MODELAGEM GEOESTATÍSTICA UTILIZANDO A FAMÍLIA DE GNEITING DE FUNÇÕES DE COVARIÂNCIA ESPAÇO-TEMPORAIS

Alexandre Sousa da SILVA[1]
Paulo Justiniano RIBEIRO JR[2]
Ioannis ELMATZOGLOU[2]

▪ RESUMO: A especificação de funções de covariância espaço-temporais é uma das possíveis estratégias para modelagem de processos dos quais observações são tomadas em diferentes posições do espaço e do tempo. Tais funções podem definir processos separáveis ou não separáveis e na sua especificação deve-se garantir que são funções de covariância válidas atendendo a condição de serem positiva definidas. Entre estratégias para obtenção de tais funções estão a de Cressie e Huang baseadas em transformações inversas de representações espectrais e Gneiting que permite a construção de famílias de funções de covariância diretamente no domínio das observações. A primeira se baseia na idéia de obter funções em um espaço de dimensão aumentada a partir de funções válidas no espaço original e necessita de operações no domínio da freqüência. Alternativamente, a segunda proposta utiliza combinação de funções completamente monótonas e estritamente crescentes evitando assim a inversão de representações espectrais. Há ainda poucos relatos de uso e avaliações comparativas das diferentes propostas. Neste trabalho considerou-se a metodologia proposta por Gneiting, com diferentes valores do parâmetro que indica a força da interação entre o espaço e o tempo. Para ilustrar a metodologia modelos separáveis e não-separáveis foram ajustados a um conjunto de dados referentes à armazenagem de água em um solo com cultura de citros e também usados para obter predições do processo. Utilizou-se a implementação no pacote RandomFields do programa R, revisando-se a metodologia e investigando-se a implementação computacional. Na aplicação o modelo de covariância separável se mostrou adequado para descrever o comportamento das observações disponíveis sendo a escolha do modelo determinada por ajustes de máxima verossimilhança.

[1]Departamento de Ciências Exatas, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo – ESALQ/USP, CEP 13418-900, Piracicaba, SP, Brasil. E-mail: *assilva@esalq.usp.br*
[2]Laboratório de Estatística e Geoinformação, Universidade Federal do Paraná – UFPR, CEP 81531-990, Curitiba, PR, Brasil. E-mail: *paulojus@ufpr.br*

▪ PALAVRAS-CHAVE: Funções de covariância; geoestatística; modelos espaço-temporais; campos aleatórios.

1 Introdução

Dados espaço-temporais são caracterizados pela descrição da variabilidade no tempo e no espaço, e o objetivo da análise estatística deste tipo de dado está em descrever a incerteza não somente sobre as estimativas das quantidades de interesse mas, também, estimar valores em locais e/ou tempos não amostrados. Na literatura estatística existe um grande número de aplicações e publicações referentes a processos puramente espaciais ou puramente temporais, e mais recentemente começam a ser apresentadas propostas para modelagem conjunta no espaço e tempo. Esta análise conjunta é o interesse dos modelos espaço-temporais que têm ganho uma crescente popularidade na última década, o que pode ser explicado, por um lado, pela aplicabilidade, por exemplo em ciências ambientais e da saúde; e por outro, pelo crescente desenvolvimento de recursos computacionais.

Métodos genéricos para modelagem espaço-temporal não são amplamente disponíveis, como no caso de modelos espaciais e temporais isoladamente, tendendo a ser fortemente ligados à aplicação em questão. Desse modo implementações computacionais genéricas para tais modelagem também são escassas. Portanto a revisão, aplicação e testes de metodologias que vêm sendo propostas é relevante para identificação de métodos aplicáveis a categorias mais amplas de problemas. Gneiting e Schlather (2002), em uma revisão sobre estratégias de modelagem espaço-temporal, agrupam-nas em duas categorias: a abordagem geoestatística e a abordagem baseada em modelos.

Na abordagem geoestatística, geralmente considerada para campos aleatórios gaussianos, em que o processo é totalmente especificado pelo vetor de médias e pela matriz de covariância. Em geral, o vetor de médias é facilmente especificado a partir de informações contextuais, mas o mesmo não acontece com a matriz de covariância, componente-chave desta metodologia. Nesta abordagem, esta matriz possui elementos dados por uma função de covariância válida, que assegure a condição de matriz positiva definida (Schlather, 1999).

Na abordagem baseada em modelos é enfatizada a adoção de modelos estocásticos e nesta metodologia a função de covariância não é a única estrutura utilizada para especificar o modelo. Sendo assim, este método pode ir de uma função de covariância de forma analítica simples a uma função intratável e somente definida implicitamente, induzida pelo modelo adotado. Neste contexto incluem-se modelos bayesianos flexíveis, dinâmicos e/ou homogêneos e métodos baseados na técnica do filtro de Kalman.

Neste trabalho considerada-se a abordagem geoestatística para a modelagem de campos aleatórios espaço-temporais. Além disso assume-se gaussianidade explicitamente, uma vez que adotam-se métodos de inferência baseados na verossimilhança. Uma forma intuitiva de produzir modelos válidos para a função de covariância espaço-temporal é por meio da combinação de funções válidas puramente espacial e puramente temporal. Propriedades de função de covariância asseguram que o produto ou a soma de funções de covariâncias válidas tem como resultado uma função de covariância também válida. As funções de covariância espaço-temporais obtidas desta forma são ditas separáveis, já que não contemplam a possibilidade de interação entre o componente espacial e temporal. Por isso, em geral, não são realísticas já que assumem a independência dos processos espaciais e temporais.

Alternativamente as funções de covariância espaço-temporais não separáveis incorporam a interação entre o componente espacial e temporal, mas apresentam como grande desvantagem a dificuldade em se construir funções de covariância que sejam válidas e são mais difíceis de serem estimadas. Métodos de análise matemática devem ser aplicados para garantir a validade dessas funções e em geral se valem do teorema de Bochner (Bochner, 1959), que utiliza a representação espectral para garantir a validade das funções de covariância espaço-temporais. Nesta linha, Cressie e Huang (1999), Gneiting (2002) e Stein (2004, 2005) propõem famílias de funções de covariância não separáveis válidas para processos espaço-temporais gaussianos.

2 Campos aleatórios

Um campo ou função aleatória é um processo estocástico definido no espaço $G \subset \mathbf{R}^d$, ou seja, uma função cujos valores são realizações de variáveis aleatórias em qualquer ponto do domínio (Schmidt e Sansó, 2006), ou, em outras palavras, uma família ou coleção de variáveis aleatórias, em que cada um dos seus membros podem ser identificados ou localizados de acordo com a mesma métrica (Schabenberger e Gotway, 2005). Um campo aleatório pode ser denotado por:

$$\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in G \subset \mathbf{R}^d\},$$

em que $Z(\mathbf{s})$ é o valor do atributo Z na localização $\mathbf{s}$ e $d = 1, 2, \ldots$ é a dimensão do campo aleatório. Segundo Schmidt e Sansó (2006) e Le e Zidek (2006) a descrição de um campo aleatório é obtida pelas distribuições acumuladas finito-dimensionais F se, para qualquer conjunto de pontos nas localizações $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ pertencentes à região G e qualquer inteiro n,

$$F_{\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\ldots,\mathbf{s}_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv P\{Z(\mathbf{s}_1) \leq z_1, Z(\mathbf{s}_2) \leq z_2, \ldots, Z(\mathbf{s}_n) \leq z_n\}.$$

Um campo aleatório gaussiano corresponde ao caso particular em que tais distribuições finito-dimensionais são gaussianas, ou seja, um campo aleatório é gaussiano se a distribuição para qualquer conjunto de índices $i = 1, 2, \ldots, n$ é uma gaussiana n-variada. Conseqüentemente, por propriedades da distribuição gaussiana multivariada, cada $Z(\mathbf{s}_i)$ é uma variável aleatória gaussiana univariada.

O processo gaussiano é particularmente importante na análise de campos aleatórios, já que estes são completamente especificados pelo vetor de médias e sua matriz de covariância (Gneiting e Schlather, 2002). O vetor de médias é especificado pelo conhecimento de covariáveis, isto é, efeitos fixos, que influenciam a variável de interesse. A matriz de covariância precisa ser positiva definida para ser considerada válida. Para tanto cada um de seus elementos pode ser dado por uma função de covariância tal que para $(Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2), \ldots, Z(\mathbf{s}_n))$, com matriz de covariância Σ com dimensão $n \times n$ e simétrica, em que $\Sigma_{ij} = C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)$, ou seja, cada valor de Σ é igual a covariância entre respostas em duas localizações correspondentes, é necessário e suficiente que C satisfaça a condição de ser positiva definida, em outras palavras, para qualquer vetor não zero $\mathbf{a}$, a forma quadrática $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$ deve ser maior igual a zero. Sendo assim, esta condição pode ser escrita nas seguintes formas:

$$\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_jC(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \geq 0 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_jC(\mathbf{h}_{ij}) \geq 0,$$

em que $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$ são elementos do vetor $\mathbf{a}$ e $\mathbf{h}_{ij}$ denota o vetor de separação entre $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{s}_j$. Sendo a função de covariância positiva definida, e portanto válida, é garantido que a matriz de covariâncias também o será. Entretanto determinar se esta função é positiva definida é, em geral, não trivial. Uma forma freqüentemente utilizada para verificar a validade de uma função de covariância é verificar se sua representação espectral satisfaz o teorema de Bochner (Bochner, 1959).

2.1 Propriedades da função de covariância

A função de covariância $C(\mathbf{h})$ de um campo aleatório estacionário de segunda ordem deve satisfazer as seguintes propriedades:

(i) $Cov[Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s}+\mathbf{0})] = Var[Z(\mathbf{s})] = C(\mathbf{0}) \geq 0$;

(ii) $C(\mathbf{h}) = C(\text{-}\mathbf{h})$;

(iii) $C(\mathbf{0}) \geq\mid C(\mathbf{h}) \mid$;

(iv) $C(\mathbf{h}) = Cov[Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s}+\mathbf{h})] = Cov[Z(\mathbf{0}), Z(\mathbf{h})]$;

(v) Se $C_j(\mathbf{h})$ com $j = 1, 2, \ldots, k$, são funções de covariância válidas,

então $\sum_{j=1}^{k}\mathbf{b}_jC_j(\mathbf{h})$ é uma função de covariância válida, se $\mathbf{b}_j \geq 0\ \forall j$;

(vi) Se $C_j(\mathbf{h})$ com $j = 1, 2, \ldots, k$, são funções de covariância válidas, então

$\prod_{j=1}^{k}C_j(\mathbf{h})$ é uma função de covariância válida;

(vii) Se $C(\mathbf{h})$ é uma função válida no R^d,

então ela também será uma função de covariância válida em R^p, com $p < d$.

De acordo com Schabenberger e Gotway (2005), as propriedades (i) e (ii) são imediatas, (iii) segue a forma da inequação de Cauchy-Schwarz, (iv) caracteriza a falta de importância da coordenada absoluta, (v) assegura que combinações lineares de funções de covariância válidas são também funções de covariância válidas e (vi) assegura que o produto de funções de covariância válidas tem como resultado uma função de covariância válida.

Em campos aleatórios espaço-temporais a propriedade (ii) nem sempre é satisfeita, o que dá origem aos modelos de covariância espaço-temporais assimétricos. Já as propriedades (v) e (vi) dão suporte à construção de modelos de covariância espaço-temporais separáveis.

2.2 Inferência

Uma ferramenta de uso comum para investigação da dependência espacial em geoestatística é o semivariograma que para campos aleatórios intrinsecamente estacionários é definido por $2\gamma(\mathbf{h}) = E\{[\mathbf{Z}(s_i) - \mathbf{Z}(s_j)]^2\}$. Portanto, uma estimativa empírica do semivariograma é dada pelo estimador de momentos:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{|N(\mathbf{h})|} \{Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)\}^2, \tag{1}$$

em que $|N(\mathbf{h})|$ é a quantidade de pontos separados pela distância $\mathbf{h}$ de separação entre s_i e s_j. De acordo com Schabenberger e Gotway (2005), o estimador $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ é não viesado para $\gamma(\mathbf{h})$ se $Z(\mathbf{s})$ for intrinsecamente estacionário. No caso do processo em que assume-se a estacionariedade de segunda ordem, o variograma informa também sobre a função de correlação.

Isto justifica uma prática comum em geoestatística de se utilizar o semivariograma empírico para inferir sobre parâmetros do modelo, por meio do ajuste de uma função válida para o semivariograma teórico.

Um outro paradigma para estimação de parâmetros, sob a pressuposição de estacionariedade forte, é dado pelo método de máxima verossimilhança. A estimação dos parâmetros de campos aleatórios pelo método de máxima verossimilhança requer pressuposições sobre a distribuição do processo. Dado $\mathbf{Z} = [Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2), \ldots, Z(\mathbf{s}_n)]'$, que denota o vetor de observações e assumindo $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \sim G(\mu\mathbf{1}, \Sigma(\theta))$, o método da máxima verossimilhança consiste em maximizar o logaritmo da distribuição gaussiana n-variada:

$$L(\mu, \theta; z_1, z_2, \ldots, z_n) = -\frac{1}{2}\{\ln(|\Sigma(\theta)|) + n\ln(2\pi) + (z(\mathbf{s}) - \mathbf{1}\mu)'\Sigma(\theta)^{-1}(z(\mathbf{s}) - \mathbf{1}\mu)\}. \tag{2}$$

Estimadores de máxima verossimilhança são largamente utilizados em estatística, por assegurarem uma série de propriedades, já que sob condições usuais de regularidade estes estimadores são assintoticamente não viesados e eficientes. Entrentanto, na prática, em aplicações geoestatísticas, este método de estimação pode requerer muito tempo computacional, ou até mesmo ser proibitivo, devido à dimensão da matriz de covariância. Tais problemas tendem a ser ainda freqüentes em modelagem espaço-temporal.

Diggle, Ribeiro e Christensen (2003) e Diggle e Ribeiro (2007) discutem em detalhes métodos baseados na verossimilhança para estimação de parâmetros dos processos geoestatísticos espaciais, incluindo métodos bayesianos.

2.3 Campos aleatórios espaço-temporais

Processos ambientais e geofísicos como concentração de poluentes, precipitação e superfície do vento são exemplos de fenômenos que podem ser modelados por campos aleatórios espaço-temporais. Processos deste tipo são caracterizado pela descrição da variabilidade do atributo de interesse na dimensão do espaço e do tempo. Segundo Schabenberger e Gotway (2005) existem três possibilidades para o estudo desta variabilidade: (i) análise espacial para cada processo temporal; (ii) análise temporal para cada processo espacial; (iii) análise espacial e temporal conjunta. As duas primeiras possibilidades isolam a parte temporal ou a espacial e aplicam técnicas de análise espacial ou de séries temporais para o tipo de processo resultante. A terceira possibilidade considera o processo espacial e temporal conjuntamente e é a considerada neste trabalho. No processo de construção desta análise conjunta, a aplicação das técnicas usuais para estudo da variabilidade espacial e temporal separadamente pode ser utilizada como uma ferramenta exploratória e auxiliar na construção de modelos adequados. Entretanto a modelagem espaço-temporal vai além de tais técnicas, podendo requerer modelos e métodos específicos para análise de dados. Isso também justifica a estratégia adotada aqui de assumir explicitamente um modelo gaussiano, mesmo considerando que na análise geoestatística puramente espacial alguns autores optam por não assumir tal pressuposto.

Um campo aleatório espaço-temporal é definido como

$$\{Z(\mathbf{s}, t), \mathbf{s} \in R^d, t \in R\},$$

em que $Z(\mathbf{s}, t)$ é valor de atributo Z no espaço $\mathbf{s} \in R^d$ e no tempo $t \in R$. Por essa definição, percebe-se intuitivamente que o domínio natural do processo é $R^d \times R$. Neste trabalho o componente espacial será considerado bidimensional, ou seja, $d = 2$, por ser a situação comum na prática, entretanto ressalta-se que a dimensão do processo pode ser qualquer número finito positivo.

Tempo e espaço não são diretamente comparáveis, já que as unidades das coordenadas dos dois processos apresentam grandezas diferentes e o tempo exibe uma ordenação natural. Fisicamente existe uma clara diferença entre as dimensões espaciais e temporais e os modelos precisam considerá-las. Segundo Gneiting, Genton e Guttorp (2006) funções de covariância ou mesmo a interpolação espacial por krigagem se utilizam de espaços euclidianos e são diretamente aplicados à problemas espaço-temporais. Assim sendo, a simples separação vetorial do domínio espacial e temporal tem importantes implicações.

De acordo com Gneiting e Schlather (2002), na modelagem de processos espaço-temporais duas formas para especificação do modelo podem ser consideradas. A primeira é a *Especificação geoestatística* na qual é necessária a ressuposição de uma distribuição, geralmente gaussiana, para função aleatória $Z(\mathbf{s}, t)$ que é definida em toda coordenada espaço-temporal. A função de covariância é definida na dimensão espaço-temporal contínua, caracterizando o modelo da função aleatória, que pode ser utilizada na predição de qualquer localização espacial e em qualquer instante de tempo. O ajuste da função de covariância é de importância central nessa metodologia, e portanto expressões com forma fechada para função de covariância são essenciais. A segunda é a *especificação baseada em modelos*. Essa técnica enfatiza a adoção de modelos estocásticos para solução de problemas práticos nos quais a função de covariância não é especificada explicitamente, mas sim induzida pelo modelo. Essa forma de especificação espaço-temporal pode entretanto ir de uma função com forma analítica simples até uma forma não fechada, definida somente implicitamente, induzida pelo modelo adotado. Essa metodologia engloba de modelos hierárquicos bayesianos espaço-temporais a técnicas baseadas no filtro de Kalman, com a característica de apresentar predições baseadas em métodos computacionalmente eficientes.

A especificação geoestatística é conceitualmente simples, particularmente quando combinada com a adoção do modelo gaussiano, que é completamente especificado por sua média e estrutura de covariância. Além disso, a predição espacial por algorítmos genericamente conhecidos como *krigagem*, que geralmente é o objetivo da análise de campos aleatórios, requer a especificação apropriada da função de covariância. Por outro lado, esta forma de especificação assume estacionariedade espaço-temporal da estrutura de covariância, que portanto não permite formas flexíveis como as induzidas pela especificação baseada em modelos. Neste trabalho adota-se especificação geoestatística aplicada a processos espaço-temporais gaussianos.

Assumindo as condições de regularidade do campo aleatório espaço-temporal, $Var(Z(\mathbf{s},t)) < \infty$ para todo $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^2, t \geq 0$, (Cressie e Huang, 1999), define-se a média e a função de covariância por:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{s},t) &= E(Z(\mathbf{s},t)) \\
Cov(Z(\mathbf{s}_1,t_1), Z(\mathbf{s}_2,t_2)) &= C(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,t_1,t_2).
\end{aligned}$$

De acordo com Gneiting, Genton e Guttorp (2006), o interesse inicial das análises é em geral o de verificar a plausibilidade de três características simplificadoras da descrição do processo: estacionariedade, simetria completa e separabilidade. Após esse estudo será possível decidir sobre a complexidade da modelagem.

Um campo aleatório espaço-temporal é estacionário se sua esperança não depende das coordenadas espaço-temporais e sua função de covariância depende somente de um vetor de separação dos pontos em $R^d \times R$. Portanto um campo aleatório espaço-temporal apresenta covariância estacionária no espaço se $Cov(Z(\mathbf{s}_1,t_1,\mathbf{s}_2,t_2))$ depende somente do vetor de separação $\mathbf{h} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$, e apresenta estacionariedade temporal se $Cov(Z(\mathbf{s}_1,t_1,\mathbf{s}_2,t_2))$ depende somente do vetor de separação $u = t_1 - t_2$. Dessa forma se o campo aleatório espaço-temporal possui covariância estacionária esta é dada por:

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1,t_1), Z(\mathbf{s}_2,t_2)) = c(\mathbf{h},u)$$

O campo aleatório espaço-temporal apresenta simetria completa se

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1,t_1), Z(\mathbf{s}_2,t_2)) = Cov(Z(\mathbf{s}_1,t_2), Z(\mathbf{s}_2,t_1)),$$

para todas as coordenadas espaço-temporais $\mathbf{s}_1, t_1$ e $\mathbf{s}_2, t_2$ em $R^2 \times R$. No caso da covariância ser estacionária e completamente simétrica tem-se:

$$C(\mathbf{h}, u) = C(\mathbf{h}, -u) = C(-\mathbf{h}, u) = C(-\mathbf{h}, -u),$$

para todo $(\mathbf{h}, u) \in R^2 \times R$.

A classe mais simples de funções de covariância espaço-temporal é dada pelos modelos separáveis. Funções de covariância espaço-temporais separáveis podem ser definidas com base nas propriedades de aditividade e multiplicabilidade (2.1, vi e vii). Assim, a função de covariância pode ser decomposta entre uma função de covariância puramente espacial e outra puramente temporal, que no caso aditivo pode ser escrita como:

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = Cov(Z(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)) + Cov(Z(t_1, t_2))$$

e no caso multiplicativo por:

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = Cov(Z(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2))Cov(Z(t_1, t_2)), \tag{3}$$

em que em ambos os casos $\mathbf{s}_1, t_1$ e $\mathbf{s}_2, t_2 \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

Esta classe de modelos de covariância espaço-temporal, embora simplista por não considerar a interação entre o espaço e o tempo, é muito utilizada na prática por ser computacionalmente tratável e pela forma intuitiva e simples de obtenção de funções de covariância válidas.

Todos os modelos separáveis são também completamente simétricos. Para a demonstração desta relação considere a eq. (2), considere também as variáveis aleatória espaço-temporais $Z(\mathbf{s}_1, t_2)$ e $Z(\mathbf{s}_2, t_1)$. A função de covariância separável será dada por:

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1, t_2), Z(\mathbf{s}_2, t_1)) = Cov(Z(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2))Cov(Z(t_2, t_1)),$$

dessa forma conclui-se que:

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = Cov(Z(\mathbf{s}_1, t_2), Z(\mathbf{s}_2, t_1)),$$

que é a definição da propriedade de campos aleatórios espaço-temporais completamente simétricos.

Um exemplo simples de especificação de uma função de covariância espaço-temporal separável dado pela combinação de modelos de covariância exponenciais é:

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = \sigma_1^2 \exp(-||A_1(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)||) + \sigma_2^2 \exp(-||A_2(t_1 - t_2)||),$$

em que A_1 e A_2 são denominadas *matrizes de anisotropia* e $|| \cdot ||$ a norma euclidiana. Tais matrizes expandem a idéia de anisotropia geométrica utilizada em modelos geoestatísticos puramente espaciais (Isaaks e Srisvastava, 1989) permitindo a representação combinada das dimensões espaciais e temporais. Por exemplo, supondo um processo isotrópico no espaço, e separabilidade entre espaço e tempo, as matrizes são dadas por:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 \end{pmatrix}$$

em que ϕ_1 e ϕ_2 são parâmetros que descrevem o decaimento das funções de correlação exponencial nas dimensões espacial e temporal, respectivamente. Modelos espacialmente não isotrópicos, não separáveis e não simétricos podem ser então especificados considerando-se formas mais genéricas para tais matrizes de anisotropia.

Qualquer função de covariância espaço-temporal que não puder ser escrita em uma das duas formas separáveis anteriormente mencionadas e nem em combinações destas, será dita uma função não separável. As funções de covariância separáveis, embora facilmente obtidas, são em geral insatisfatórias para descrever processos naturais, o que gera a necessidade de se especificar funções não separáveis. Kyriakidis e Journel (1999), revisam e discutem abordagens para especificação de processos geoestatísticos espaço-temporais. Cressie e Huang (1999), propõem classes de funções de covariância não separáveis válidas, cuja obtenção não se baseia no domínio das observações, mas sim no domínio da freqüência, uma vez que a representação espectral e a densidade espectral podem ser utilizadas para descrever as propriedades do processo. Gneiting (2002), em uma abordagem alternativa, obtém modelos válidos de função de covariância pela definição de funções monótonas e positivas.

2.3.1 Representação de Gneiting

A representação de Cressie e Huang (1999) permite a construção de famílias de funções de covariância espaço-temporais estacionárias e não separáveis pela inversão de Fourier, o que restringe esta família a um pequeno grupo de funções com soluções com forma fechada para tal inversão. Gneiting (2002) propõe uma flexível e elegante família de funções de covariância espaço-temporais, cuja obtenção não requer operações no domínio espectral. A construção de funções de covariância válidas se dá por meio de componentes elementares em que sua validade é facilmente verificada. Tal forma, ainda pouco explorada na literatura e aplicações, é a adotada neste trabalho.

A representação de Gneiting (2002) considera qualquer função monótona $\phi(x)$, definida em $x \geq 0$ e qualquer função positiva $\psi(x)$, definida em $x \geq 0$ com derivadas completamente monótonas, e dessa forma,

$$C(\mathbf{h}, u) = \frac{\sigma^2}{(\psi(u)^2)^{\delta/2}} \phi\Big(\frac{\mathbf{h}^2}{\psi(u^2)}\Big) \tag{4}$$

é uma função de covariância espaço-temporal válida em $R^d \times R$, em que $\mathbf{h} = ||h||$ é a distância espacial, u representa o vetor de distâncias no tempo e δ deve ser maior ou igual a genuína dimensão espacial d e portanto, por simplicidade, considera-se aqui $\delta = d$.

De acordo com Gneiting (2002) uma função contínua $\phi(x)$ é completamente monótona se possui derivadas $\phi^{(n)}$ de todas as ordens e $(-1)^n\phi^{(n)}(x) \geq 0$, em que $x > 0, n = 0, 1, 2, \dots$.

Assim, Gneiting propõe uma família de funções de covariância espaço-temporal muito geral que não depende da inversão de Fourier na forma fechada e não necessita de integrabilidade. De acordo com Elmatzoglou (2006) nesta família os componentes $\phi(x)$ e $\psi(x)$ podem ser associados com a estrutura espacial e temporal, respectivamente. Gneiting (2002), apresenta possíveis escolhas para tais funções, que são reproduzidas nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 - Funções completamente monótonas $\phi(x)$,$x \geq 0$

$\phi(x) = \exp(-cx^\gamma), c > 0, 0 < \gamma \leq 1$
$\phi(x) = (1 + cx^\gamma)^\nu, c > 0, 0 < \gamma \leq 1, \nu > 0$
$\phi(x) = (2^{\nu-1}\Gamma(\nu))^{-1}(cx^{1/2})^\nu \mathbf{K}_\nu(cx^{1/2}), c > 0, \nu > 0$
$\phi(x) = 2^\nu(\exp(cx^{1/2}) + \exp(-cx^{1/2}))^\nu, c > 0, \nu > 0$

Tabela 2 - Funções positivas $\psi(x)$, $x \geq 0$

$\psi(x) = (ax^\alpha + 1)^\beta, a > 0, 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$
$\psi(x) = ln(ax^\alpha + b)/ln(b), a > 0, b > 1, 0 < \alpha \leq 1$
$\psi(x) = (ax^\alpha + b)/(b(ax^\alpha + 1)), a > 0, 0 < b \leq 1$

Um exemplo simples de função de covariância espaço-temporal não separável é dada como segue: considere a primeira linha das Tabelas 1 e 2, em que $\phi(x) = \exp(-cx^\gamma), c > 0, 0 < \gamma \leq 1$ e $\psi(x) = (ax^\alpha + 1)^\beta, a > 0, 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$. Substituindo na eq. (3) tem-se:

$$C(\mathbf{h}, u) = \frac{\sigma^2}{(au^{2\alpha} + 1)^{\frac{\beta d}{2}}} \exp\left\{\frac{c\mathbf{h}^{2\gamma}}{(au^{2\alpha} + 1)^{\beta\gamma}}\right\}. \tag{5}$$

Nesta expressão, nota-se que para $\beta = 0$ a função de covariância não mais depende do tempo. Portanto, usando a propriedade de que o produto de funções de covariâncias válidas é também uma função válida, multiplicando-se a eq. (4) por uma função de covariância puramente temporal, $C(u) = (au^\alpha + 1)^{-\kappa}$ $\kappa > 0$, tem-se como resultado:

$$C(\mathbf{h}, u) = \frac{\sigma^2}{(au^{2\alpha} + 1)^{\kappa + \frac{\beta d}{2}}} \exp\left\{\frac{c\mathbf{h}^{2\gamma}}{(au^{2\alpha} + 1)^{\beta\gamma}}\right\},$$

e para $\beta = 0$, a expressão da função de covariância se reduz a

$$C(\mathbf{h}, u) = \frac{\sigma^2}{(au^{2\alpha} + 1)^\kappa} \exp\{c\mathbf{h}^{2\gamma}\}$$

que é uma função de covariância separável que pode ser escrita na forma,

$$C(\mathbf{h}, u) = \sigma^2 C(u) C(\mathbf{h})$$

em que $C(u) = (au^{2\alpha} + 1)^{-\kappa}$ é a função puramente temporal, enquanto $C(\mathbf{h}) = \exp\{c\mathbf{h}^{2\gamma}\}$ é a função puramente espacial. Essa representação sugere que o parâmetro β pode ser utilizado para testar a hipótese de separabilidade. Fuentes (2005) discute essa e outras formas de verificar a separabilidade e propõe um teste simples para separabilidade de funções de covariância espaco-temporal baseado em uma análise de variância de dupla entrada.

3 Aplicação

A água é um dos mais importantes fatores para o adequado desenvolvimento de qualquer cultura agrícola e o conhecimento da sua dinâmica no solo é indispensável para o aprimoramento de práticas de manejo que visem à otimização da produtividade da cultura (Moreti,2006). O autor desenvolve um estudo da capacidade de armazenagem de água em um Latossolo Vermelho Amarelo Argissólico cultivado com citros, em uma parcela experimental na qual foram coletados dados em duas transações com 20 pontos de observação cada, com espaçamento de 4,0 m entre os pontos amostrados e 7,0 m entre as transeções. Para quantificar a armazenagem de água no solo foi instalado, em cada ponto amostral, um tubo de acesso à sonda de nêutrons até a profundidade de 1,20 m, localizado no centro da distância entre duas plantas ao longo da linha.

A cultura de citros foi implantada em março de 1991, e as amostras foram coletadas de 2001 a 2004, totalizando 98 coletas de dados não eqüidistantes no tempo. Neste trabalho utilizou-se dados de 25 momentos de tempo tomados um em cada quatro, aos quais ajustou-se modelos espaço-temporais. A restrição de tomar apenas 25 dentre os 98 períodos de tempo para os quais dados eram disponíveis visou contornar problemas computacionais uma vez que o objetivo aqui é investigar e explorar o uso da metodologia de modelagem por meio de uma análise ilustrativa, e não necessariamente fornecer resultados definitivos de análise desses dados.

Muitos modelos têm sido sugeridos na literatura e o fato de terem sido adotados em determinados problemas não significa necessariamente que estes melhor representem a realidade. A escolha de uma determinada classe de modelos para processos espaço-temporais é uma tarefa difícil uma vez que não há replicações do processo. O conhecimento do problema em questão por parte dos pesquisadores é portanto fundamental para guiar a avaliar as escolhas de modelos.

Neste trabalho, o interesse não é ajustar um modelo definitivo aos dados em questão, e sim verificar a possibilidade de aplicação e o comportamento de alguns dos modelos discutidos anteriormente. Para tanto, será considerado um conjunto referente a capacidade de armazenagem de água em um solo com citros.

3.1 Modelos de covariância espaço-temporais

A partir da representação de Gneiting e escolhas das funções $\phi(x)$ e $\psi(x)$ tem-se a seguinte função de covariância espaço-temporal separável ajustada, com os parâmetros estimados pelo método da máxima verossimilhança:

$$C(\mathbf{h},u) = \frac{44.12}{(0.76u^{1.65}+1)^{0.08}} \exp\{-0.001\mathbf{h}^{0.85}\} + \frac{0.25}{(0.76u^{1.65}+1)^{0.08}}. \tag{6}$$

Já para a função de covariância espaço-temporal não separável, com os parâmetros também estimados pelo método de máxima verossimilhança, tem-se que o modelo ajustado é dado por:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{h},u) \quad = \quad & \frac{1}{(0.76u^{1.65}+1)^{0.12}}\Big(\frac{44.12}{(0.76u^{3.3}+1)^{0.04}} \exp\Big\{-0.001\Big[\frac{\mathbf{h}}{(0.76u^{3.3}+1)^{0.04}}\Big]^{1.65}\Big\}\Big) + \\ & + \frac{0.25}{(0.76u^{1.65}+1)^{0.08}} \, . \end{aligned} \tag{7}$$

A distinção entre os dois modelos ajustados anteriormente é dada pelo parâmetro β que determina se existe ou não interação entre os componentes puramente espacial e puramente temporal, ou seja, se a correlação espacial independe do tempo e vice-versa. Então o valor do parâmetro β pode ser visto como o grau de interação espaço-temporal, em que valores grandes, próximos de 1, induzem um forte efeito de interação espaço-temporal, enquanto valores pequenos, próximo de zero, induzem a um efeito fraco de interação espaço-temporal. Isso sugere, ao menos a princípio, uma forma de testar a separabilidade da função de covariância, além de quantificar a intensidade da interação espaço-temporal. Na prática tal teste pode apresentar dificuldades na estimação do parâmetro, com a função de verossimilhança apresentando curvatura suave na direção deste parâmetro, combinada ao fato de que o valor de interesse no teste ($\beta = 0$) está na borda do espaço paramétrico.

No exemplo aqui considerado, o valor estimado para o parâmetro $\beta = 0.04$ é muito próximo de zero, o que indica que o modelo separável se ajusta bem aos dados; em outras palavras, não há evidência clara de interação entre o espaço e o tempo. Pode-se ressaltar novamente que a estimação desse parâmetro pode ser numericamente instável, o que requer cuidadosa calibragem dos algorítmos numéricos.

Para verificar o efeito da suposição de separabilidade espaço-temporal, foi considerado também o erro médio de predição, para tanto foi realizada a krigagem simples para diferentes valores de β. Os valores preditos para o tempo 26 foram comparados com os verdadeiros valores observados para este tempo. A Figura 1 ilustra essas predições sinalizando que o modelo com $\beta = 0$ é o que fornece predições mais próximas dos valores observados e ainda percebe-se que o aumento do valor de β causa uma diminuição na média e na variância. A Tabela 3 apresenta os erros quadráticos médios, as médias e variâncias da predição, e por meio dela é possível verificar que o menor valor do erro quadrático médio ocorre quando $\beta = 0$, ou seja, o modelo separável é o mais indicado para o conjunto de dados considerado.

Tabela 3 - Erro quadrático médio, média e variância de predição para funções de covariância espaço-temporais com diferentes valores do parâmetro β

	EQM	Média	Variância
Modelo separável $\beta = 0$	5.561	17.114	0.753
Modelo não separável $\beta = 0.25$	12.674	15.913	0.494
Modelo não separável $\beta = 0.5$	26.060	14.371	0.309
Modelo não separável $\beta = 0.75$	45.661	12.720	0.191
Modelo não separável $\beta = 0.95$	64.436	11.451	0.132

Na Figura 2 são ilustrados os mapas de krigagem simples com parâmetros $\beta = 0, 0.25, 0.95$. As predições foram realizados para o tempo 26, cujos dados não foram utilizados na estimação. Estes mapas de valores preditos ilustram uma pequena diferença no comportamento das "manchas", mas uma diferença um pouco maior nas escalas. Pelas legendas percebe-se a clara diminuição do valor médio considerado.

As análises foram efetuadas no programa R de computação estatística (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2007) utilizando ainda os pacotes adicionais geoR (Ribeiro Jr e Diggle, 2001) para análises exploratórias e iniciais puramente espaciais e RandomFields (Schlather, 2006) para modelagem espaço-temporal.

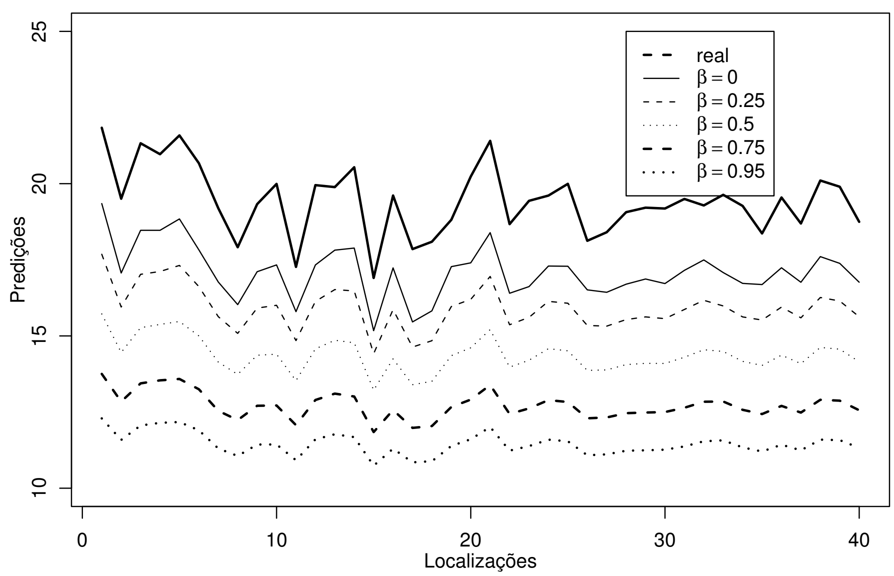

Figura 1 - Distribuição das predições para o tempo 26 e do verdadeiro valor amostrado.

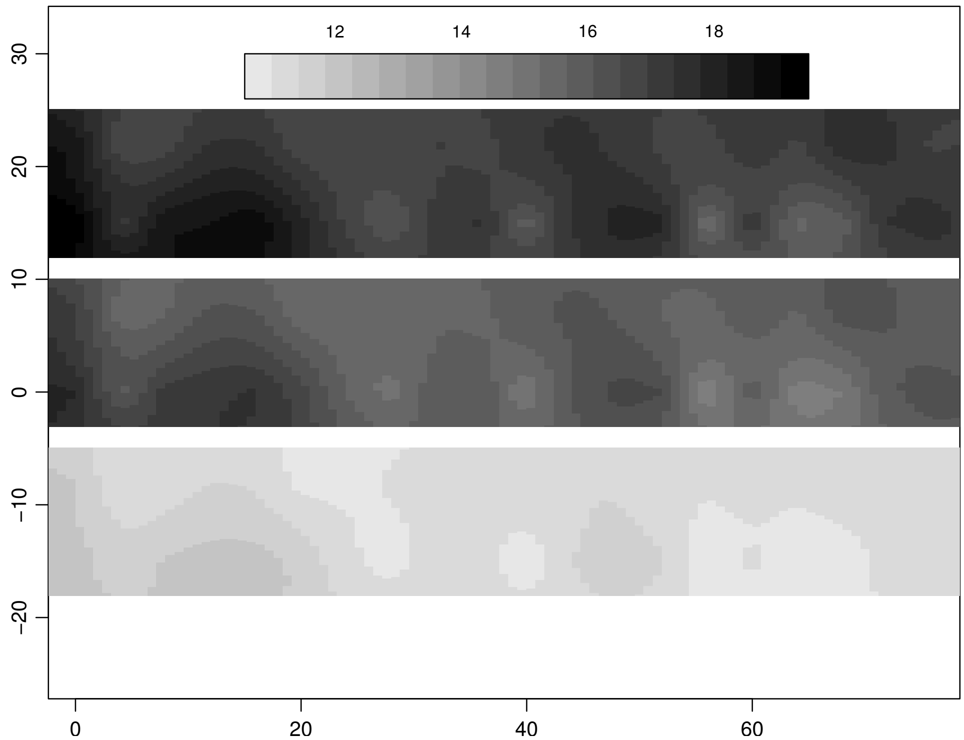

Figura 2 - Mapas de predição espacial por krigagem para modelos com $\beta = 0$ (superior), $\beta = 0.25$ (meio), $\beta = 0.95$ (inferior).

4 Discussão

Processos ambientais e geofísicos, como concentração de poluentes, campos de precipitação e superfície do vento, são caracterizados pela variabilidade contínua no espaço e no tempo. Tais campos espaço-temporais são geralmente tratados como aleatórios, uma vez que as leis que governam seu comportamento não são completamente compreendidas e sua complexidade não segue uma descrição determinística precisa. Modelos estocásticos, por sua vez, são baseados tipicamente em um pequeno número de parâmetros que devem ser inferidos tipicamente a partir de uma única observação parcial do processo.

O objetivo primário da modelagem de tais processos é informar sobre padrões do comportamento espaço-temporal. Parte-se do princípio de que não existe um modelo que se ajuste perfeitamente aos dados e o que ocorre é que alguns modelos são mais capazes que outros de descrever certas situações. Com a modelagem é possível resumir de forma simples um conjunto de dados complexo, testar hipóteses cientificamente relevantes e fazer predições dos processos em posições não observadas do espaço e/ou tempo.

Fenômenos espaciais e temporais são caracterizados pela unicidade e não reproducibilidade, assumindo-se então que os dados constituem uma amostra parcial única da realização de um particular mecanismo estocástico. Conseqüentemente, inferências só podem ser feitas a partir da adoção de simplificações e suposições. A princípio, a estratégia de análise espaço-temporal apresentada aqui poderia ser tratada simplesmente como uma extensão da análise puramente espacial por acrescentar uma dimensão referente ao tempo. Entretanto, a diferença física entre espaço e tempo e a ordenação natural dos tempos induzem características particulares e dificuldades adicionais.

O tempo e o espaço são duas dimensões completamente diferentes, o que dificulta a especificação de funções de covariância espaço-temporais que precisam satisfazer condições para serem consideradas válidas. Uma especificação conveniente para a função de covariância espaço-temporal é assegurada por propriedades que dão suporte à família de funções de covariância separáveis. Estas podem ser obtidas pela soma e/ou produto de funções de covariância válidas. A grande desvantagem deste método é que ele não considera na modelagem a interação entre o espaço e o tempo.

Uma alternativa às funções de covariância separáveis são as funções de covariância espaço-temporais não separáveis e neste caso a interação entre o espaço e o tempo é incluida na modelagem. Dentre as propostas existentes na literatura para modelagem que assumem a estacionariedade da estrutura de covariâncias, optou-se aqui pela a família de Gneting considerando a sua generalidade, flexibilidade de especificação e simplicidade de obtenção, características que também favorecem implementações computacionais. Especificamente, na aplicação considerada neste trabalho, adotou-se funções de covariância espaço-temporais estacionárias e completamente simétricas.

Para os dados aqui considerados foi ajustado inicialmente um modelo com estrutura de covariância separável, composta pelo produto entre uma função *cauchy generalizada*, para o componente puramente temporal, e uma função *stable*, para o componente espacial. Ainda para a covariância separável foi adicionado um efeito pepita composto pelo produto entre uma constante e uma função *cauchy generalizada*. Depois de estimados todos os valores para os parâmetros do modelo separável, foi ajustado um modelo de covariância não separável mas com a mesma estrutura de anisotropia estimada para o modelo separável. O modelo não separável considerado é composto pelo produto entre uma função de covariância *cauchy generalizada*, que depende apenas do tempo, e uma função não separável proposta por Gneiting, que depende do tempo e do espaço conjuntamente. Para o efeito pepita foi considerada a mesma estrutura estimada para o modelo separável. Tais escolhas permitem que o modelo separável proposto seja uma caso particular do modelo não separável para o caso em que $\beta = 0$.

A utilização de conjunto de dados reais levantou dificuldades práticas na condução das análises. A primeira foi o exame das possibilidades de análise implementadas no pacote RandomFields, que ainda se encontra em desenvolvimento recente nos algorítmos para modelagem espaço-temporal, com documentação restrita e poucas são as publicações que se utilizam desta implementação computacional. Um problema computacional é a demanda por computadores com grande capacidade de memória e processamento, já que o número de observações para análise espaço-temporal cresce muito rapidamente com o aumento de observações nas coordenadas do tempo e/ou espaço.

Para a análise do conjunto de dados foram considerados os mesmos pontos em todos os tempos, sendo isto uma obrigatoriedade da implementação disponível no pacote, já que não existe a possibilidade de se especificar coordenadas diferentes para cada tempo. Por conta destas limitações, algumas observações tiveram de ser descartadas da estimação e predição para as análises apresentadas aqui.

Foram encontradas dificuldades de convergência numérica na obtenção de estimativas para parâmetro β da função de covariância proposta por Gneiting, e portanto neste trabalho foram consideradas outras formas de assegurar a validade dos valores estimados para este parâmetro. O resultado final na análise considerada aqui foi o de uma estimativa com valor próximo de zero, sinalizando para uma fraca interação entre o espaço e o tempo.

Foi obtida a predição espacial para um tempo futuro e comparado com os valores observados. O interesse neste caso foi verificar por meio do erro quadrático médio de predição a qualidade do ajuste da função de covariância. A Tabela 3 mostra uma diferença nos valores do erro quadrático médio, média e variância de predição para diferentes modelos. Os resultados dessa tabela indicam que a estrutura de covariância separável é a que fornece valores preditos mais próximos dos valores observados. Percebe-se também a diminuição da média e da variância de predição à medida que o valor do parâmetro β se aproxima de 1.

No desenvolvimento deste trabalho foram feitas ainda várias simulações e análises que serviram para a melhor compreensão do uso do pacote RandomFields e do comportamento das realizações do processo sob diferentes modelos. Em uma dessas simulações foi estimado um campo espaço-temporal com um determinado valor do parâmetro β; em seguida foi realizada a estimação dos parâmetros, e verificou-se que a estimativa de verossimilhança não se aproximou de forma satisfatória do valor estimado. Estes resultados são preliminares e considera-se que estudos dessa natureza devem ser efetuados de forma mais detalhada e portanto optou-se por não reportar aqui os resultados. Uma condição que poderia ser considerada é a realização de várias estimações e então seria calculada a média das estimativas. Espera-se que a média dos parâmetros estimados se aproxime do valor dos parâmetros simulados. Com um número suficientemente grande de valores estimados pode-se ter uma melhor idéia da variabilidade de cada parâmetro e com isso a determinação de intervalos de confiança e cobertura poderiam ser obtidos, assim como poderia se avaliar o impacto em predições.

Essas são apenas algumas entre as muitas possibilidades em se aprofundar os estudos nesta área. Neste trabalho procurou-se revisar e compilar novas metodologias de análise espaço-temporal a partir da especificação de funções de covariâncias espaço-temporais. Com o avanço de recursos computacionais e o forte apelo prático dado pela diversidade de possíveis aplicações pode-se prever que os métodos permitirão descrições mais realísticas de fenômenos espaço-temporais. Ressalte-se que modelos que utilizam a especificação da função de covariância, embora promissores e com fácil interpretação intuitiva, apresentam fortes pressuposições sobre o processo, dificuldades de estimação e restrições para uso em dados reais. Estudos complementares são ainda necessários para auxiliar na compreensão das características de identificabilidade e aplicabilidade, bem como as exigências e restrições de implementação.

Agradecimentos

Registramos agradecimentos a Dolorice Moreti e o Prof. Dr. Paulo Leonel Libardi do Departamento de Física de Solos, por ter gentilmente cedido os dados da aplicação, a Martin Schlather pelos esclarecimentos sobre o uso do pacote RandomFields e aos revisores anônimos pelas correções e sugestões para melhorias do texto.

SILVA, A. S. da; RIBEIRO JR, P. J.; ELMATZOGLOU, I. Geostatistical modeling using the Gneiting's family of space-time covariance functions. *Rev. Mat. Estat.,* São Paulo, v.25, n.1, p.65-83, 2007.

- *ABSTRACT: The specification of space-time covariance functions is one of the possible strategies to model processes observed at different locations and time points. Such functions can define separable and non-separable processes and must fulfill the condition of positive-definiteness. Among the strategies to obtain such valid functions are the ones by Cressie and Huang based on inverse transforms of spectral representations and Gneiting, which allow constructions directly on the measurement domain. The former is based on the idea of obtaining valid functions in a space of increased dimension from valid functions on the primary dimension and requires operations in the frequency domain. Alternatively, the latter combines increasing monotone functions avoiding the inversion of spectral representations. There are still few reports of usage and comparisons of the strategies. This work follows Gneiting's proposal with different values for the space-time interaction parameter. Separable and non-separable models were investigated for the analysis of a real data set on soil water storage within a citrus field. The implementation on the* R *package* RandomFields *was used, with methodology and computational implementation being reviewed. For the data considered here the separable model provided a satisfactory fit, based on maximum likelihood estimation.*

- *KEYWORDS: Covariance functions; geostatistics; space-time models, random fields;* RandomFields *Package.*

Referências

BOCHNER, S. *Lectures on fourier integrals*. New York: Princeton University Press, 1959.

CRESSIE, N.; HUANG, H-C. Classes of non-separable, spatio-temporal stationary covariance functions. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.94, p.1330-1340, 1999.

DIGGLE, P. J.; RIBEIRO Jr, P. J. *Model-based geoestatistics*. New York: Springer, 2007.

DIGGLE, P. J.; RIBEIRO Jr, P. J.; CHRISTENSEN, O. F. *Spatial statistics and computational methods*. New York: Springer, 2003.

ELMATZOGLOU, I. *Spatio-temporal geoestatistical models, with an aplication in fish stock*. 2006. Tesis (Master in Statistics) – Lancaster University, Lancaster, 2006.

FUENTES, M. Testing for separability of spatial-temporal covariance functions. *J. Stat. Plan. Infer.*, Amsterdam, v.136, p.447-466. 2005.

GNEITING, T. Nonseparable, stationary covariance functions for space-time data. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.97, n.458, 2002.

GNEITING, T.; SCHLATHER, M. *Stochastic models wich separate fractral dimension and Hurst effect*. Washington: University of Washington, 2001. (Technical Report Series - NRCSE-TRS, 69).

GNEITING, T.; SCHLATHER, M. Space-time covariance models. *Encycl. Environmetrics*, Columbia, v.4, p.2041-2045, 2002.

GNEITING, T.; GENTON, M. G.; GUTTORP, P. *Geostatistical space-time models, stationarity, separability and full symmetry*. Washington: University of Washington, 2006. (Technical Report, 475).

ISAAKS, E. H.; SRISVASTAVA, R. M. *An introduction to applied geostatistics*. New York: Oxford University Press, 1989.

KYRIAKIDIS, P. C.; JOURNEL, A. G. Geostatistical space-time models: a review. *Math. Geol.*, New York, v.31, p.651-684, 1999.

LE, D. N.; ZIDEK, J. V. *Statistical analysis of environmental space-time processes*. New York: Springer, 2006.

MORETI, D. *Avaliação espaço-temporal de processos do balanço de água em solo com citros*. 2006. 138p. Tese (Doutorado em Estatística) – Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2006.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R. *A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. Disponível em <http://www.R-project.org>. Acesso em: 2007.

RIBEIRO JR, P. J.; DIGGLE, P. J. geoR: a package for geostatistical analysis. *R-News*, v.1, n.2, p.15-18, 2001.

SCHABENBERGER, O.; GOTWAY, C. A. *Statistical methods for spatial data analysis*. Chapman & Hall/CRC, 2005.

SCHMIDT, A. M.; SANSÓ, B. Modelagem bayesiana da estrutura de covariância de processos espaciais e espaço-temporais. In: SINAPE, 17., 2006, Caxambu. *Anais...* Caxambu: SBMAC, 2006.

SCHLATHER, M. *Introduction to positive definite functions and to unconditional simulation of random fields*. Lancaster: Lancaster University, 1999. 48p. (Technical Report, ST-99-10).

SCHLATHER, M. *Random fields: simulation and analysis of random fields. R package version 1.3.29*. Disponível em: <http://www2.hsu-hh.de/schlath>. Acesso em: 2006.

STEIN, M. L. *Space-time covariance functions*. Chicago: University of Chicago, 2004. (Technical Report, 4).

STEIN, M. L. *Nonstationary spatial covariance functions*. Chicago: University of Chicago, 2005. 57p. (Technical Report, 21).

Recebido em 10.01.2007.

Aprovado após revisão em 31.05.2007.