattacharya (1997) apresenta um modelo exponencial de riscos competitivos a partir de uma distribuição exponencial bivariada obtida por Raftery (1984); Tarumoto (2001), a partir do modelo de Ryu, formulou um modelo Weibull bivariado absolutamente contínuo cujas marginais são identificáveis.

Obtém-se neste trabalho, a partir de modificações nas suposições do modelo exponencial bivariado de Ryu, um modelo Weibull bivariado baseado em processos de choques, que assume dependência entre os tempos de vida, possui a propriedade de ser absolutamente contínuo e também permite uma possível mudança nos impactos dos choques, a medida que um dos componentes falhe. A partir desse modelo, foi formulado um modelo de riscos competitivos que teve seus parâmetros estimados segundo uma abordagem bayesiana.

É enfatizado neste trabalho o problema de não identificabilidade (das marginais) em riscos competitivos, mostrando quais são as conseqüências de se utilizar um modelo cujas marginais são não identificáveis. Segundo Gail (1975), o problema de não identificabilidade pode ser resolvido restringindo a classe de modelos àqueles que possuem a propriedade de identificabilidade das marginais. Outra forma de contornar o problema de identificabilidade é introduzir variáveis regressoras no modelo de riscos competitivos (Heckman e Honoré, 1989).

2 Conceitos básicos em riscos competitivos

O problema de riscos competitivos é formulado em termos da função de sobrevivência conjunta, definida por $S(t_1, t_2,...,t_k)$. Denota-se como $S_Y(t)$ e $S_i(t)$, i=1,...,k, as funções de sobrevivência total e marginal, respectivamente. As funções de riscos relacionadas a essas funções são definidas por:

$h(t)dt$ = P[morrer de alguma causa em $(t, t+dt)$|sobreviveu de todos c_i até t]

$h_i(t)dt$ = P[morrer devido a causa c_i em $(t, t+dt)$ e c_i é o único risco atuando em $(t, t+dt)$|sobreviveu de c_i até t]

$g_i(t)dt$ = P[morrer devido a causa c_i em $(t, t+dt)$ e todos os riscos estão atuando em $(t, t+dt)$|sobreviveu de todos c_i até t]

A função $h_i(t)$ é denotada como função de risco "net", também chamada de função de risco específico, e a função $g_i(t)$, é definida como função de risco "crude".

Quando as derivadas parciais existem, temos que

$$g_i(t) = \frac{-\left(\dfrac{\partial S(t_1,...,t_k)}{\partial t_i}\right)\Bigg|_{t_1=...=t_k=t}}{S(t,...,t)} \tag{1}$$

e

$$h_i(t) = -\frac{d}{dt}\log S_i(t).$$

Tem-se também que

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\log S_Y(t) = \sum_{i=1}^{k} g_i(t), \tag{2}$$

o que implica

$$S_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} G_i(t), \tag{3}$$

onde $G_i(t) = \exp\left\{-\int_0^t g_i(u)du\right\}$ representa uma distribuição associada com a causa c_i, supondo que a função risco desta distribuição seja $g_i(t)$ (Elandt-Johnson e Johnson, 1980). Quando $g_i(t)=h_i(t)$, segue que $G_i(t)=S_i(t)$, e portanto $S_Y(t) = \prod_{i=1}^{k} S_i(t)$. A condição $g_i(t)=h_i(t)$ é mais fraca que a suposição dos T_i's serem estocasticamente independentes. Quando os T_i's são independentes tem-se que $g_i(t)=h_i(t)$, mas $g_i(t)=h_i(t)$ não implica independência dos T_i's, i=1,...,k.

2.1 Identificabilidade em riscos competitivos

No contexto de riscos competitivos e tempos de falhas latentes, o problema de identificabilidade questiona a possibilidade de identificação da distribuição conjunta $S(t_1, t_2,...,t_k)$, e de suas marginais, $S_i(t)$, dado $S_Y(t)$, distribuição de Y = mín(T_1, T_2,...,T_k).

Berman (1963) mostrou que, se as causas de morte atuam de forma independente em cada indivíduo, a distribuição de Y determina de forma única a distribuição dos T_i's e, portanto, a distribuição conjunta de (T_1, T_2,...,T_k).

Para obter informações a respeito da distribuição dos tempos de morte latentes, quando estes são dependentes, é usual supor que a função de sobrevivência conjunta pertence a uma classe específica de distribuições paramétricas. Assim, uma forma de se resolver o problema de identificabilidade em riscos competitivos é considerar modelos onde as funções risco *crude* e *net* são iguais, sendo que neste caso, as distribuições marginais $S_i(t)$, i=1, 2, ..., k são totalmente identificáveis (Fleming e Harrington, 1991).

3 Uma extensão do modelo Weibull bivariado de Ryu

O modelo Weibull bivariado de Ryu (1993) é um modelo bastante flexível, pois permite o ajuste de uma grande variedade de tipos de dados. Este modelo é muito interessante em termos de aplicação numérica, devido a sua formulação (processos de choques) e também por ser absolutamente contínuo. Em sua formulação, o modelo de Ryu considera que o impacto dos choques em cada componente é constante no tempo, ou seja, o impacto de cada choque é o mesmo, independentemente dos dois componentes estarem operando ou não. Neste contexto, propomos aqui uma extensão do modelo Weibull bivariado de Ryu que leva em consideração o fato dos dois componentes estarem operando ou um deles ter falhado.

Para a formulação do modelo, considere um sistema de dois componentes e três processos de Poisson independentes, $\{N_1(t), t \geq 0\}$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ e $\{N_{12}(t), t \geq 0\}$, com taxas de intensidades λ_1, λ_2 e λ_{12}, respectivamente. Eventos do processo $N_1(t)$ são os choques nos itens específicos do Componente 1, eventos do processo $N_2(t)$ são os choques nos itens específicos do Componente 2, e $N_{12}(t)$ são os choques nos itens comuns aos dois componentes. O modelo supõe que a taxa de falha no tempo t do i-ésimo componente, dada a realização do processo estocástico, é

$$d_i N_i(t) + \psi_i(t) N_{12}(t), \quad i = 1, 2,$$

com

$$\psi_i(t) = \begin{cases} \gamma_{i1}, & se \;\; t < y \\ \gamma_{i2}, & se \;\; t \geq y \end{cases},$$

onde d_i mede o impacto do choque sobre o componente específico i, γ_{i1} representa o tamanho do impacto comum no componente i quando os dois componentes estão operando, γ_{i2} representa o tamanho do impacto comum no componente i quando um dos componentes já falhou e $y = \min(t_1, t_2)$.

Considera-se aqui que $d_1 = d_2 = \infty$, ou seja, que os choques sobre os itens dos componentes específicos, $N_i(t)$, sejam fatais enquanto um choque sobre um item comum aos dois componentes, $N_{12}(t)$, causaria um dano potencial no sistema que poderia levar um aumento do risco de falha do componente i com tamanho de impacto $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$. Neste modelo, o impacto dos choques nos itens comuns pode se alterar com a falha de um dos componentes. Note que se $\gamma_{i1} = \gamma_{i2} = \gamma_i$, ou seja, se os impactos forem constantes ao longo do tempo, o modelo se reduzirá ao modelo Weibull bivariado de Ryu.

Sejam X_i, i=1,2 variáveis aleatórias indicando o tempo até o primeiro salto do processo $N_i(t)$ e Z_i a variável aleatória duração, que possui taxa de falha condicional no tempo t de $\psi_i(t)N_{12}(t)$, dada a realização de $N_{12}(t)$. Define-se T_i como o tempo de falha do i-ésimo componente, i = 1,2. Desta forma tem-se que $T_i = \text{mín}(X_i, Z_i)$. Para a formulação do modelo, considera-se que X_i tem uma distribuição Weibull com taxa de falha $\lambda_i \alpha_i x^{\alpha_i - 1}$, ou seja, $P[X_i > t] = \exp\{-\lambda_i t^{\alpha_i}\}$.

Assim, a função de sobrevivência conjunta de (T_1, T_2) é dada por (Nakano, 2002):

$$S(t_1, t_2) = \begin{cases} \exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} t_2 + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_{22}}\left(1 - e^{-\gamma_{22}(t_2 - t_1)}\right) \\ \qquad \frac{\lambda_{12}}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(e^{-\gamma_{22}(t_2 - t_1)} - e^{-\gamma_{22}(t_2 - t_1) - (\gamma_{11}+\gamma_{21})t_1}\right)\Big\}, & t_1 \leq t_2 \\ \\ \exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} t_1 + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_{12}}\left(1 - e^{-\gamma_{12}(t_1 - t_2)}\right) \\ \qquad \frac{\lambda_{12}}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(e^{-\gamma_{12}(t_1 - t_2)} - e^{-\gamma_{12}(t_1 - t_2) - (\gamma_{11}+\gamma_{21})t_2}\right)\Big\}, & t_1 > t_2 \end{cases} \tag{4}$$

Quando $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_1$ e $\gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_2$, o modelo (4) se reduz ao modelo Weibull bivariado de Ryu. Além disso, se $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, o modelo se reduz ao modelo exponencial bivariado de Ryu. Tem-se também que, quando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = \infty$, o modelo se reduz ao modelo exponencial bivariado de Marshall & Olkin. Quando $\gamma_{12} = 0$, tem-se um modelo com tempos independentes onde $T_1 \sim Weibull(\alpha_1, \lambda_1)$. Se $\gamma_{22} = 0$, tem-se um modelo com tempos independentes onde $T_2 \sim Weibull(\alpha_2, \lambda_2)$. Quando $\lambda_{12} = 0$, o modelo se reduz a um produto de duas distribuições Weibull independentes.

3.1 Formulação do modelo de riscos competitivo baseado na extensão do modelo Weibull bivariado de Ryu

O modelo Weibull bivariado proposto é formulado para o contexto de riscos competitivos seguindo a abordagem de tempos de falhas latentes, onde T_1 e T_2 representam os tempos até a falha devido as causas 1 e 2, respectivamente.

Considere Y=mín(T_1, T_2) o tempo de falha observado. Desta forma, a função de sobrevivência total é dada por

$$S_Y(t) = S(t,t) = \exp\left\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21})t}\right)\right\},$$

e a função de risco total

$$h(t) = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} - \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}\left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21})t}\right).$$

As funções de risco "crude", definidas por (1), para o modelo (4) são dadas por

$$g_1^{(1)}(t) = \frac{-\left(\frac{\partial S^{(1)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right)\Big|_{t_1=t_2=t}}{S_Y(t)} = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} - \frac{\lambda_{12}(\gamma_{22}-\gamma_{11}-\gamma_{21})}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21})t}\right)$$

$$g_2^{(1)}(t) = \frac{-\left(\frac{\partial S^{(1)}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right)\Big|_{t_1=t_2=t}}{S_Y(t)} = \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \frac{\lambda_{12}\gamma_{22}}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21})t}\right)$$

ou

$$g_1^{(2)}(t) = \frac{-\left(\frac{\partial S^{(2)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right)\Big|_{t_1=t_2=t}}{S_Y(t)} = \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \frac{\lambda_{12}\gamma_{12}}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21})t}\right)$$

$$g_2^{(2)}(t) = \frac{-\left(\frac{\partial S^{(2)}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right)\Big|_{t_1=t_2=t}}{S_Y(t)} = \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} - \frac{\lambda_{12}(\gamma_{12}-\gamma_{11}-\gamma_{21})}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}\left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21})t}\right)$$

onde $S(t_1,t_2) = \begin{cases} S^{(1)}(t_1,t_2), & se\ t_1 \le t_2 \\ S^{(2)}(t_1,t_2), & se\ t_1 > t_2 \end{cases}$ e $S(t_1, t_2)$ é dado por (4).

Note que γ_{11} e γ_{21} podem assumir valores ∞. Desta forma a razão $\frac{\lambda_{12}(\gamma_{j2}-\gamma_{11}-\gamma_{21})}{\gamma_{11}+\gamma_{21}}$, $j=1,2$ pode ser indeterminada. Assim, considera-se de início que $\gamma_{11} < \infty$ e $\gamma_{21} < \infty$, ou seja, que o impacto de cada choque no processo $N_{12}(t)$ não sejam fatais, garantindo também a propriedade de continuidade do modelo ($P[T_1=T_2] = 0$).

Observe que este modelo apresenta duas funções de risco "crude" para T_1 e T_2, onde $h(t) = g_1^{(j)}(t) + g_2^{(j)}(t)$, j = 1, 2. Desta forma, tem-se também que

$$S_Y(t) = \prod_{i=1}^{2} G_i^{(j)}(t), \quad j = 1, 2,$$

onde $G_i^{(j)}(t) = \exp\left\{ -\int_0^t g_i^{(j)}(u)du \right\}$.

No contexto de riscos competitivos este modelo apresenta um problema. Dada a função de sobrevivência do mínimo, $S_Y(t)$, existem diferentes $g_1(t)$ e $g_2(t)$ que satisfazem (2), e conseqüentemente (3). Ou seja, dado $S_Y(t)$, existem duas falsas funções de sobrevivência marginais para T_1 e T_2.

Uma forma de contornar esse problema de identificabilidade das $G_i(t)$ é adicionar algumas restrições nos parâmetros do modelo de tal forma que se tenha um único par de $G_i(t)$, i=1,2. Assim, γ_{11}, γ_{12}, γ_{21} e γ_{22} serão restritos a valores que satisfaçam $g_i^{(1)}(t) = g_i^{(2)}(t)$, i = 1, 2. Isto é,

$$\gamma_{11} + \gamma_{21} = \gamma_{12} + \gamma_{22} \tag{5}$$

Sob a restrição dada por (5), tem-se que $g_1^{(1)}(t) = g_1^{(2)}(t) = g_1(t)$ e $g_2^{(1)}(t) = g_2^{(2)}(t) = g_2(t)$. Assim, a função de verossimilhança do modelo proposto pode ser dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\Theta} \mid \boldsymbol{Y}) = \prod_{j=1}^{n} \Bigg[& \left(\lambda_1 \alpha_1 y_j^{\alpha_1 - 1} - \tfrac{\lambda_{12}(\gamma_{22} - \gamma_{11} - \gamma_{21})}{\gamma_{11} + \gamma_{21}} \left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21}) y_j} \right) \right)^{\delta_{1j}} \\ & \times \left(\lambda_2 \alpha_2 y_j^{\alpha_2 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}\gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{21}} \left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21}) y_j} \right) \right)^{\delta_{2j}} \\ & \times \exp\left\{ -\lambda_1 y_j^{\alpha_1} - \lambda_2 y_j^{\alpha_2} - \lambda_{12} y_j + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_{11} + \gamma_{21}} \left(1 - e^{-(\gamma_{11}+\gamma_{21}) y_j} \right) \right\} \Bigg] \end{aligned} \tag{6}$$

onde $\boldsymbol{Y}$=(y_1,...,y_n) é o vetor de valores observados, com seu respectivo vetor de indicadores de censuras $\boldsymbol{\delta}_i$=(δ_{i1},...,δ_{in}), i=1,2. Aqui, δ_{ij} = 1 indica que o indivíduo j morreu devido a causa i, e, caso contrário, δ_{ij} = 0. Se δ_{1j} = δ_{2j} = 0, então, a observação y_j foi censurada.

O vetor de parâmetros é dado por $\boldsymbol{\Theta}$ = (λ_1, α_1, λ_2, α_2, λ_{12}, γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22})', onde λ_1, α_1, λ_2, α_2, λ_{12}, γ_{11}, γ_{12}, γ_{21} e γ_{22} são parâmetros positivos que devem satisfazer a condição dada por (5).

As funções de risco "net" do modelo proposto são dadas por:

$$h_i(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \lambda_{12}\left(1 - e^{-\gamma_{i2} t}\right), \quad i\text{=1,2.}$$

Note neste modelo que, em geral, $g_i(t) \neq h_i(t)$, i=1,2. Desta forma temos que este modelo não possui as marginais identificáveis, a menos que γ_{12} = 0, γ_{22} = 0 ou λ_{12} = 0 (T_1 e T_2 independentes).

4 Abordagem Bayesiana

Foi realizada uma análise Bayesiana de dados de riscos competitivos via MCMC com variáveis latentes. A inferência foi realizada a partir do modelo (4), proposto neste trabalho. Para simplificações computacionais, foi considerada a seguinte reparametrização:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \theta_1 \quad \text{e} \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \theta_2 \tag{7}$$

Note que (7) satisfaz a restrição dada por (5). Ainda, se $\theta_1 = \theta_2 = \gamma$, o modelo se reduz ao modelo Weibull bivariado de Ryu com $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

De (6) e (7), a função de verossimilhança para $\boldsymbol{\Theta} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_2, \alpha_1, \theta_1, \theta_2)'$ é dada por:

$$L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2} \mid \boldsymbol{\Theta}) = \prod_{j=1}^{n} \Bigg[\left(\lambda_1 \alpha_1 y_j^{\alpha_1 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}\theta_2}{\theta_1+\theta_2} \left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)\right)^{\delta_{1j}}$$
$$\times \left(\lambda_2 \alpha_2 y_j^{\alpha_2 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}\theta_1}{\theta_1+\theta_2} \left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)\right)^{\delta_{2j}}$$
$$\times \exp\left\{ -\lambda_1 y_j^{\alpha_1} - \lambda_2 y_j^{\alpha_2} - \lambda_{12} y_j + \tfrac{\lambda_{12}}{\theta_1+\theta_2}\left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)\right\} \Bigg]$$

Para simplificar mais adiante a obtenção das distribuições *a posteriori*, considere a introdução de variáveis latentes, U_{1j} e U_{2j}, $j = 1,2,...,n$, as quais transformam o modelo em componentes independentes (Tanner e Wong, 1987). As variáveis U_{ij} são independentes, e dado $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \boldsymbol{\Theta})$, seguem uma distribuição *Bernoulli*(p_{ij}), $i = 1,2$ e $j = 1,2,...,n$, onde,

$$p_{1j} = \frac{\lambda_1 \alpha_1 y_j^{\alpha_1 - 1}}{\lambda_1 \alpha_1 y_j^{\alpha_1 - 1} + \frac{\lambda_{12}\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)} \quad \text{e} \quad p_{2j} = \frac{\lambda_2 \alpha_2 y_j^{\alpha_2 - 1}}{\lambda_2 \alpha_2 y_j^{\alpha_2 - 1} + \frac{\lambda_{12}\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)}.$$

Assim, a função de verossimilhança para os dados aumentados é dada por:

$$L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2}, \boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2} \mid \boldsymbol{\Theta}) = L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta_1}, \boldsymbol{\delta_2} \mid \boldsymbol{\Theta}) L(\boldsymbol{U_1} \mid \boldsymbol{\Theta}) L(\boldsymbol{U_2} \mid \boldsymbol{\Theta})$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \Bigg[\left(\left(\lambda_1 \alpha_1 y_j^{\alpha_1 - 1}\right)^{u_{1j}} \left(\tfrac{\lambda_{12}\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)\right)^{(1-u_{1j})}\right)^{\delta_{1j}}$$
$$\times \left(\left(\lambda_2 \alpha_2 y_j^{\alpha_2 - 1}\right)^{u_{2j}} \left(\tfrac{\lambda_{12}\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)\right)^{(1-u_{2j})}\right)^{\delta_{2j}} \tag{8}$$
$$\times \exp\left\{ -\lambda_1 y_j^{\alpha_1} - \lambda_2 y_j^{\alpha_2} - \lambda_{12} y_j + \tfrac{\lambda_{12}}{\theta_1+\theta_2}\left(1 - e^{-(\theta_1+\theta_2) y_j}\right)\right\} \Bigg]$$

Supondo a independência dos parâmetros, e levando em conta o fato de todos eles serem não negativos, consideramos *a priori*, que cada parâmetro segue uma distribuição *Gama*, ou seja,

$\lambda_1 \sim Gama(a_1,b_1)$; $\lambda_2 \sim Gama(a_2,b_2)$; $\lambda_{12} \sim Gama(a_3,b_3)$; $\alpha_1 \sim Gama(a_4,b_4)$; $\alpha_2 \sim Gama(a_5,b_5)$; $\theta_1 \sim Gama(a_6,b_6)$; $\theta_2 \sim Gama(a_7,b_7)$,

onde a_k e b_k, $k = 1, ..., 7$ são hiper-parâmetros conhecidos.

As distribuições condicionais (completas) *a posteriori* dos parâmetros são dadas por:

$$\pi\left(\lambda_1 \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\lambda_1)}\right) \propto \lambda_1^{\left(a_1+\sum_{j=1}^{n} u_{1j}\delta_{1j}\right)-1} e^{-\lambda_1\left(b_1+\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_1}\right)};$$

$$\pi\left(\lambda_2 \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\lambda_2)}\right) \propto \lambda_2^{\left(a_2+\sum_{j=1}^{n} u_{2j}\delta_{2j}\right)-1} e^{-\lambda_2\left(b_2+\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_2}\right)};$$

$$\pi\left(\lambda_{12} \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\lambda_{12})}\right) \propto \lambda_{12}^{\left(a_3+\sum_{j=1}^{n}\left((1-u_{1j})\delta_{1j}+(1-u_{2j})\delta_{2j}\right)\right)-1}$$
$$\times e^{-\lambda_{12}\left(b_3+\sum_{j=1}^{n} y_j-\frac{1}{\theta_1+\theta_2}\sum_{j=1}^{n}\left(1-e^{-(\theta_1+\theta_2)y_j}\right)\right)};$$

$$\pi\left(\alpha_1 \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\alpha_1)}\right) \propto \left[e^{-\lambda_1\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_1}} \prod_{j=1}^{n} y_j^{(\alpha_1-1)u_{1j}\delta_{1j}}\right]\left[\alpha_1^{\left(a_4+\sum_{j=1}^{n} u_{1j}\delta_{1j}\right)-1} e^{-\alpha_1 b_4}\right];$$

$$\pi\left(\alpha_2 \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\alpha_2)}\right) \propto \left[e^{-\lambda_2\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_2}} \prod_{j=1}^{n} y_j^{(\alpha_2-1)u_{2j}\delta_{2j}}\right]\left[\alpha_2^{\left(a_5+\sum_{j=1}^{n} u_{2j}\delta_{2j}\right)-1} e^{-\alpha_2 b_5}\right];$$

$$\pi\left(\theta_1 \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\theta_1)}\right) \propto \Psi\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}\right)\left[\theta_1^{\left(a_6+\sum_{j=1}^{n}(1-u_{2j})\delta_{2j}\right)-1} e^{-\theta_1 b_6}\right];$$

$$\pi\left(\theta_2 \mid \boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}_{(\theta_2)}\right) \propto \Psi\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}\right)\left[\theta_2^{\left(a_7+\sum_{j=1}^{n}(1-u_{1j})\delta_{1j}\right)-1} e^{-\theta_2 b_7}\right],$$

onde,

$$\Psi\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta_1},\boldsymbol{\delta_2},\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{\Theta}\right) = \left(\theta_1+\theta_2\right)^{-\sum_{j=1}^{n}\left((1-u_{1j})\delta_{1j}+(1-u_{2j})\delta_{2j}\right)} e^{\frac{\lambda_{12}}{\theta_1+\theta_2}\sum_{j=1}^{n}\left(1-e^{-(\theta_1+\theta_2)y_j}\right)}$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}\left(1-e^{-(\theta_1+\theta_2)y_j}\right)^{(1-u_{1j})\delta_{1j}+(1-u_{2j})\delta_{2j}}.$$

Note que λ_1, λ_2 e λ_{12} podem ser gerados usando o algoritmo Gibbs Sampling (Geman e Geman, 1984; Gelfand e Smith, 1990) e α_1, α_2, θ_1, e θ_2 devem ser gerados usando o algoritmo Metropolis-Hastings (Metropolis et al., 1953; Hastings, 1970).

5 Resultados e discussão

O modelo de riscos competitivos é ilustrado em uma aplicação numérica, considerando dados simulados. Foi gerada uma amostra de tamanho n = 100 da densidade conjunta do modelo (4) sujeito a (7), com os seguintes valores fixados para os parâmetros: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}1$; $\lambda_{12} = 1{,}5$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ e $\theta_1 = \theta_2 = 3$. Nakano (2002) mostra como gerar os dados bivariados pelo Método da Rejeição. Ademais, um mecanismo aleatório foi introduzido para incorporar censuras nos dados.

Os dados gerados são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 1 - Tempos de sobrevivência gerados. Aqui δ é o indicador de censura, onde $\delta = i$ indica falha devido a causa i, i=1,2 e $\delta = 0$ significa que o tempo foi censurado

y	δ	y	δ	y	δ	y	δ	y	δ
0,007	0	0,354	0	0,473	1	0,673	1	1,040	1
0,068	2	0,366	2	0,484	2	0,677	1	1,051	2
0,127	2	0,370	0	0,499	2	0,680	0	1,068	1
0,150	2	0,372	2	0,501	1	0,688	1	1,121	2
0,154	1	0,381	1	0,504	1	0,757	1	1,136	1
0,167	1	0,386	1	0,507	0	0,761	1	1,147	1
0,176	1	0,392	1	0,556	2	0,769	1	1,175	2
0,182	2	0,400	1	0,567	1	0,794	1	1,240	2
0,192	1	0,409	0	0,571	2	0,821	1	1,246	1
0,196	2	0,414	2	0,578	1	0,823	2	1,278	0
0,199	1	0,414	1	0,589	0	0,862	1	1,353	1
0,222	2	0,414	0	0,590	1	0,862	2	1,509	1
0,245	2	0,419	2	0,595	1	0,953	2	1,523	1
0,250	1	0,429	1	0,595	1	0,982	2	1,751	1
0,252	2	0,432	1	0,601	1	0,991	2	1,894	0
0,269	0	0,437	2	0,609	2	1,005	2	2,060	2
0,281	1	0,453	1	0,617	2	1,016	1	2,078	2
0,287	1	0,458	2	0,626	2	1,018	1	2,248	2
0,326	2	0,461	1	0,638	0	1,025	0	2,258	1
0,333	0	0,469	2	0,662	2	1,025	2	2,613	1

Para essa amostra gerada foram consideradas as estimativas bayesianas para o respectivo modelo de riscos competitivos. Foram adotadas, para todos os parâmetros, *prioris* não informativas *Gama*(10^{-3}, 10^{-3}). A inferência dos parâmetros foi realizada via MCMC com variáveis latentes.

O diagnóstico de convergência realizado e as densidades marginais estimadas dos parâmetros se encontram no Apêndice.

Os dados com as médias *a posteriori* e os respectivos intervalos de credibilidade das estimativas dos parâmetros são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Estimativas bayesianas dos parâmetros do modelo (4) sujeito à (7) para os dados da Tabela 1

Parâmetro	**Valor fixado para gerar os dados**	**Estimativa (média *a posteriori*)**	**I.C. 95%**
λ_1	0,1	0,144	(0,003 ; 0,396)
λ_2	0,1	0,053	(0,001 ; 0,217)
λ_{12}	1,5	1,245	(0,731 ; 1,667)
α_1	2	1,957	(0,586 ; 3,355)
α_2	2	2,089	(0,415 ; 4,182)
θ_1	3	2,716	(1,163 ; 5,835)
θ_2	3	2,893	(1,309 ; 5,696)

A Figura 1 mostra os gráficos das funções de sobrevivência estimadas, pelo estimador de Kaplan-Meier (Kaplan e Meier, 1958) e pelo modelo proposto.

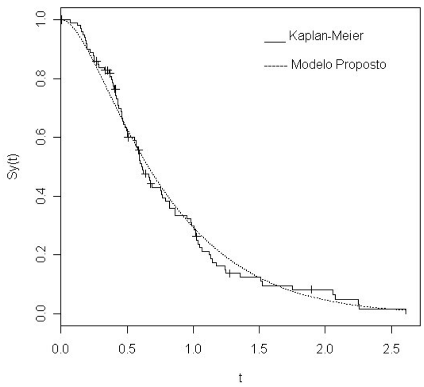


Figura 1 - Estimativas das funções de sobrevivência total para os dados da Tabela 1. A função escada é a estimativa empírica, obtida pelo estimador de Kaplan-Meier e a função tracejada é a função de sobrevivência estimada pelo modelo proposto, obtida pelas estimativas dos parâmetros apresentados na Tabela 2. Os tempos censurados são representados por "+".

Como pôde ser visto na Figura 1, função de sobrevivência total estimada pelo modelo proposto está próxima da função de sobrevivência estimada pelo estimador de Kaplan-Meier. Portanto, se o interesse for estimar a função de sobrevivência total, este modelo apresenta resultados satisfatórios.

No entanto, se o interesse do pesquisador é estimar as funções de sobrevivência marginais, então este modelo (assim como o modelo de Ryu) não é adequado, pois ele não identifica as suas marginais a partir da distribuição do mínimo, pois tem-se em geral, $g_i(t) \neq h_i(t)$, i=1,2. Portanto as marginais do modelo proposto neste trabalho somente poderão ser estimadas sob suposição de independência entre os tempos de vida.

Conclusões

Formulado à partir de modificações nas suposições do modelo Weibull bivariado de Ryu, o modelo proposto neste trabalho permite que os impactos dos choques se alterem após a falha de um dos componentes. Este modelo acomoda o modelo Weibull (exponencial) bivariado de Ryu e o modelo exponencial bivariado de Marshall e Olkin como casos particulares. Assim, como no modelo de Ryu, este modelo não é identificável para riscos competitivos. Entretanto, ele é útil para estimar a função de sobrevivência total.

A utilização de modelos não identificáveis não prejudica a análise final se o interesse estiver em estimar a função de sobrevivência (risco) total. No entanto, as distribuições das marginais somente poderão ser estimadas sob a suposição de independência e/ou o modelo ser identificável ($g_i(t)=h_i(t)$).

A inferência Bayesiana via MCMC mostrou-se eficaz em estimar os parâmetros do modelo proposto. Além disso, a utilização da técnica de dados ampliados (uso de variáveis latentes) facilitou consideravelmente o método, no sentido de simplificar a função de verossimilhança.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro concedido para o desenvolvimento deste trabalho. Processo nº. 131188/2001-1. Os autores agradecem aos revisores pelos comentários e sugestões.

NAKANO, E. Y.; RODRIGUES, J. An extension of Ryu's bivariate weibull distribution: a bayesian application in competing risks. *Rev. Mat. Est.*, São Paulo, v.24, n.4, p.99-115, 2006.

- *ABSTRACT: The formulation of bivariate models is fundamental to explain a possible dependence between life times, since the supposition of independence in competing risks can be questionable. Some bivariate models based on the shock processes are accepted in the literature. Among them, we can mention the Marshall and Olkin's bivariate exponential model (Marshall and Olkin, 1967) and the Ryu's bivariate Weibull model (Ryu, 1993). In the present study, the Ryu's bivariate model was extended to allow the shocks to change with time by modifying its suppositions. A competing risks model was formulated from this model, and using simulated data and MCMC algorithm with latent variables, its parameters were estimated via Bayesian procedures.*

- *KEYWORDS: Non–identifiability; crude risk; net risk; latent variables.*

Referências

BERMAN, S. M. Note on extreme values competing risks and semi-Markov processes. *Ann. Math. Stat.*, Ann Arbor, v.34, p.1104-1106, 1963.

BHATTACHARYA, A. Modeling exponential survival data with dependent censoring. *Sankhyá*: *Indian J. Stat.*, Calcutta, v.59, A, p.242-267, 1997.

ELANDT-JOHNSON, R. C.; JOHNSON, N. L. *Survival models and data analysis*. New York: John Wiley, 1980. 480p.

FLEMING, T. R.; HARRINGTON, D. P. *Counting processes and survival analysis*, New York: John Wiley, 1991. 448p.

GAIL, M. A review and critique of some models used in competing risks analysis. *Biometrics*, Washington, v.31, p.209-222, 1975.

GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. M. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.85, p.398-409, 1990.

GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Stat. Sci.*, HayWard, v.7, p.457-511, 1992.

GEMAN, S.; GEMAN. D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intellig.*, New York, v.6, p.721-741, 1984.

HASTINGS, W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, London, v.57, p.97-109, 1970.

HECKMAN, J. J.; HONORÉ, B. E. The identifiability of the competing risks model. *Biometrika*, London, v.76, p.325-330, 1989.

KAPLAN, E. L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.53, p.457-481, 1958.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A multivariate exponential distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.62, p.30-44, 1967.

METROPOLIS, N. et al. Equations of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, Woodbury, v.21, p.1087-1092, 1953.

MOESHBERGER, M. L. Life tests under dependent competing causes of failure. *Technometrics*, Washington, v.16, n.1, p.39-47, 1974.

NAKANO, E. Y. *Uma extensão do modelo Weibull bivariado de Ryu*: uma aplicação bayesiana para riscos competitivos. 2002. 81f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002.

RAFTERY, A. E. A continuous multivariate exponential distribution. *Commun. Stat. Part A - Theory Methods*, New York, v.13, p.947-965, 1984.

RYU, K. An extension of Marshall and Olkin's bivariate exponential distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.88, n.424, p.1458-1465, 1993.

TANNER, M. A.; WONG, W. H. The calculation of posterior distributions by data augmentation. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.82, p.528-550, 1987.

TARUMOTO, M. H. *Um modelo Weibull bivariado para riscos competitivos*. 2001. 154f. Tese (Doutorado em Estatística) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas, Campinas, 2001.

Recebido em 19.06.2006.

Aprovado após revisão em 21.02.2007.

Apêndice – Diagnóstico de Convergência

Foi gerada uma cadeia de tamanho m = 100.000 da *posteriori* conjunta. Essa cadeia foi dividida em duas cadeias de tamanho 50.000 para a realização do diagnóstico de Gelman e Rubin (1992). Pelo diagnóstico de Gelman e Rubin, foi verificada a convergência da cadeia já na iteração b = 30.000. Após a convergência da cadeia, os valores foram tomados considerando saltos (*thin*) de tamanho k = 10, resultando assim, uma amostra de tamanho n = 1.401. O diagnóstico de convergência realizado, os gráficos de autocorrelações para verificar a dependência entre os valores observados e os *plots* das densidades marginais estimadas dos parâmetros são apresentados a seguir.

Tabela 3 - Diagnóstico de Gelman e Rubin

Parâmetro	**Mediana**	**Quantil 97,5%**
λ_1	1,00	1,00
λ_2	1,00	1,00
λ_{12}	1,00	1,00
α_1	1,00	1,00
α_2	1,00	1,00
θ_1	1,01	1,02
θ_2	1,01	1,00

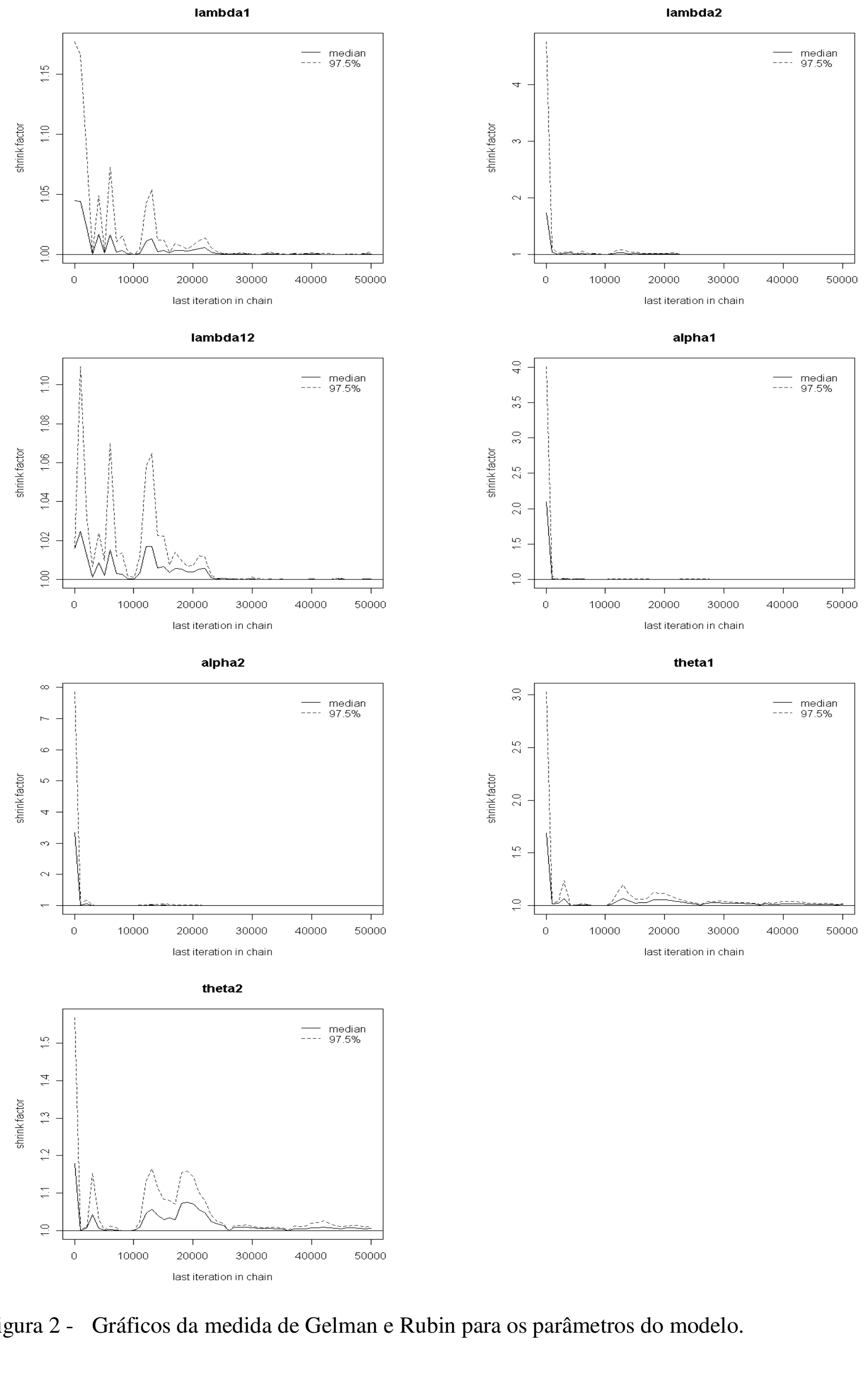


Figura 2 - Gráficos da medida de Gelman e Rubin para os parâmetros do modelo.

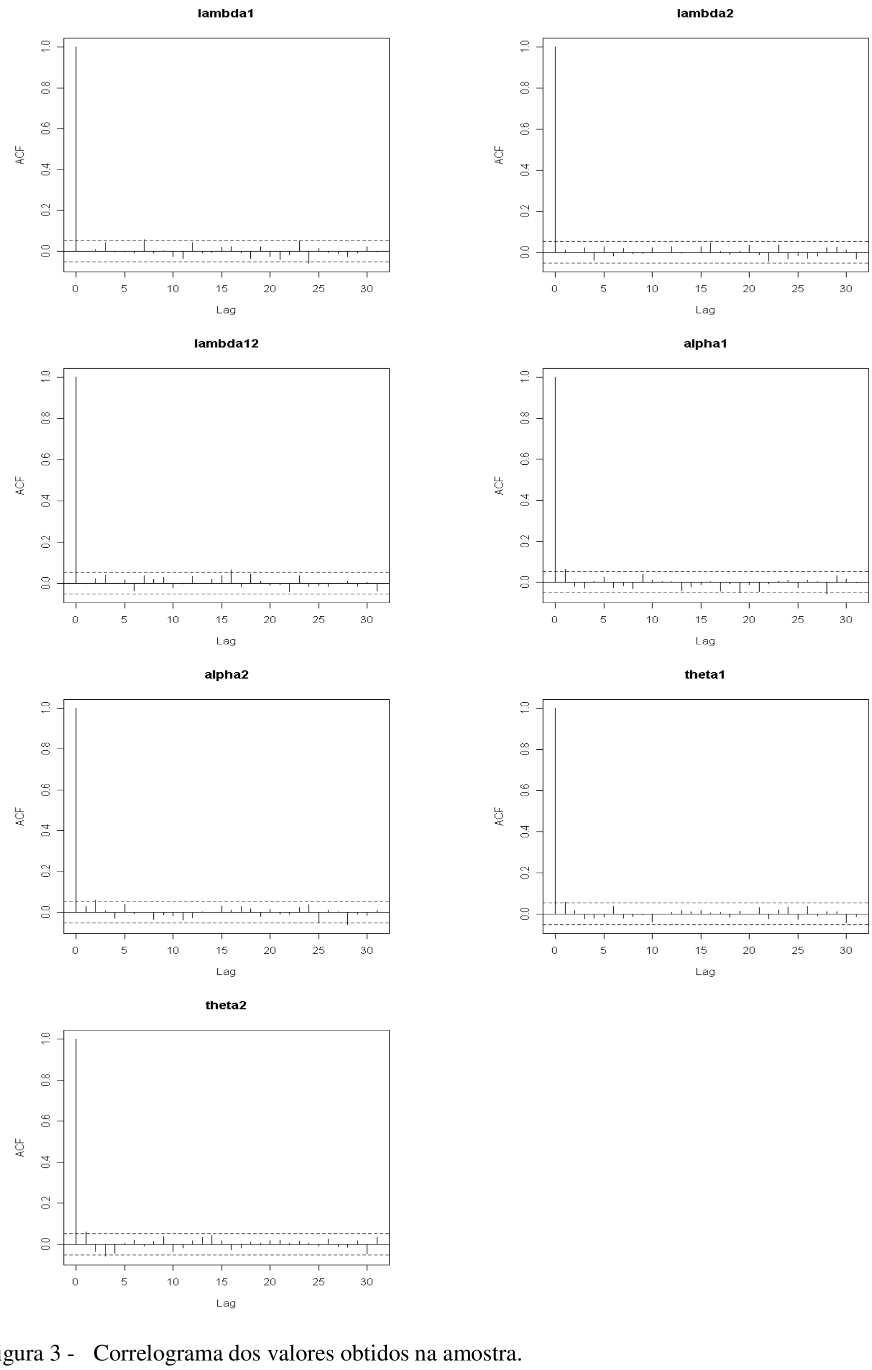
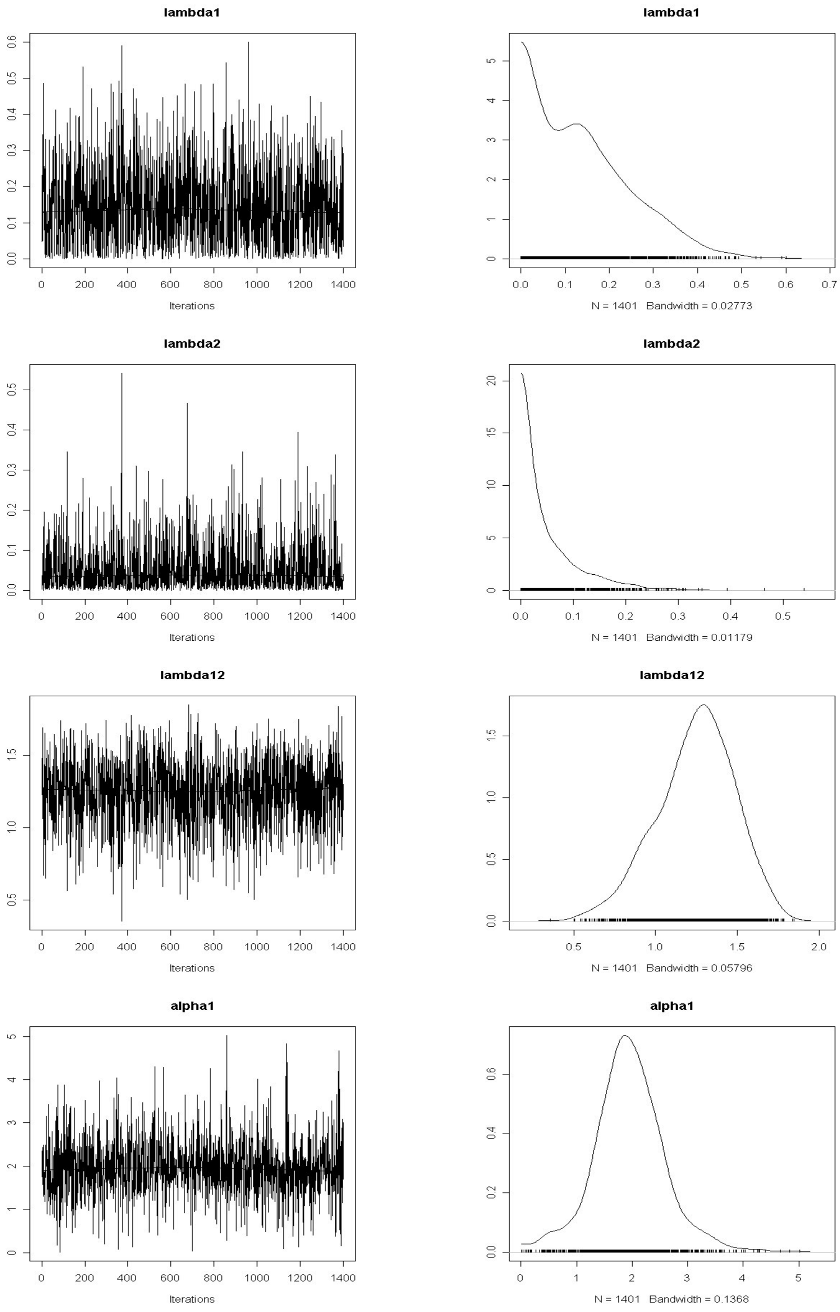


Figura 3 - Correlograma dos valores obtidos na amostra.


lambda1
Iterations
lambda1
N = 1401 Bandwidth = 0.02773
lambda2
Iterations
lambda2
N = 1401 Bandwidth = 0.01179
lambda12
Iterations
lambda12
N = 1401 Bandwidth = 0.05796
alpha1
Iterations
alpha1
N = 1401 Bandwidth = 0.1368

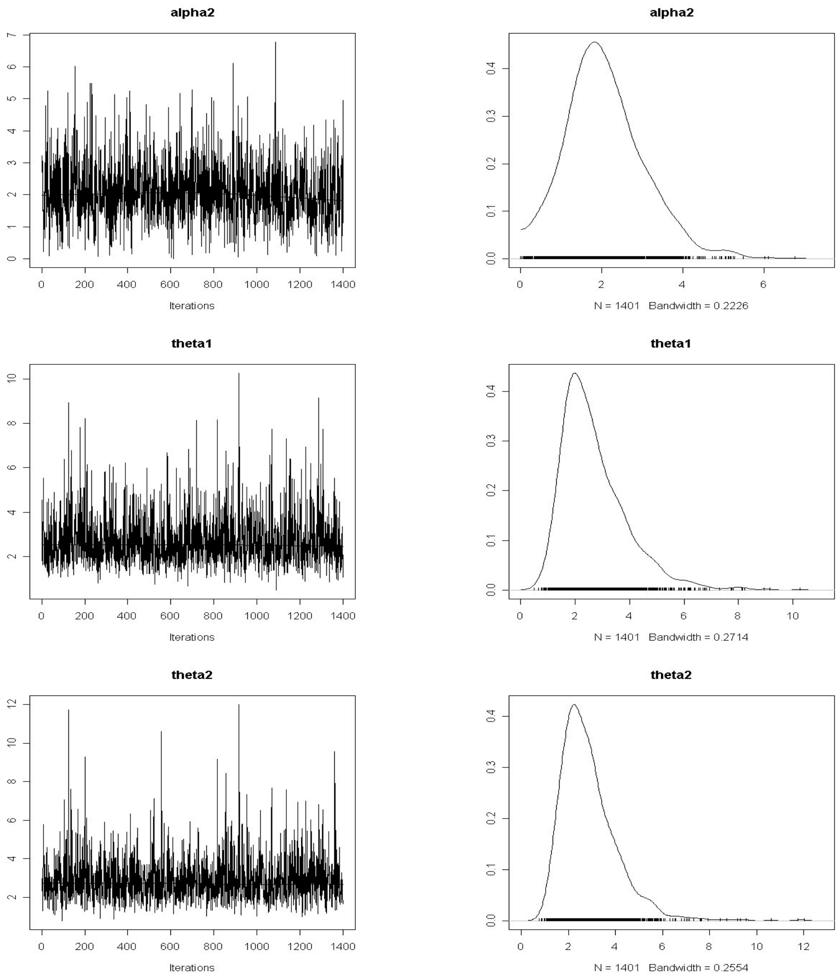


Figura 4 - Traço e densidades dos parâmetros do modelo.