PARABOLÓIDES HIPERBÓLICOS *N*-DIMENSIONAIS SÃO REGRADOS

Marcos Luiz CRISPINO[1]

▪ RESUMO: Será demonstrado, pela aplicação da Álgebra Linear, que parabolóides hiperbólicos em espaços euclidianos *n*-dimensionais são regrados.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Superfícies em espaços euclidianos; quádricas *n*-dimensionais; parabolóides *n*-dimensionais.

1 Introdução

Quádricas em espaços $\mathbb{R}^n$ onde $n > 3$ (também chamadas hiperquádricas) intervêm, através da análise de regressão não-linear, na modelagem matemática de numerosos processos e fenômenos em Ciências e Engenharia. Conforme mostram vários artigos publicados nos últimos quinze anos, entre os quais Fang et al. (1998), Kupka e Meloun (2001), Meloun et al. (2005a) e Meloun et al. (2005b), parabolóides em espaços $\mathbb{R}^n$ onde $n > 3$, (hiperparabolóides) intervêm, pela análise de regressão não-linear, na modelagem matemática e na otimização de diversos processos químicos. Portanto, o interesse pelo conhecimento das propriedades geométricas e topológicas das quádricas *n*-dimensionais, em particular dos parabolóides, está longe de ser exclusivo da Matemática pura.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo mostrar que os métodos da Álgebra Linear fornecem, de modo simples e independente da dimensão do espaço, provas de importantes propriedades geométricas dos parabolóides *n*-dimensionais. Em primeiro lugar, será provado que parabolóides hiperbólicos em espaços euclidianos de dimensão n qualquer são regrados. Será demonstrada também uma interessante propriedade: Se X é um parabolóide hiperbólico de um espaço (euclidiano) de dimensão maior que 3, então existe, para cada ponto $p \in X$, uma *classe infinita não-enumerável* formada por retas contidas em X e concorrentes no ponto p. Em seguida, será mostrado que somente os parabolóides hiperbólicos são regrados.

2 Símbolos e definições

$X \backslash A$ é o complementar do conjunto A relativamente ao conjunto X.
O símbolo 0 representa o vetor nulo do espaço vetorial E.
$\dim E$ é a dimensão do espaço vetorial (de dimensão finita) E.

[1] Departamento de Energia Nuclear, Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, CEP: 50740-540, Recife, PE, Brasil. E-mail: *edfcd2003@gmail.com* / *edfcd2003@yahoo.com.br*

O subespaço vetorial gerado pelo subconjunto X do espaço vetorial E será indicado pela notação $S(X)$.

Quando X é um conjunto finito $\{u_1,\ldots,u_n\}$, escreve-se $S(u_1,\ldots,u_n)$ em vez de $S(\{u_1,\ldots,u_n\})$, e diz-se que $S(u_1,\ldots,u_n)$ é o subespaço de E *gerado pelos vetores* $u_1,\ldots,u_n$.

Em particular, $S(u)$ é o subespaço de E gerado pelo vetor $u \in E$.

$\mathrm{Ker}(A)$ e $\mathrm{Im}(A)$ são respectivamente o núcleo e a imagem da transformação linear $A: E \to F$.

Sejam X um subconjunto do espaço vetorial E e $a \in E$. Como usual, $a + X$ é a imagem de X pela translação $\varphi_a : E \to E$, definida por $\varphi_a(x) = a + x$. Portanto,

$$a + X = \{a + x : x \in X\}$$

Se F é um subespaço vetorial de E, então $a + F$ é uma *variedade linear*, ou *variedade afim* paralela ao subespaço F, ou ainda modelada no subespaço F.

Dado o vetor não-nulo $v \in E$, a variedade linear $a + S(v)$ é a *reta* de *vetor diretor* v que passa pelo ponto a.

Seja E um espaço euclidiano. O símbolo $\langle u,v\rangle$ denotará o produto interno dos vetores $u,v \in E$. $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ é a norma do produto interno em E.

$X^{\perp}$ é o complemento ortogonal do conjunto $X \subseteq E$. Portanto, $X^{\perp} = [S(x)]^{\perp}$.

Dado o espaço euclidiano E de dimensão finita, sejam $p \in E$ e $n \in E$ um vetor não-nulo. A variedade linear $X = p + [S(n)]^{\perp}$ é o *hiperplano* de E que contém p e é normal ao vetor n.

Diz-se que uma forma quadrática $g: E \to \mathbb{R}$ é:

Não-negativa quando $g(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.

Não-positiva quando $g(x) \leq 0$ para todo $x \in E$.

Positiva quando $g(x) > 0$ para todo $x \in E\backslash\{0\}$.

Negativa quando $g(x) < 0$ para todo $x \in E\backslash\{0\}$.

Indefinida quando existem $x,y \in E$ com $g(x) > 0$ e $g(y) < 0$.

Seja E um espaço euclidiano de dimensão finita. Uma função $\varphi : E \to \mathbb{R}$ chama-se *função quadrática* quando $\varphi(x) = g(x) + h(x)$, onde $g : E \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática e $h : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. Portanto, existem um único operador linear auto-adjunto $A : E \to E$ e um único vetor $a \in E$ de modo que:

$$\varphi(x) = \langle x,Ax\rangle + \langle a,x\rangle$$

Sejam $\varphi : E \to \mathbb{R}$ uma função quadrática e α um número real. O conjunto $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$ das soluções da equação $\varphi(x) = \alpha$ chama-se *quádrica* de E.

Sejam E um espaço euclidiano de dimensão finita e $\varphi : E \to \mathbb{R}$ a função quadrática definida pondo:

$$\varphi(x) = \langle x,Ax\rangle + \langle a,x\rangle$$

onde $a \in E$ e $A : E \to E$ é um operador linear auto-adjunto. A quádrica $X = \varphi^{-1}(\{\alpha\})$ chama-se *parabolóide* quando o posto do operador A é $[\dim E] - 1$ e o vetor a não pertence à imagem $\mathrm{Im}(A)$ de A. Diz-se que X é um *parabolóide elíptico* quando a forma quadrática g, definida em E por $g(x) = \langle x,Ax\rangle$, é não-negativa, e que X é um *parabolóide hiperbólico* quando g é indefinida.

3 Observações

3.1 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$, $A : E \to E$ um operador linear auto-adjunto, $a \in E$ e $\varphi : E \to \mathbb{R}$ a função quadrática definida por:

$$\varphi(x) = \langle x,Ax\rangle + \langle a,x\rangle$$

Seja $p \in E$ um vetor qualquer. Escrevendo $x = (x - p) + p$ e usando a definição de operador auto-adjunto, verifica-se facilmente que vale:

$$\varphi(x) = \langle x - p,A(x - p)\rangle + \langle 2Ap + a,x - p\rangle + \varphi(p) \tag{1}$$

qualquer que seja $x \in E$. Seja X a quádrica $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$. Para todo $p \in X$, tem-se $\varphi(p) = \alpha$. Assim sendo, decorre de (1) que vale, para quaisquer $p \in X$ e $x \in E$, a seguinte igualdade:

$$\varphi(x) = \langle x - p,A(x - p)\rangle + \langle 2Ap + a,x - p\rangle + \alpha \tag{2}$$

Por conseguinte: dado qualquer $p \in X$ tem-se:

$$x \in X \Leftrightarrow \langle x - p,A(x - p)\rangle + \langle 2Ap + a,x - p\rangle = 0 \tag{3}$$

Seja $p \in X$ arbitrário. Dado $v \in E\backslash\{0\}$, seja D a reta $p + S(v)$. Todo vetor $x \in D$ se escreve, de modo único, como $x = p + tv$, onde $t \in \mathbb{R}$. Logo, segue-se da condição (3) que um vetor x pertence à interseção $D \cap X$ se, e somente se, x se escreve na forma $x = p + tv$, onde o número real t cumpre a seguinte condição:

$$\langle v,Av\rangle t^2 + \langle 2Ap + a,v\rangle t = 0 \tag{4}$$

Portanto, vale uma, e somente uma das afirmações abaixo:

(1)$D \cap X = \{p\}$.

(2) $D \cap X = \{p,p + tv\}$, onde $t \neq 0$ é solução de $\langle v,Av\rangle t^2 + \langle 2Ap + a,v\rangle t = 0$

(3)$D \subseteq X$.

Para que seja $D \subseteq X$ é necessário e suficiente que todo número real t seja solução da equação (4). Em conseqüência,

$$D \subseteq X \Leftrightarrow \langle v,Av\rangle = \langle 2Ap + a,v\rangle = 0 \tag{5}$$

3.2

(i) Sejam E e φ como no item 3-1 acima, com $a \in E\backslash\mathrm{Im}(A)$. Sendo o espaço vetorial E de dimensão finita, se fosse $\ker(A) = \{0\}$ o operador A seria injetivo, e portanto sobrejetivo. Como a não pertence a $\mathrm{Im}(A)$, segue-se $\ker(A) \neq \{0\}$.

(ii) Se fosse $\langle a,x\rangle = 0$ para todo $x \in E$, ter-se-ia $a \in [\ker(A)]^{\perp}$. Como o operador A é auto-adjunto, $[\ker(A)]^{\perp} = \mathrm{Im}(A)$. Portanto, a pertenceria a $\mathrm{Im}(A)$. Ora, o vetor a não pertence a $\mathrm{Im}(A)$. Logo, existe $x_0 \in \ker(A)$ de modo que $\langle a,x_0\rangle$ é diferente de zero. Para este x_0, tem-se, para todo número real t,

$$\varphi(tx_0) = t\langle a, x_0\rangle$$

Por conseguinte, a função φ é sobrejetiva. Assim sendo, o conjunto $X = \varphi^{-1}(\{\alpha\})$ é não-vazio, seja qual for o número real α. Como a não pertence a Im(A), o vetor $2Ap + a$ é diferente de 0, seja qual for $p \in E$. Em particular, $2Ap + a$ é diferente de 0 para todo $p \in X$.

3.3 Seja $E = F \oplus G$, onde $F,G \subseteq E$ são subespaços vetoriais. Dados $u_1,u_2 \in F$, sejam $v_1,v_2 \in G$ arbitrários. Para quaisquer números reais α_1, α_2, vale:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(u_1 + v_1) + \alpha_2(u_2 + v_2) = \\ &= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \end{aligned} \tag{6}$$

Uma vez que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in F$, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in G$ e $E = F \oplus G$, a equação (6) conduz a:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(u_1 + v_1) + \alpha_2(u_2 + v_2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Resulta de (7) que, se os vetores u_1, u_2 são linearmente independentes, também o são os vetores $u_1 + v_1$ e $u_2 + v_2$.

3.4 Sejam u_1, u_2 vetores linearmente independentes do espaço vetorial E, e t_1, t_2 números reais com $t_1 \neq t_2$. Para quaisquer números reais α_1, α_2, vale:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(u_1 + t_1 u_2) + \alpha_2(u_1 + t_2 u_2) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)u_1 + (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)u_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Sendo t_1 diferente de t_2, tem-se $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 = 0$ se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Segue deste fato, da equação (8) e da independência linear dos vetores u_1, u_2 que vale:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(u_1 + t_1 u_2) + \alpha_2(u_1 + t_2 u_2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)u_1 + (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)u_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Logo, os vetores $u_1 + t_1 u_2$ e $u_1 + t_2 u_2$ são linearmente independentes. Como o vetor u_2 é diferente de 0, a função $\psi : \mathbb{R} \to E$, definida pondo:

$$\psi(t) = u_1 + tu_2$$

é injetiva. Por esta razão, o conjunto:

$$\psi(\mathbb{R}) = \{u_1 + tu_2 : t \in \mathbb{R}\}$$

é infinito, não-enumerável e formado por vetores dois a dois linearmente independentes.

3.5 Sejam u_1, u_2 e u_3 vetores linearmente independentes do espaço vetorial F. Seja G o subespaço vetorial $S(u_1,u_2)$ gerado pelos vetores u_1 e u_2. Da independência linear de u_1 e u_2 segue:

$$S(u_1,u_2,u_3) = G \oplus S(u_3) \tag{10}$$

Sejam $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sendo u_1 e u_2 linearmente independentes, resulta da igualdade (10) e dos itens 3.3 e 3.4 que os vetores $u_1 + \lambda_1 u_2 + v$ e $u_1 + \lambda_2 u_2 + w$ são linearmente independentes, sejam quais forem $v,w \in S(u_3)$. Dada uma função $\xi : G \to \mathbb{R}$, seja $\chi : \mathbb{R} \to S(u_1,u_2,u_3)$ definida por:

$$\chi(t) = u_1 + tu_2 + \xi(u_1 + tu_2)u_3$$

Em vista do exposto, os vetores $\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, são dois a dois linearmente independentes. Por esta razão, os subespaços $S(\chi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, formam uma classe infinita de subespaços de E de dimensão um, cada um deles contido em $S(u_1,u_2,u_3)$.

3.6 Sejam $\varphi_1,\varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\varphi_1(x) = \langle x,A_1x\rangle + \langle a_1,x\rangle$$

$$\varphi_2(x) = \langle x,A_2x\rangle + \langle a_2,x\rangle$$

onde $A_1,A_2 : E \to E$ são operadores lineares auto-adjuntos e $a_1 \in E\backslash\mathrm{Im}(A_1)$. Sejam $X_1 = \varphi_1^{-1}(\{\alpha_1\})$ e $X_2 = \varphi_2^{-1}(\{\alpha_2\})$, sendo $X_1 = X_2$. Pelo item 3-2, o vetor $2A_1p + a_1$ é não-nulo para todo $p \in X_1$. Decorre deste fato e do Teorema 10-9 de Greub (1981, p.304-306) que existe um número real κ diferente de zero de modo que $A_2 = \kappa A_1$, $a_2 = \kappa a_1$ e $\alpha_2 = \kappa\alpha_1$. Desde que $A_2 = \kappa A_1$ e κ diferente de zero, tem-se $\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Im}(A_2)$. Por isso, A_1 e A_2 têm o mesmo posto. Como $a_2 = \kappa a_1$, $a_1 \in E\backslash\mathrm{Im}(A_1)$ e $\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Im}(A_2)$, tem-se também $a_2 \in E\backslash\mathrm{Im}(A_2)$. Sejam $g_1,g_2 : E : \to \mathbb{R}$ as formas quadráticas definidas respectivamente por:

$$g_1(x) = \langle x,A_1x\rangle, \quad g_2(x) = \langle x,A_2x\rangle$$

Assim sendo, g_1 é indefinida se, e somente se, g_2 é indefinida. Em conseqüência: se as equações:

$$\langle x,A_1x\rangle + \langle a_1,x\rangle = \alpha_1$$

$$\langle x,A_2x\rangle + \langle a_2,x\rangle = \alpha_2$$

representam o mesmo conjunto, então elas representam parabolóides elípticos ou parabolóides hiperbólicos.

4 Resultados

Agora obteremos os resultados referentes a parabolóides n-dimensionais que constituem o objetivo primordial deste trabalho. Para isto, será necessário demonstrar alguns lemas:

Lema 4-1: *Dado o espaço euclidiano F de dimensão finita $n \geq 2$, sejam $g : F \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática indefinida e X o conjunto $g^{-1}(\{0\})$. Então, valem as seguintes afirmações*:

(a) *Se* $\dim F \geq 3$ *então X contém a reunião de uma classe infinita de subespaços de dimensão um. Noutros termos, existe uma classe infinita formada por retas que contêm o ponto $0 \in F$ e que estão todas contidas em X.*

(b) *Se* $\dim F = 2$ *então* $X = S(v_1) \cup S(v_2)$, *onde* $v_1,v_2 \in F$ *são vetores linearmente independentes*.

Demonstração:

(a) Admitindo $\dim F \geq 3$, seja $B : F \to F$ o operador linear auto-adjunto é associado a g. Em outros termos, $B : F \to F$ é o único operador linear auto-adjunto tal que $g(x) = \langle x,Bx \rangle$ para todo $x \in F$. Seja $U \subseteq F$ uma base ortonormal formada por autovetores do operador B. Sendo g indefinida, existem vetores $u_1,u_3 \in U$ tais que u_1 corresponde ao autovalor $\lambda_1 > 0$ e u_3 corresponde ao autovalor $\lambda_3 < 0$. Como $\dim F \geq 3$, existe um autovetor u_2 de B tal que $u_2 \in U \backslash \{u_1,u_3\}$. Como $g^{-1}(\{0\}) = (-g)^{-1}(\{0\})$, pode-se supor, sem perda de generalidade (tomando $-g$ em lugar de g e reordenando a base U se necessário) que este u_2 é autovetor correspondente a um autovalor λ_2 não-negativo. Nestas condições, sejam:

$$G = S(u_1,u_2), \qquad H = S(u_1,u_2,u_3)$$

Como $\{u_1,u_2,u_3\} \subseteq U$, segue-se:

$$\begin{aligned} (g|H)(x) &= \langle x,Bx \rangle = \\ &= \lambda_1\langle x,u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,u_2\rangle^2 + \lambda_3\langle x,u_3\rangle^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Desde que

$$X \cap H = H \cap g^{-1}(\{0\}) = (g|H)^{-1}(\{0\})$$

as igualdades listadas em (11) conduzem a:

$$\begin{aligned} &X \cap H = \\ &= \{x \in H : \lambda_1\langle x,u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,u_2\rangle^2 + \lambda_3\langle x,u_3\rangle^2 = 0\} \end{aligned} \tag{12}$$

Seja $\xi : G \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\xi(v) = [(\lambda_1\langle v,u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle v,u_2\rangle^2)/|\lambda_3|]^{1/2} \tag{13}$$

Como os autovetores u_1 e u_2 formam uma base ortonormal do subespaço G, tem-se, para qualquer que seja $v \in G$,

$$v = \langle v,u_1\rangle u_1 + \langle v,u_2\rangle u_2 \tag{14}$$

Desde que $\lambda_3 < 0$, resulta de (12), (13) e (14) que o vetor $v + \xi(v)u_3$ pertence a $X \cap H$, e portanto a X, para todo $v \in G$. Seja agora $\chi : \mathbb{R} \to H$ definida por:

$$\chi(t) = u_1 + tu_2 + \xi(u_1 + tu_2)u_3 \tag{15}$$

Como $u_1 + tu_2 \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue-se que $\chi(t)$ pertence a $X \cap H$, e portanto a X, para cada número real t. O conjunto $X = g^{-1}(\{0\})$ é, como se pode observar, um cone simétrico do espaço vetorial F. Assim sendo, o subespaço $S(\chi(t))$, gerado pelo vetor $\chi(t)$ que pertence a X, está contido em X para cada $t \in \mathbb{R}$. Por esta razão,

$$\bigcup \{S(\chi(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq X \tag{16}$$

Como $H = G \oplus S(u_3)$, segue-se da observação 3.5 que os subespaços $S(\chi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, formam uma classe infinita não-enumerável de subespaços de dimensão um. Daí e da relação (16), (a) segue.

(b) Supondo agora $\dim F = 2$, seja $U = \{u_1,u_2\}$ uma base ortonormal de F formada por autovetores do operador B, onde u_1 é autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 < 0$ e u_2 é autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 > 0$. Esta base existe, porque a forma quadrática g é indefinida. Tem-se:

$$X = \{x \in F : \lambda_1\langle x,u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,u_2\rangle^2 = 0\} \tag{17}$$

Fazendo $\alpha_1 = |\lambda_1|^{1/2}$ e $\alpha_2 = |\lambda_2|^{1/2}$, obtém-se:

$$\lambda_1\langle x,u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,u_2\rangle^2 =$$

$$= -[\alpha_1\langle x,u_1\rangle]^2 + [\alpha_2\langle x,u_2\rangle]^2 =$$

$$= (\alpha_2\langle x,u_2\rangle - \alpha_1\langle x,u_1\rangle)(\alpha_1\langle x,u_1\rangle + \alpha_2\langle x,u_2\rangle) =$$

Portanto

$$\begin{aligned} &\lambda_1\langle x,u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x,u_2\rangle^2 = \\ &= -\langle x,\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2\rangle\langle x,\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

De (17) e (18) obtemos:

$$X = [S(\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2)]^{\perp} \cup [S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)]^{\perp} \tag{19}$$

Fazendo $v_1 = \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2$ e $v_2 = \alpha_2 u_1 - \alpha_1 u_2$, segue-se:

$$\begin{aligned} &[S(\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2)]^{\perp} = S(v_1) \\ &[S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)]^{\perp} = S(v_2) \end{aligned} \tag{20}$$

Como os números reais α_1 e α_2 são ambos positivos, (α_2,α_1) e $(\alpha_2,-\alpha_1)$ são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^2$. Assim, de (19) e (20) segue-se o resultado. ■

Lema 4.2: *Dado o espaço euclidiano E de dimensão $n \geq 2$, sejam $A : E \to E$ auto-adjunto não-nulo, e $g : E \to \mathbb{R}$ a forma quadrática definida por $g(x) = \langle x,Ax\rangle$. Então, as afirmações seguintes são equivalentes*:

(a) *A forma quadrática g é não-negativa*.

(b) *Para todo subespaço vetorial $W \subseteq E$ com $E = W \oplus \ker(A)$, $g|W : W \to \mathbb{R}$ é positiva*.

(c) *Existe um subespaço vetorial $W \subseteq E$ com $E = W \oplus \ker(A)$ tal que $g|W : W \to \mathbb{R}$ é positiva*.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b). Seja W tal que E admite e decomposição em soma direta $E = W \oplus \ker(A)$, e $x \in W$ arbitrário. Sendo g não-negativa, sua restrição $g|W : W \to \mathbb{R}$ é, não-negativa. Decorre deste fato e do Corolário 1 de Lima (2001, p.169) que

$$(g|W)(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \langle x, Ax\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \ker(A) \Rightarrow x \in W \cap \ker(A) \Rightarrow x = 0$$

Logo, $(g|W)(x) > 0$ para todo $x \in W\backslash\{0\}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Tem-se $E = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$, porque A é auto-adjunto. Assim sendo, se vale (b) então, em particular, $g|\mathrm{Im}(A)$ é positiva.

(c) $\Rightarrow$ (a) Admitindo que vale (c), seja W um subespaço vetorial de E de modo que $E = W \oplus \ker(A)$ e a restrição $g|W$ de g a W é positiva. Dado arbitrariamente $x \in E$, sejam $u \in W$ e $v \in \ker(A)$ tais que $x = u + v$. O operador A sendo auto-adjunto, tem-se $\langle u, Av\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle v, Au\rangle = 0$, porque $v \in \ker(A)$. Essas igualdades fornecem:

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle x, Ax\rangle = \langle u + v, A(u + v)\rangle = \\ &= \langle u + v, Au + Av\rangle = \langle u + v, Au\rangle = \\ &= \langle u, Au\rangle + \langle v, Au\rangle = \langle u, Au\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

Como $u \in W$ e $g|W$ é positiva, resulta de (21) que $g(x) \geq 0$. Por conseguinte, a forma quadrática g é não-negativa. ■

Lema 4.3: *Dado o espaço euclidiano E de dimensão $n \geq 2$, sejam $A : E \to E$ auto-adjunto não-nulo, e $g : E \to \mathbb{R}$ a forma quadrática definida por $g(x) = \langle x, Ax\rangle$. Então, as afirmações seguintes são equivalentes*:

(a) *A forma quadrática g é indefinida*.

(b) *Para todo subespaço vetorial $W \subseteq E$ com $E = W \oplus \ker(A)$, $g|W : W \to \mathbb{R}$ é indefinida*.

(c) *Existe um subespaço vetorial $W \subseteq E$ com $E = W \oplus \ker(A)$ tal que $g|W : W \to \mathbb{R}$ é indefinida*.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b). Supondo g indefinida, sejam $x,y \in E$ tais que $g(x) < 0$ e $g(y) > 0$. Seja W qualquer subespaço vetorial de E tal que E admite a decomposição em soma direta $E = W \oplus \ker(A)$. Cada um dos vetores x, y se escreve, de modo único, como $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, onde $x_1, y_1 \in W$ e $x_2, y_2 \in \ker(A)$. Deste fato e da implicação (c) $\Rightarrow$ (a) da prova do Lema 4-2 resulta:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_1) = (g|W)(x_1) \\ g(y) &= g(y_1) = (g|W)(y_1) \end{aligned} \tag{22}$$

Como $g(x) < 0$ e $g(y) > 0$, decorre de (22) que $g|W : W \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática indefinida.

(b) $\Rightarrow$ (c). Como A é auto-adjunto, tem-se $E = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$. Por conseguinte, se vale (b) então, em particular, $g|\mathrm{Im}(A) : \mathrm{Im}(A) \to \Re$ é uma forma quadrática indefinida.

(c) $\Rightarrow$ (a). Evidentemente, se a restrição $g|W : W \to \mathbb{R}$, da forma quadrática g a algum subespaço vetorial $W \subseteq E$, é indefinida então a forma quadrática g é indefinida. ■

Lema 4.4: *Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$, $A : E \to E$ um operador linear auto-adjunto de posto $n - 1$, $a \in E \backslash \mathrm{Im}(A)$ e φ: $E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \langle x,Ax\rangle + \langle a,x\rangle$. Seja X o parabolóide $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$, onde α é um número real. Para cada $p \in X$, seja $T_p(X) = [S(2Ap + a)]^{\perp}$. Então, para todo $p \in X$ tem-se $E = T_p(X) \oplus \ker(A)$.*

Demonstração: O vetor $2Ap + a$ é não-nulo, porque a não pertence a $\mathrm{Im}(A)$ (caso contrário, seria $a = -2Ap = A(-2p)$). Assim sendo, $S(2Ap + a)$ é um subespaço de dimensão um. Por isso,

$$\dim T_p(X) = \dim[S(2Ap + a)]^{\perp} = n - 1 \tag{23}$$

Sendo o posto de A igual a $n - 1$, tem-se $\dim[\mathrm{Im}(A)] = n - 1$, onde:

$$\dim[\ker(A)] = 1 \tag{24}$$

Seja $v \in T_p(X) \cap \ker(A)$ arbitrário. Como $v \in \ker(A)$ e o operador linear A é auto-adjunto, tem-se $\langle 2Ap,v\rangle = 2\langle Ap,v\rangle = 2\langle p,Av\rangle = 0$. Essas igualdades fornecem:

$$\langle 2Ap + a,v\rangle = \langle a,v\rangle \tag{25}$$

Como v pertence a $T_p(X)$ e $T_p(X) = [S(2Ap + a)]^{\perp}$ então $\langle 2Ap + a,v\rangle = 0$. Portanto da equação (25) segue que $\langle a,v\rangle = 0$. Assim sendo,

$$a \in [S(v)]^{\perp} \tag{26}$$

Uma vez que $v \in \ker(A)$, segue-se:

$$S(v) \subseteq \ker(A) \tag{27}$$

Supondo que o vetor v é não-nulo, tem-se $\dim[S(v)] = 1$ e portanto de (24) temos:

$$\ker(A) = S(v) \tag{28}$$

Como o operador A é auto-adjunto, $\mathrm{Im}(A) = [\ker(A)]^{\perp}$. Por conseguinte, as relações (26) e (28) fornecem $a \in [\ker(A)]^{\perp} = \mathrm{Im}(A)$, o que é uma contradição. Segue daí que $v = 0$. Portanto, $T_p(X) \cap \ker(A) = \{0\}$. Portanto,

$$T_p(X) + \ker(A) = T_p(X) \oplus \ker(A) \tag{29}$$

De (23), (24) e (29) segue-se que:

$$\dim[T_p(X) \oplus \ker(A)] = n \tag{30}$$

Como $\dim E = n$, segue de (30) que $E = T_p(X) \oplus \ker(A)$, como queríamos demonstrar. ■

Provaremos agora que parabolóides n-dimensionais são regrados, desde que sejam parabolóides hiperbólicos.

Teorema 4.5: *Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 3$, $A : E \to E$ um operador linear auto-adjunto de posto $n - 1$, $a \in E \backslash \mathrm{Im}(A)$ e $\varphi: E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \langle x,Ax \rangle + \langle a,x \rangle$. Seja X o parabolóide hiperbólico $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$, onde α é um número real. Seja $p \in X$ arbitrário. Valem as seguintes afirmações*:

(a) *Existem vetores linearmente independentes $v_1,v_2 \in E$ de modo que ambas as retas $p + S(v_1)$ e $p + S(v_2)$ estão contidas em X.*

(b) *Se $\dim E > 3$ então existe um conjunto infinito não-enumerável $\mathcal{V} \subseteq E$ formado por vetores linearmente independentes dois a dois, de modo que a reta $p + S(v)$ está contida em X para cada $v \in \mathcal{V}$. Noutros termos, existe uma classe infinita de retas que contêm o ponto p e estão todas contidas em X.*

(c) *Se $\dim E = 3$ então existe, para cada ponto p do parabolóide hiperbólico X, duas, e somente duas retas concorrentes em p que estão contidas em X.*

Demonstração:

(a) Sejam

$$T_p(X) = [S(2Ap + a)]^{\perp}$$

e $g,G : E \to \mathbb{R}$ definidas respectivamente por:

$$g(x) = \langle x,Ax \rangle$$

$$G(x) = \langle x,Ax \rangle + \langle 2Ap + a,x \rangle$$

Como $p \in X$, segue-se da observação 3.1(3) que X é o conjunto dos vetores $x \in E$ que cumprem:

$$\langle x - p,A(x - p) \rangle + \langle 2Ap + a,x - p \rangle = 0 \tag{31}$$

Seja $P : E \to E$ a translação definida por $P(x) = x + p$. A função P é bijetora, sendo sua inversa dada por $P^{-1}(x) = x - p$. Uma vez que X é o conjunto formado pelos vetores $x \in E$ que satisfazem a condição (31), segue-se:

$$X = (G \mathrm{o} P^{-1})^{-1}(\{0\}) \tag{32}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X &= (P^{-1})^{-1}[G^{-1}(\{0\})] = \\ &= P[G^{-1}(\{0\})] = p + G^{-1}(\{0\}) \end{aligned} \tag{33}$$

A variedade linear $p + T_p(X)$ é a imagem $P[T_p(X)]$ do subespaço vetorial $T_p(X)$ pela translação P. Assim sendo, segue-se de (33) e do fato de P ser bijetora que:

$$\begin{aligned} &X \cap [p + T_p(X)] = \\ &= P[G^{-1}(\{0\})] \cap P[T_p(X)] = \\ &= P[T_p(X) \cap G^{-1}(\{0\})] = P[(G|T_p(X))^{-1}(\{0\})] = \\ &= p + (G|T_p(X))^{-1}(\{0\}) \end{aligned} \tag{34}$$

Desde que $\langle 2Ap + a,x\rangle = 0$ para todo $x \in T_p(X)$, resulta das definições de g e G dadas anteriormente que $G(x) = g(x)$ para qualquer $x \in T_p(X)$. Assim sendo, $G| T_p(X) = g| T_p(X)$. Portanto de (34) segue-se que:

$$X \cap [p + T_p(X)] = p + (g|T_p(X))^{-1}(\{0\}) \tag{35}$$

A equação (35) nos diz que $X \cap [p + T_p(X)]$ é a imagem, pela translação P anteriormente definida, do cone simétrico $(g|T_p(X))^{-1}(\{0\}) \subseteq T_p(X)$.

A forma quadrática $g : E \to \mathbb{R}$ definida anteriormente é indefinida, desde que X é, um parabolóide hiperbólico. O Lema 4.4 nos diz que $E = T_p(X) \oplus \ker(A)$. Assim sendo, pelo Lema 4-3 a restrição $g|T_p(X) : T_p(X) \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática indefinida. Como $\dim T_p(X) = \dim E - 1 \geq 2$, o lema 4.1 nos diz que existem vetores linearmente independentes $v_1,v_2 \in E$ de modo que $S(v_1) \subseteq (g|T_p(X))^{-1}(\{0\})$ e $S(v_2) \subseteq (g|T_p(X))^{-1}(\{0\})$. Segue então de (35) que ambas as retas $p + S(v_1)$ e $p + S(v_2)$ estão contidas na interseção $X \cap [p + T_p(X)]$, portanto, em X. Isto demonstra (a).

(b) Se $\dim E > 3$, então $\dim T_p(X) \geq 3$. Logo pelo Lema 4-1 existe um conjunto infinito não-enumerável $\mathcal{V}$, formado por vetores $v \in E$ linearmente independentes dois a dois, de modo que $S(v) \subseteq (g|T_p(X))^{-1}(\{0\})$ para cada $v \in \mathcal{V}$. Resulta de (35) que, para cada $v \in \mathcal{V}$, a reta $p + S(v)$ está contida em X. Sendo os vetores $v \in \mathcal{V}$ linearmente independentes dois a dois e o conjunto $\mathcal{V}$ infinito não-enumerável, as retas $p + S(v)$ onde $v \in \mathcal{V}$ formam uma classe infinita não-enumerável. Isto prova (b).

(c) Quando $\dim E = 3$, tem-se, conforme o Lema 4.4, $\dim T_p(X) = 2$. Pelo Lema 4.1, o cone (simétrico) $(g|T_p(X))^{-1}(\{0\})$ fica reduzido à reunião de duas retas concorrentes no ponto $0 \in E$. Portanto (c) segue de (35) ■

O Teorema 4.5 nos diz que parabolóides hiperbólicos de qualquer espaço euclidiano de dimensão finita maior ou igual a 3 são regrados. Demonstraremos a seguir que somente os parabolóides hiperbólicos têm esta propriedade.

Teorema 4.6: *Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$, $A : E \to E$ um operador linear auto-adjunto de posto $n - 1$, $a \in E\backslash\mathrm{Im}(A)$ e $\varphi: E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \langle x,Ax\rangle + \langle a,x\rangle$. Seja X o parabolóide elíptico $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$, onde α é um número real. Então, para quaisquer que sejam $p \in X$ e $v \in E\backslash\{0\}$, a interseção $X \cap [p + S(v)]$ possui um ou dois elementos. Tem-se também que $X \cap [p + S(v)] = \{p\}$ se, e somente se, $v \in \ker(A)$ ou $v \in [S(2Ap + a)]^{\perp}$.*

Demonstração: Seja g a forma quadrática definida em E por $g(x) = \langle x,Ax\rangle$. Dados arbitrariamente $p \in X$ e $v \in E$ não-nulo, tem-se pela observação 3.1(4) que um ponto $p + tv$ da reta $p + S(v)$ pertence a X se, e somente se, o número real t cumpre a condição:

$$g(v)t^2 + \langle 2Ap + a,v\rangle t = 0 \tag{36}$$

Seja $T_p(X) = [S(2Ap + a)]^{\perp}$. O Lema 4.4 nos diz que:

$$E = T_p(X) \oplus \ker(A) \tag{37}$$

Sendo X parabolóide elíptico, decorre de (37) e do Lema 4.2 que a restrição $g|\, T_p(X)$: $T_p(X) \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática positiva. Em conseqüência, um dos números reais $g(v)$, $\langle 2Ap + a,v\rangle$ é diferente de zero. Com efeito: o vetor v sendo não-nulo, se $\langle 2Ap + a,v\rangle = 0$ então $v \in T_p(X)$, donde $g(v) > 0$. Portanto, a interseção $X \cap [p + S(v)]$ possui um ou dois elementos, pois $p \in p + S(v)$. Para que p seja o único ponto do conjunto $X \cap [p + S(v)]$, é necessário e suficiente que $t = 0$ seja a única solução da equação (36). Logo, tem-se $X \cap [p + S(v)] = \{p\}$ se, e somente se, vale uma (e somente uma) das seguintes afirmações:

$$g(v) = \langle v,Av\rangle = 0 \tag{38}$$

$$\langle 2Ap + a,v\rangle = 0 \tag{39}$$

Como g é não-negativa, se vale (38) então $v \in \ker(A)$ (Lima, 2001, Corolário 1, p.169). Se, por outro lado, a condição (39) é satisfeita, então $v \in T_p(X)$. Logo segue o resultado. ■

Sejam E, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ e X como anteriormente. Para cada ponto $p \in X$, o subespaço vetorial $T_p(X) = [S(2Ap + a)]^{\perp}$ chama-se *espaço vetorial tangente a X no ponto p*. A variedade linear $p + T_p(X)$ é um hiperplano, normal ao vetor $2Ap + a$. Este hiperplano diz-se *hiperplano tangente a X no ponto p*. Assim o Teorema 4.5 nos diz que, para cada ponto de um parabolóide hiperbólico $X \subseteq E$, o hiperplano tangente $p + T_p(X)$ contém a reunião de uma classe infinita não-enumerável de retas que têm p como ponto comum. Demonstraremos agora que a interseção de um parabolóide elíptico e qualquer um de seus hiperplanos tangentes possui um único elemento.

Teorema 4.7: *Sejam E um espaço euclidiano de dimensão* $n \geq 2$, $A : E \to E$ *um operador linear auto-adjunto de posto* $n - 1$, $a \in E\backslash \mathrm{Im}(A)$ *e* $\varphi: E \to \Re$ *definida por* $\varphi(x) = \langle x,Ax\rangle + \langle a,x\rangle$. *Seja X o parabolóide elíptico* $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$, *onde* α *é um número real. Para cada* $p \in X$, *seja* $T_p(X)$ *o espaço vetorial tangente a X no ponto p. Tem-se* $X \cap [p + T_p(X)] = \{p\}$, *para todo* $p \in X$.

Demonstração: Seja $g : E \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \langle x,Ax\rangle$. Da equação 35 temos:

$$X \cap [p + T_p(X)] = p + (g|T_p(X))^{-1}(\{0\}) \tag{40}$$

Sendo X um parabolóide elíptico, a forma quadrática g anteriormente definida é não-negativa. Portanto, decorre dos Lemas 4.2 e 4.4 que $g|T_p(X) : T_p(X) \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática positiva. Logo, $(g|T_p(X))^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Assim da equação (40) obtém-se:

$$X \cap [p + T_p(X)] = p + \{0\} = \{p\}$$

como queríamos demonstrar. ■

CRISPINO, M. L. *N*-Dimensional hyperbolic paraboloids are ruled. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.25, n.1, p.31-43-, 2007.

- *ABSTRACT: By means of linear algebra we prove that hyperbolic paraboloids in Euclidean spaces of finite dimension n (hyperbolic hyperparaboloids) are ruled.*
- *KEYWORDS: Hypersurfaces; hyperquadrics; hyperparaboloids.*

Referências

AXLER, S. *Linear álgebra done right.* 2. ed. New York: Springer, 1997. 251p.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear.* São Paulo: Edusp, 2001. 245p.

DIEUDONNÉ, J. *Algèbre linéaire et géometrie élémentaire*. Paris: Hermann, 1964. 222p.

FANG, Z. et al. Modelling and optimization of cyanidation process. a chemometric approach by regression analysis. *Anal. Chim. Acta*, New York, v. 367, p. 123-133, 1998.

GODEMENT, R. *Cours d'algebre*. Paris: Hermann, 1970. 663p.

GREUB, W. *Linear álgebra*. New York: Springer, 1981. 453p.

HERSTEIN, I. *Tópicos de álgebra*. São Paulo: Polígono, 1978. 414p.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra linear*. São Paulo: Polígono, 1971. 354p.

KUPKA, K.; MELOUN, M. Data analysis in the chemical laboratory II. The end-point estimation in instrumental titrations by nonlinear regression. *Anal. Chim. Acta*, New York, v.429, p.171-183, 2001.

LANG, S. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003. 405p.

LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 357p.

MELOUN, M. et al. The thermodynamic dissociation constants of losartan, paracetamol, phenylephrine and quinine by the regression analysis of spectrophotometric data. *Anal. Chim. Acta*, New York, v.533, p.97-110, 2005a.

MELOUN, M. et al. The thermodynamic dissociation constants of haemanthamine, lisuride, metergoline and nicergoline by the regression analysis of spectrophotometric data. *Anal. Chim. Acta*, New York, v.543, p.254-266, 2005b.

RODRIGUES, A. A. M.; OLIVA, W. M. *Quádricas num espaço afim euclidiano*. São Paulo: Sociedade Matemática de São Paulo, 1961. 52p.

RODRIGUES, A. A. M. *Álgebra linear e geometria euclidiana*. Poços de Caldas: IMPA, 1965. 155p.

Recebido em 30.03.2007.

Aprovado após revisão em 02.06.2007.