CONTROLE DE QUALIDADE VIA DADOS ACELERADOS COM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E RELAÇÃO ESTRESSE-RESPOSTA LEI DE POTÊNCIA INVERSA

Sabrina Luzia CAETANO[1]
Francisco LOUZADA-NETO[1]

- RESUMO: A obtenção de medidas da confiabilidade de produtos manufaturados é imprescindível no controle da qualidade industrial. Em geral, esse controle pode ser feito em meio a linha de produção pelos chamados testes acelerados. Estes testes consistem na submissão de um certo número de unidades do produto a níveis de estresse mais severos do que os usualmente utilizados. A utilização da informação coletada sob tais níveis de estresse é usada para inferir sob a confiabilidade do produto quando este é utilizado sob as condições usuais de funcionamento. O objetivo deste trabalho consiste no estudo e na proposição de metodologia para testes acelerados e na proposição de um esquema de utilização desses testes no controle da qualidade industrial, considerando uma distribuição exponencial para os tempos de funcionamento juntamente como uma relação estresse-resposta de potência inversa para a relação entre o parâmetro da exponencial e os níveis de estresse. Técnicas de reamostragem são utilizadas na estimação intervalar dos parâmetros de interesse. Dados simulados ilustram a metodologia proposta.

- PALAVRAS CHAVES: Intervalo assintótico; *Bootstrap* paramétrico; censura; controle de qualidade; simulação; teste acelerado.

1 Introdução

O controle de qualidade que estamos trabalhando, é um processo amplo e complexo, que abrange todos os setores de uma empresa, em um esforço comum e cooperativo, estabelecendo melhorias e assegurando a qualidade da produção. Ele é exercido pelo produtor durante o processo em questão, com o objetivo de manter a qualidade do produto satisfatoriamente uniforme, prevenindo a produção de itens fora da especificação de fabricação.

A verificação de que o processo está ou não sob controle é feita pelo exame dos itens de amostras extraídas periodicamente. Se o processo estiver sob controle, as amostras apresentarão a variabilidade correspondente a amostras extraídas de uma população normal, isto é, a variabilidade devida apenas ao acaso na amostragem. O processo sob

[1] Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Caixa Postal 676, CEP: 13565-905, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: *dfln@power.ufscar.br*

controle supõe, portanto, que o característico de qualidade do conjunto dos itens produzidos possua distribuição normal. Além disso, supõe também que essa distribuição permaneça estável, isto é, que seus dois parâmetros, a média e o desvio padrão, permaneçam constantes, o que é verificado periodicamente pela extração de uma seqüência de amostras.

A distribuição normal constitui a base estatística indispensável no controle de fabricação. Sabemos que os itens de uma distribuição normal (de média μ e desvio padrão σ) se distribuem em torno da média nas seguintes proporções aproximadas: 68% dos valores no intervalo $\mu \pm \sigma$, 95% no intervalo $\mu \pm 2\sigma$, e 99,7% no intervalo $\mu \pm 3\sigma$. Conseqüentemente, diferenças entre um valor observado x e a média μ, maiores do que $\pm 3\sigma$ são esperadas, apenas, três vezes em cada mil observações. Por isso, a faixa de variabilidade normal no processo sob controle é a do intervalo μ-3σ e μ+3σ (Montgomery, 1991).

Desta forma, por mais confiável que um dispositivo seja, a maior dificuldade é medir sua resistência. Isto porque sob as atuais condições de operação, muito tempo de teste pode ser exigido para a obtenção de medidas de sua resistência (tempo de falha). Ainda que os testes sejam viáveis, o avanço tecnológico é tão grande que algumas peças podem ficar obsoletas durante o tempo de medida da sua resistência. Ainda, muitos componentes usados na prática estão sob circunstâncias de difícil simulação em laboratórios.

Uma saída para a solução dessas dificuldades é o uso de testes acelerados, em que as peças são operadas sob níveis de estresse mais altos do que os necessários para o uso normal. A dificuldade dos testes acelerados está em observar a *performance* da peça em um nível de estresse alto e, então predizer a *performance* da peça sob o nível de estresse exigido para um funcionamento normal. Situações desta natureza sugerem a exploração de qualquer conhecimento a respeito da variação do comportamento de falha com as circunstâncias, então os testes de vida conduzidos sob circunstâncias aceleradas podem ser usados para inferir sobre o comportamento de um componente em condições de uso. O uso do tempo médio até a falha é adequado se estamos interessados somente no comportamento do tempo médio de vida do componente, mas considerando o interesse na resistência, certamente os percentis da distribuição são muitas vezes interessantes. Por essa razão, para qualquer inferência ser significativa é necessário considerar a relação entre os parâmetros da distribuição de falha e as circunstâncias.

Todavia esta metodologia é aplicada quando temos amostras de tamanhos grandes, o que, em geral é de difícil observação quando se trata de dados relacionados a confiabilidade do produto. Desta forma o interessante seria trabalhar com amostras menores, tal que o custo e o tempo de experimentação pudessem diminuir.

A idéia focada neste estudo, foi combinar a metodologia de testes de sobrevivência acelerados e intervalos de confiança obtidos via técnicas de reamostragem, as quais serão apresentadas neste artigo.

A descrição do modelo e a metodologia utilizada são tratadas na seção 2, um exemplo é apresentado na seção 3, na seção 4 são verificados resultados obtidos via simulação, na seção 5 as conclusões e na seção 6 encontramos as referências bibliográficas.

2 Descrição do modelo

Para o controle da qualidade industrial, devemos inicialmente realizar um planejamento de experimento considerando dados submetidos a diversos níveis de estresse e obter assim as estimativas dos parâmetros e os limites do gráfico de controle.

Assim, depois de obtidos dados por apenas um nível severo de estresse, podemos obter estimativas do tempo médio de sobrevivência no nível usual de funcionamento do componente e acompanhar sistematicamente o tempo médio de vida do componente.

Formalmente, seja $f(t;\theta)$ uma função densidade de probabilidade da variável aleatória tempo até a falha de um componente em uma circunstância definida por um vetor de estresse X. θ é um vetor de parâmetros. Duas suposições são necessárias:

1. A severidade dos níveis de estresse (caracterizado por X) não muda a distribuição do tempo de vida f(t;θ), mas os níveis de estresse têm uma influência nos valores dos parâmetros.
2. A relação entre X e θ, ou seja, θ =g(X; β0 ,β1 ,β2,...), é conhecida, exceto para um ou mais parâmetros β0 ,β1 ,β2,...; é também necessário assumir que a relação é válida para uma certa variação dos elementos de X.

O objetivo aqui é obter estimativas dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ baseados nos testes conduzidos para diversos valores de X (dentro dos limites da validade da relação), e então usar estas estimativas para fazer uma inferência sobre θ.

Está claro na discussão anterior que o sucesso do procedimento depende da escolha correta do modelo. Os modelos geralmente são escolhidos pelos conhecimentos empíricos do problema a ser estudado. Neste estudo, consideramos o modelo exponencial.

Seja $f(t;\theta)$ uma função densidade de probabilidade da variável aleatória tempo até a falha de um componente, e θ um vetor de parâmetros. A função densidade para os tempos de falha é dada por uma distribuição exponencial da forma:

$$f(t;\lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad \lambda_i > 0, \tag{1}$$

em que $t \geq 0$ e λ_i é a taxa de risco constante sob o nível de estresse X_i, se $\theta_i = 1/\lambda i$, tal que $i = 1,\ldots,K$. θ_i é o tempo médio de sobrevivência até a falha do componente sob o nível de estresse X_i (X_i é o nível de estresse utilizado).

Considere que a relação estresse-resposta entre os parâmetros da exponencial e os níveis de estresse é caracterizada pela lei de potência inversa dada por:

$$\lambda_i = \exp\{-\beta_0 - \beta_1 X_i\}, \tag{2}$$

sendo que $-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty$ são parâmetros desconhecidos.

Considerando um esquema de censuras tipo II, ou não informativa, e as relações dadas em (1) e (2), a função de verossimilhança para k níveis de estresse é:

$$L(\beta_0, \beta_1) = \exp\{-\beta_0 r - \beta_1 \alpha - e^{-\beta_0} \sum_{i=1}^{k} A_i e^{-\beta_1 X_i} \tag{3}$$

sendo $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$ (número total de falhas observadas), $a = \sum_{i=1}^{k} r_i X_i$ e $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i}$.

Podemos ter também um estudo com um esquema de censuras do tipo aleatória. Para este tipo de estudo, a função de verossimilhança permanece a mesma, fazendo $A_i = \sum_{j=1}^{r_i} (\delta_j t_{ij} + (1-\delta_j) t_{ij_i})$, em que δ_j é igual a 1 se o tempo observado foi uma falha e 0 se o dado é censurado, sendo que n é o número total de eventos.

2.1 Procedimento de estimação pontual

A princípio, o processo de estimação dos parâmetros pode ser baseado na função de verossimilhança.

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV), para os parâmetros, podem ser obtidos pela maximização direta da função de verossimilhança em (3).

O software estatísticos S-Plus foi utilizado para implementação do algoritmo, que contém uma função de minimização denotada por *nlmin* que busca o ponto de mínimo, por meio do método de quasi-Newton (Seber e Wild, 1989), e desta forma contribui de forma vantajosa na busca das estimativas dos parâmetros.

Uma outra possibilidade, relativamente menos elaborada que a anterior, é obter os EMV pela solução do sistema de equações diferenciais,

$$\frac{\partial \log L(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0, \qquad \frac{\partial \log L(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0. \tag{4}$$

Neste caso, podemos considerar o método de Newton-Raphson (Seber e Wild, 1989) para obter as soluções numéricas de (4). Entretanto, esse método é mais susceptível à falha na convergência, particularmente para amostras pequenas e moderadas (Louzada-Neto, 1997).

2.2 Estimação intervalar

Serão estudados neste relatório dois tipos de intervalo de confiança, sendo estes o assintótico e o *Bootstrap* paramétrico. A seguir podemos encontrar suas respectivas definições em relação ao problema apresentado.

2.2.1 Intervalo assintótico

Intervalos de Confiança para os parâmetros podem ser baseados na distribuição normal assintótica.

O intervalo assintótico pode ser construído utilizando os EMV e suas variâncias estimadas. Seja $\beta' = (\beta_0, \beta_1)$ e $L(\beta_0, \beta_1)$ a função de verossimilhança correspondente, e $l(\beta_0, \beta_1) = \log L(\beta_0, \beta_1)$. Seja $\hat{\theta}$ o vetor de EMVs para θ. Para obtermos inferências para θ podemos utilizar a normalidade assintótica dos EMV (Cox e Hinkley, 1974),

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, I^{-1}(\beta)) \tag{5}$$

em que $I_{ij}(\beta) = -E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right)$ são os elementos da matriz de informação de Fisher.

2.2.2 Método delta

Para a estimação dos tempos médios de sobrevivência θ_i, o método Delta (Lawless, 1982) pode ser utilizado porque θ_i é uma função dos parâmetros β_0 e β_1.

Sabemos que:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right].$$

Então,

$$\hat{\theta}_i = \exp\{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i\} \sim$$
$$\left[(\theta_i), \sigma_{11}\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_0}\right)^2 + 2\sigma_{12}\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_0}\right)\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_1}\right) + 2\sigma_{22}\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_1}\right)^2\right].$$

Assim os intervalos de confiança de 95% são dados por:

$$\hat{\theta}_i \pm 1{,}96\sqrt{\hat{\mathrm{var}}(\hat{\theta}_i)}$$

A utilização de (5) é direcionada pelo tamanho da amostra, que deve ser suficientemente grande. Alternativamente, uma vez que nos testes acelerados só podemos dispor de amostras pequenas ou moderadas, podemos utilizar a técnica *Bootstrap* paramétrico e/ou não-paramétrico (Davison e Hinkley, 1997) na construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses. Essas técnicas de simulação foram introduzidas por Efron (1979).

2.2.3 Intervalo via *Bootstrap*

O termo *Bootstrap* é utilizado para denominar uma técnica de simulação que visa à obtenção de estimativas intervalares empíricas para os estimadores dos parâmetros de interesse, por meio da reamostragem do conjunto de dados original. Essa técnica foi introduzida por Efron (1979).

Seja β o parâmetro de interesse. Para cada amostra, calculamos o EMV para β e temos no final de R reamostragens, $\hat{\beta}_1^* < \ldots < \hat{\beta}_R^*$ valores dos EMV ordenados. Utilizamos:

$$\hat{\beta}^*_{(R+1)(\frac{\alpha}{2})} e \hat{\beta}^*_{(R+1)(1-\frac{\alpha}{2})} \tag{6}$$

como sendo os limites inferiores e superiores do intervalo 100(1-α)% de confiança para β Pelo fato da literatura, na maioria das vezes, utilizar o número de reamostragens fixado em R=999, nós utilizaremos o mesmo.

Dessa forma, pela equação (6) podemos obter intervalos de confiança percentil *Bootstrap 100 (1-α)%* para o parâmetro de interesse. Intervalos de confiança percentil *Bootstrap* para os outros parâmetros de interesse podem ser obtidos de maneira análoga.

Existem dois tipos básicos de *Bootstrap*. O *Bootstrap* paramétrico em que os EMVs são obtidos por meio do modelo ajustado, isto é, geramos dados do modelo ajustado com os valores dos parâmetros fixados nos EMV obtidos da amostra original, e o *Bootstrap* não-paramétrico em que os EMVs são baseadas em R reamostras com reposição obtidas da amostra original, todavia neste artigo trataremos da técnica referente ao *Bootstrap* paramétrico. Maiores detalhes sobre as técnicas podem ser obtidos em Efron e Tibishirani (1993) e Davison e Hinkley (1997).

3 Exemplo (dados artificiais)

A metodologia descrita nas seções anteriores foi aplicada ao conjunto de dados gerados apresentados na Tabela 1. Neste exemplo, temos em (2) β_0=5.7366, β_1= 0.6, $X_i = -\ln(V_i)$, onde V é uma variável de voltagem com V_1=5 (nível usual de estresse), sendo que o valor de geração θ_i foi encontrado pelas devidas substituições em (2), e as observações foram geradas considerando o valor de geração como o parâmetro da distribuição exponencial considerada em (1). Ressaltamos que os valores das observações são considerados sem as casas decimais. Cinco casos foram estudados em cada tipo de intervalo: dados sem censura, com 10% e 30% de censura à direita e com 10% e 30% de censura aleatória. Os resultados são mostrados nas tabelas de 1 à 10.

Tabela 1 - Níveis de estresse, valores geração e conjunto de dados gerados

i	V_i	n_i	r_i	θ_i (valor geração)	Observações não censuradas
1	5	10	10	118.0298	10, 17, 20, 24, 85, 87, 93, 127, 176, 371
2	10	10	10	77.87064	6, 13, 23, 55, 64, 69, 102, 124, 125, 192
3	20	10	10	51.37546	0, 1, 11, 18, 19, 28, 37, 56, 111, 119

Na Tabela 2 temos os valores geração, os estimados e os limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança de 95% para os parâmetros do modelo, calculados a partir das técnicas descritas anteriormente.

Tabela 2 - Intervalos de Confiança de 95% para o tempo médio de sobrevivência

	θ_1	θ_2	θ_3
V. Geração	118.0298	77.87064	51.37546
EMV	108.27722	68.14067	42.88207
IC Assintótico	[50.15; 166.39]	[45; 91.27]	[19.86; 65.89]
IC Bootstrap Par.	[59.98; 179.13]	[45.41; 93.35]	[22.21; 71.88]
Vício Par.	$0.008_{[0.297]}$	$0.016_{[0.181]}$	$0.007_{[0.293]}$

A Tabela 3 apresenta o mesmo conjunto de dados com censura de 10% à direita.

Tabela 3 - Níveis de estresse, valores geração e conjunto de dados gerados com 10% de censura à direita

i	V_i	n_i	r_i	θ_i (valor geração)	Observações não censuradas
1	5	10	9	118.0298	10, 17, 20, 24, 85, 87, 93, 127, 176
2	10	10	9	77.87064	6, 13, 23, 55, 64, 69, 102, 124, 125
3	20	10	9	51.37546	0, 1, 11, 18, 19, 28, 37, 56, 111

A Tabela 4 apresenta as estimativas obtidas para os dados com censura de 10% à direita.

Tabela 4 - Intervalos de Confiança de 95% para o tempo médio de sobrevivência

	θ_1	θ_2	θ_3
V. Geração	118.0298	77.87064	51.37546
EMV	98.07342	68.0167	47.17152
IC Assintótico	[44.05; 152.09]	[43.79; 92.23]	[20.05; 74.28]
IC Bootstrap Par.	[50.75; 167.86]	[44.91; 94.16]	[23.51; 80.32]
Vício Par.	$0.008_{[0.309]}$	$-0.019_{[0.191]}$	$0.007_{[0.311]}$

A próxima Tabela 5 apresenta os dados com 30% de censura à direita.

Tabela 5 - Níveis de estresse, valores geração e conjunto de dados gerados com 30% de censura à direita

i	V_i	n_i	r_i	θ_i (valor geração)	Observações não censuradas
1	5	10	7	118.0298	10, 17, 20, 24, 85, 87, 93
2	10	10	7	77.87064	6, 13, 23, 55, 64, 69, 102
3	20	10	7	51.37546	0, 1, 11, 18, 19, 28, 37

E as estimativas dos dados com 30% de censura à direita são dadas pela Tabela 6:

Tabela 6 - Intervalos de Confiança de 95% para o tempo médio de sobrevivência

	θ_1	θ_2	θ_3
V. Geração	118.0298	77.87064	51.37546
EMV	108.79962	65.80837	39.80474
IC Assintótico	[39.11; 178.48]	[39.56; 92.05]	[15.10; 64.50]
IC Bootstrap Par.	[48.12; 198.41]	[40.8; 93.46]	[18.12; 74.61]
Vício Par.	0.011 $_{[0.355]}$	-0.024$_{[0.213]}$	0.017$_{[0.363]}$

Para o mesmo conjunto de dados podemos ter também um esquema de censuras aleatórias e a Tabela 7 apresenta os dados 10% censurados.

Tabela 7 - Níveis de estresse, valores geração e conjunto de dados gerados com 10% de censura aleatória

i	V_i	n_i	r_i	θ_i (valor geração)	Observações não censuradas
1	5	10	9	118.0298	10, 17, 20, 24+, 85, 87, 93, 127, 176, 371
2	10	10	9	77.87064	6, 13, 23, 55, 64, 69, 102, 124, 125+, 192
3	20	10	9	51.37546	0, 1, 11, 18, 19, 28, 37, 56+, 111,119

Os sinais "+" indicam observações censuradas.

As estimativas dos dados com 10% de censuras aleatórias são fornecidas pela Tabela 8.

Tabela 8 - Intervalos de Confiança de 95% para o tempo médio de sobrevivência

	θ_1	θ_2	θ_3
V. Geração	118.0298	77.87064	51.37546
EMV	120.308	75.71185	47.64674
IC Assintótico	[48.55; 192.06]	[47.15; 104.27]	[19.22; 76.06]
IC Bootstrap Par.	[72.89; 223.27]	[56.74; 115.5]	[27.26; 94.6]
Vício Par.	0.130 $_{[0.356]}$	0.097$_{[0.213]}$	0.13$_{[0.359]}$

Os dados com censura aleatória de 30% são fornecidos pela Tabela 9.

Tabela 9 - Níveis de estresse, valores geração e conjunto de dados gerados com 30% de censura aleatória

i	V_i	n_i	r_i	θ_i	Observações não censuradas
1	5	10	7	118.0298	10, 17+, 20, 24+, 85, 87, 93+, 127, 176, 371
2	10	10	7	77.87064	6+, 13, 23+, 55, 64, 69, 102, 124+, 125, 192
3	20	10	7	51.37546	0, 1+, 11, 18, 19+, 28, 37+, 56, 111, 119

Os sinais "+" indicam observações censuradas.

As estimativas dos dados com censura aleatória de 30% são fornecidos pela Tabela 10.

Tabela 10 - Intervalos de Confiança de 95% para o tempo médio de sobrevivência

	θ_1	θ_2	θ_3
V. Geração	118.0298	77.87064	51.37546
EMV	154.68164	97.34376	61.26006
IC Assintótico	[36.07; 273.29]	[50.13; 144.55]	[14.28; 108.23]
IC Bootstrap Par.	[98.9; 431.91]	[86.6; 209.41]	[43.87; 171.1]
Vício Par.	$0.495_{[0.569]}$	$0.437_{[0.325]}$	$0.489_{[0.529]}$

O que podemos observar é que os intervalos obtidos têm relativa semelhança, porém podemos destacar o alto vício dos intervalos obtidos via *Bootstrap* paramétrico que cresce à medida que o número de observações censuradas aumenta. Os resultados em relação aos intervalos estão mais evidentes no estudo de simulação feito a seguir, considerando a obtenção de intervalo de confiança via aproximação assintótica e via *Bootstrap* paramétrico.

4 Estudo de simulação

Como a aproximação assintótica é a forma mais utilizada atualmente, temos como objetivo principal nesta simulação mostrar que para pequenas amostras ela se torna inviável, ou seja, ela tem probabilidade de cobertura muito baixa em relação ao outro método testado (*Bootstrap* paramétrico).

O estudo de simulação realizado baseou-se na geração de 100 conjuntos de dados para cada tamanho de amostra. Baseado na geração da distribuição exponencial, trabalhamos com amostras de tamanho 10 (o que acontece geralmente em testes acelerados), 20, 50, 100 e 300.

Para cada amostra, verificamos se o intervalo de confiança cobria o verdadeiro valor do parâmetro ou não, calculando a proporção de vezes em que o intervalo de confiança cobriu os 100 conjuntos de dados.

Algo que foi analisado e que devemos observar com muita atenção é a média da Considerando todas as situações consideradas acima, temos as tabelas de 11 à 14 a seguir:

Tabela 11 - Intervalos Assintóticos

Número de censuras	Não censuradas	Censura à direita		Censura aleatória	
		10%	30%	10%	30%
10	12%	21%	31%	16%	18%
20	39%	43%	24%	37%	42%
50	50%	60%	65%	62%	68%
100	72%	74%	55%	70%	76%
300	94%	90%	82%	94%	98%

Pela Tabela 11 podemos visualizar claramente que a probabilidade de cobertura de amostras de tamanho 10 é baixa, principalmente para amostras não censuradas. Observando agora, as situações nas quais os valores amostrais aumentam, podemos verificar que a probabilidade de cobertura aumenta à medida que a quantidade de amostras também aumenta, comprovando a teoria assintótica.

Pelo fato de estarmos trabalhando com simulação, o valor do parâmetro que está sendo testado para verificação são valores amostrais, assim a simulação foi realizada com a escolha de um valor coerente para observarmos se este estava ou não contido nos intervalos.

Desta forma, diante da Tabela 11, já podemos concluir algo muito importante, pois podemos verificar que a probabilidade de cobertura para nossa amostra de interesse é muito baixa.

Tabela 12 - Intervalos Assintóticos (média e desvio padrão em relação as amplitudes dos intervalos)

Número de censuras	Não censuradas	Censura à direita		Censura aleatória	
		10%	30%	10%	30%
10	$545.25_{(172.41)}$	$406.11_{(137.81)}$	$250.92_{(86.576)}$	$467.35_{(165.14)}$	$320.57_{(113.27)}$
20	$260.88_{(54.98)}$	$202.95_{(40.502)}$	$133.94_{(28.839)}$	$220.74_{(49.148)}$	$151.41_{(33.712)}$
50	$99.141_{(13.85)}$	$84.237_{(10.746)}$	$55.32_{(6.9012)}$	$86.15_{(10.929)}$	$59.096_{(7.4967)}$
100	$49.133_{(4.810)}$	$42.183_{(4.0581)}$	$28.22_{(2.7546)}$	$43.021_{(4.220)}$	$29.509_{(2.8946)}$
300	$16.510_{(0.819)}$	$9.548_{(0.5200)}$	$14.181_{(0.893)}$	$14.181_{(0.893)}$	$9.727_{(0.6130)}$

Pela Tabela 12 podemos analisar a média e a amplitude de cada intervalo e perceber que à medida que o tamanho das amostras aumentam a média da amplitude diminui, confirmando os resultados obtidos na Tabela 11. Isto já era esperado pelo fato de que quanto aumenta o valor amostral, a tendência dos intervalos é diminuir.

Em relação ao desvio padrão das amplitudes, verificamos que quanto maior é a média da amplitude maior ele é, fato que também já era esperado. O que observamos de mais interessante é que para o caso dos dados com 30% de censura à direita, a amplitude é menor e que também os dados que apresentaram maior média de amplitude foram os não censurados.

Tabela 13 - Intervalos via *Bootstrap* paramétrico

Número de censuras	Não censuradas	Censura à direita		Censura aleatória	
		10%	30%	10%	30%
10	39%	71%	64%	68%	56%
20	81%	98%	82%	93%	92%
50	68%	83%	47%	80%	99%
100	95%	99%	99%	93%	91%
300	99%	99%	99%	99%	99%

Agora analisando os intervalos via *Bootstrap* paramétrico podemos verificar pela Tabela 13 que a probabilidade de cobertura para amostras de tamanho 10 é interessante. Outro fato que também podemos visualizar é a probabilidade de cobertura quando trabalhamos com amostra de tamanho 100 e 300, a qual é superestimada.

Por estarmos trabalhando com simulação, o valor do parâmetro que está sendo testado para verificação são valores amostrais, em que a simulação foi realizada de tal sorte que podemos escolher um valor coerente para observarmos se este estava ou não contido dentro dos intervalos. Como nos intervalos assintóticos, isto acontece devido à estimação dos valores dos parâmetros β_0 e β_1 serem feitas pelo estimador de máxima verossimilhança.

Tabela 14 - Intervalos via *Bootstrap* paramétrico (média e desvio padrão em relação as amplitudes dos intervalos)

Número de censuras	Não censuradas	Censura à direita		Censura aleatória	
		10%	30%	10%	30%
10	$113.96_{(40.27)}$	$83.419_{(29.54)}$	$48.261_{(17.29)}$	$87.588_{(30.95)}$	$42.43_{(14.99)}$
20	$53.83_{(11.98)}$	$41.055_{(9.131)}$	$25.35_{(5.824)}$	$41.369_{(9.2112)}$	$20.041_{(4.462)}$
50	$21.01_{(2.665)}$	$16.466_{(2.136)}$	$10.702_{(1.397)}$	$16.14_{(2.0482)}$	$7.8221_{(0.9922)}$
100	$10.49_{(1.029)}$	$8.290_{(0.8133)}$	$5.482_{(0.5411)}$	$8.0627_{(0.7908)}$	$3.9059_{(0.3831)}$
300	$3.458_{(0.2179)}$	$2.7493_{(0.1726)}$	$1.847_{(0.1194)}$	$2.657_{(0.1674)}$	$1.2875_{(0.0811)}$

A Tabela 14 nos mostra a média da amplitude dos intervalos. Por meio delas podemos verificar que este tipo de intervalo é o que tem a menor amplitude para os respectivos tamanhos de amostras.

Este tipo de situação nos traz uma conclusão importante: independente do tamanho da amostra a porcentagem de cobertura dos intervalos de confiança não se altera. Por esse motivo, devemos optar por ele para construção dos intervalos de confiança dentro do gráfico de controle.

Conclusões

O uso dos testes acelerados no controle da qualidade traz um ganho considerável ao custo e ao tipo de experimento. Pelo fato de no exemplo trabalharmos com níveis diferentes de voltagem pudemos verificar o comportamento do suposto equipamento em relação aos diversos níveis atentando como já foi dito anteriormente, que nosso enfoque principal é o nível usual. Atualmente, os gráficos de controle vêm sendo utilizados de várias formas, no nosso caso através da função regressora que relaciona os níveis de voltagem usual e o estressante, podemos inferir e utilizar o que realmente estamos interessados e usamos os testes acelerados, sendo este um método imprescindível para realização destes tipos de procedimento.

Usualmente, o método via intervalos assintótico é o mais utilizado. Como testes acelerados acabam deteriorando o equipamento testado é interessante que pequenas amostras sejam utilizadas, para reduzir custos e tempo, no procedimento de análise. Segundo a teoria assintótica, ela deve ser utilizada quando estamos trabalhando com grandes amostras, o que não é o nosso caso.

Como nosso objetivo principal é analisar como os intervalos de confiança se comportam em relação a pequenas amostras, trabalhamos com o intervalo assintótico e o método *Bootstrap* paramétrico, porém não podemos esquecer do alto vício destes que cresce à medida que o número de observações censuradas aumentam.

Para verificação mais apurada da situação, foi realizado um estudo de simulação em que os métodos assintótico e *Bootstrap* paramétrico foram testados quanto as suas probabilidades de cobertura para diferentes tamanhos da amostra.

Em suma, a utilização das técnicas de reamostragem, apresentadas para construção de intervalos de confiança para os parâmetros de interesse, proporcionam vantagens em relação às técnicas assintóticas, todavia a técnica *Bootstrap* paramétrica apresenta alto vício, situação esta que faz com que nosso estudo continue. Ressaltamos também que se constituem de alternativas eficientes quando a suposição de normalidade assintótica não é válida, o que de fato pudemos observar nos exemplos considerados. Pelos estudos de simulação podemos verificar claramente que para pequenas amostras a probabilidade de cobertura via intervalos assintóticos é muito baixo, enquanto para os intervalos *Bootstrap* a probabilidade de cobertura é muito maior e geralmente adequada.

Nosso principal objetivo que era mostrar que intervalos de confiança via métodos assintóticos são inviáveis para amostras de tamanhos pequenos foi atingido, ou seja, por estarmos trabalhando com tempo de sobrevivência em testes acelerados, amostras de tamanhos grandes requerem altos custos e disponibilidade de tempo.

Os intervalos via *Bootstrap* paramétrico foram preferidos em relação ao assintótico, isto é demonstrado pelos estudos de simulação. Para um estudo futuro, espera-se levar em conta os intervalos *Bootstrap* não-paramétrico.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos Referees e Corpo Editorial do periódico pelas sugestões que produziram melhoras no texto. Francisco Louzada-Neto é financiado pelo CNPq.

CAETANO, S. L.; LOUZADA-NETO, F. Quality control via accelerated data with exponential distribution and power law stress-response relationship. *Rev. Mat. Est.*, São Paulo, v.25, n.1, p.85-98, 2007.

- *ABSTRACT: Obtaining measurements from manufactured product reliability is very important for industrial quality control. Such control can usually be carried out in the production line environment via the so-called accelerated tests. These tests consist in the submission of certain number of units of the product to accelerated stress levels. The main objective of this work consists in the study and the proposition of a methodology of accelerated tests for quality control. We consider a exponential distribution and a power stress-response relationship. Resample procedures are considered for interval estimation. Simulated data illustrated the proposed methodology.*
- *KEYWORDS: Asymptotic confidence interval; parametric bootstrap; censoring; quality control; simulation; accelerated tests.*

Referências

AARSET, M. V. How to identify a bathtub hazard rate. *IEEE Tans. Reliab.*, New York, v.36, p.106-108, 1987.

COLLETT, D. *Modelling survival data in medical research*. New York: Chapman and Hall, 1994.

COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical statistics*. London: Chapman and Hall, 1974.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap methods and their application*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Ann. Stat.*, Hayward, v.7, p.1-26, 1979.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the bootstrap*. New York: Wiley, 1993.

EPSTEIN, B.; SOBEL, M. Life testing. *J. Am. Stat. Assoc.*, New York, v.48, p.486-502, 1953.

KLEIN, J. P.; MOESCHBERGER, M. L. *Survival analysis*: techniques for censored and truncated data. New York: Springer-Verlag, 1997.

LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: John Wiley and Sons, 1982.

LOUZADA- NETO, F. Extended hazard regression model for reliability and survival analysis. *Lifetime Data Anal.*, New York, v.3, p.367-381, 1997.

LOUZADA-NETO, F.; ACHCAR, J. A. Uso de dados acelerados no controle de produtos industriais assumindo uma distribuição exponencial e um modelo estresse-resposta geral. *Estadística*, Washington, v.45, p.144-145, 1993.

LOUZADA-NETO, F.; MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. *Análise de sobrevivência e confiabilidade*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Peru, 2002.

MANN, N. R.; SHAFFER, R. E.; SINGPURWALLA, N. D. *Methods for statistical analysis of reliability and life test data*. New York: Wiley, 1974.

MANTEL, N. Evaluation of survival data and two new rank order statistics arising in its consideration. *Cancer Chemother. Rep.*, Bethesda, v.50, p.163-170, 1966.

MANTEL, N.; HAENSZEL, W. Statistical aspects of the analysis of data from retrospective studies of disease. *J. Nat. Cancer Inst.*, Bethesda, v.22, p.719-798, 1959.

MELO, A. A. S.; LOUZADA-NETO, F. Estimação intervalar para os parâmetros do modelo log-logístico duplo. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.19, p.309-324, 2001.

MILLER, R. G. *Survival analysis*. California: John Wiley & Sons, 1981.

MONTGOMERY, D. C. *Statistical quality control*. New York: Wiley, 1991.

MUDHOLKAR, G. S.; KOLLIA, G. D. Generalized Weibull family: a structural analysis. *Comm. Stat. Theory Methods*, New York, v.23, n.4, p.1149-1171, 1994.

NELSON, W. *Accelerated testing*: statistical models, test plans and data analysis. New York: John Wiley and Sons, 1990.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. *Nonlinear regression.* New York: Wiley, 1989.

Recebido em 30.01.2007.

Aprovado após revisão em 10.07.2007.