

MODELOS MARKOVIANOS, PERCOLAÇÃO E MODELAGEM EM SISTEMAS COM GRANDE NÚMERO DE COMPONENTES

Gauss Moutinho CORDEIRO¹
Cláudio Tadeu CRISTINO²
Emerson Oliveira LIMA³
Sílvio de Barros MELO⁴

- RESUMO: O estudo de confiabilidade envolve a modelagem de sistemas e a aplicação de técnicas de avaliação que, no caso de um pequeno número de componentes, é feito via modelos markovianos que trabalham com as matrizes de transição e sua evolução. O tamanho do sistema, dado pelo número de seus componentes, é uma restrição ao uso de tal ferramenta. Neste artigo, são feitas considerações sobre o modelo markoviano e indica a utilização de modelos de percolação em grafos e matróides como sendo uma outra ferramenta para tal estudo.
- PALAVRAS-CHAVE: Domínio da frequência; grafos; matróides; modelos markovianos; percolação; polinômio de Tutte.

1 Modelos Markovianos

Os modelos markovianos se constituem em uma poderosa técnica, amplamente usada na análise de confiabilidade de sistemas elétricos, sendo útil para modelar desligamentos dos componentes individuais.

Nesses modelos, os componentes elétricos são tipicamente representados como nós (estados) de um grafo com as arestas correspondendo às transições entre os

¹Departamento de Estatística e Informática, Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, CEP: 52171-900, Recife, PE, Brasil. E-mail: *gauss@deinfo.ufrpe.br*

²Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, CEP: 50670-901, Recife, PE, Brasil. E-mail: *ctc@dmat.ufpe.br*

³Departamento de Informática, Universidade de Pernambuco, Recife, PE, Brasil. E-mail: *emathematics@gmail.com*

⁴Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, CEP: 50670-901, Recife, PE, Brasil. E-mail: *sbm@cin.ufpe.br*

estados. Seja λ_{ij} a taxa de transição do estado i para o estado j , que pode corresponder a uma taxa de falha ou de reparo, dependendo de como os estados são definidos.

O método markoviano pode ser usado para calcular probabilidades associadas aos diversos estados no tempo t , ou as probabilidades limites (quando $t \rightarrow \infty$). Na prática, o maior interesse é calcular as probabilidades no equilíbrio estacionário.

Seja um sistema elétrico com n estados. O método markoviano consiste basicamente das seguintes etapas:

1. Construir o grafo de transições entre os estados do sistema.
2. Calcular a matriz $n \times n$ de transições $T = (t_{ij})$ para a qual o elemento t_{ij} de T , para $i \neq j$, corresponde à taxa de transição do estado i para o estado j , ou seja, $t_{ij} = \lambda_{ij}$, enquanto o elemento (i, i) de T é dado por

$$t_{ii} = - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \lambda_{ir},$$

isto é, como a soma (com o sinal negativo) de todas as taxas de transição que saem do estado i , excluindo o próprio estado.

3. As equações de Markov são dadas por

$$\pi T = 0, \tag{1}$$

em que $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ é o vetor de probabilidades limites nos diferentes estados. O sistema (1) tem $n - 1$ equações independentes e adota-se a equação adicional $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$, para calcular a solução π do equilíbrio estacionário. A única dificuldade no cálculo da solução π em (1) é se n for muito grande.

Para resolver o sistema (1) todos os λ_{ij} 's devem ser conhecidos. Na prática, porém, apenas as taxas de reparos são facilmente calculadas e as taxas de falha são decorrentes da metodologia denominada *domínio da frequência* descrita a seguir.

2 Metodologia do domínio da frequência

A metodologia do domínio da frequência é uma técnica para calcular frequências e tempos de duração a partir das probabilidades limites π_i 's e das taxas de transição λ_{ij} 's.

2.1 Frequência de visita a um estado

Sejam S_i e E_i os conjuntos representantes de taxas de transição que saem e entram, respectivamente, no estado i , excluindo a transição de i para i . A frequência de visitas f_i a um estado i é definida com o número esperado de visitas ao estado

i por unidade de tempo, ou seja, os números de transições para o estado i ou transições a partir do estado i por unidade de tempo. Tem-se,

$$f_i = \pi_i \sum_{\lambda_{ij} \in S_i} \lambda_{ij} = \sum_{\lambda_{ji} \in E_i} \pi_j \lambda_{ji}. \quad (2)$$

Resolvendo algebricamente o sistema (1), obtém-se os π 's em relação aos λ 's. Na prática, as freqüências f_i são calculadas empiricamente e, usando (2), obtém-se um sistema de equações que permite determinar as taxas de falha desde que as taxas de reparo sejam conhecidas.

2.2 Freqüência de transição entre dois estados

A freqüência de transição do estado i para o estado j é calculada como $f_{ij} = \pi_i \lambda_{ij}$. Tem-se $f_{ij} = f_{ji}$ se existirem ambas as transições entre os estados i e j .

2.3 Duração média de uma visita

Quando o processo visita o estado i , o sistema permanecerá neste estado por um tempo t_i até que o processo realize uma transição para fora do estado i . Tem-se

$$E(T_i) = \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij} \right)^{-1}. \quad (3)$$

A equação (3) mostra que o tempo esperado de visitas ao estado i é igual ao inverso da soma das taxas de transição do estado i para os demais estados.

Combinando as equações (2) e (3) vem

$$E(T_i) = \frac{\pi_i}{f_i}.$$

Logo, o tempo esperado de permanência num estado i é simplesmente dado pelo quociente entre a probabilidade do processo estar neste estado e a freqüência de visitas f_i a este estado.

2.4 Freqüência de visitas a um conjunto de estados

Na avaliação do risco de um sistema elétrico, utiliza-se, freqüentemente, um conjunto-alvo A de estados para representar uma seqüência de possíveis interrupções e desligamentos de interesse. A probabilidade π_A do processo residir no conjunto A é igual a soma das probabilidades π_i 's para todos os estados de A .

A freqüência de visitas f_A ao conjunto A de interesse é dada por

$$f_A = \sum_{i \in A} f_i - \sum_{i, j \in A} f_{ij},$$

para o qual f_i e f_{ij} são calculados conforme descritos nas seções 2.1 e 2.2.

O tempo esperado de visitas ao conjunto A pode ser obtido, facilmente, de

$$E(T_A) = \left(\sum_{\substack{i \in A \\ j \in \bar{A}}} \lambda_{ij} \right)^{-1},$$

ou seja, é igual ao recíproco da soma das taxas de transição entre estados que pertencem ao conjunto A e estados que não pertencem a A .

O conceito mais importante da metodologia do domínio da frequência é dado pela igualdade

$$\begin{aligned} E(T_A) &= \frac{\pi_A}{f_A}, \text{ ou} \\ \pi_A &= f_A E(T_A) \end{aligned} \tag{4}$$

na qual π_A é a probabilidade do processo estar no conjunto A e f_A e $E(T_A)$ são, respectivamente, a frequência de visitas ao conjunto A e o tempo esperado de permanência neste conjunto. Assim, a relação (4) entre probabilidade, frequência e tempo esperado é geral e não se aplica apenas a um estado. Conforme (4), a probabilidade pode ser fatorada como um produto de frequência e tempo de duração.

A aplicação do modelo markoviano possui um obstáculo, que aparece naturalmente para sistemas reais: o elevado número de componentes que pode tornar inviável a manipulação do sistema.

3 Modelagem por grafos e matróides

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos combinatórios em teoria das matróides, que poderão ser mais bem investigados no livro de J. Oxley (Oxley, 1998).

Seja S um conjunto finito. Tome \mathcal{I} uma família de subconjuntos de S tal que:

- I1.** $\emptyset \in \mathcal{I}$ (ou $\mathcal{I} \neq \emptyset$).
- I2.** Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$.

Neste caso, diz-se que \mathcal{I} é uma *família admissível*. Em adição, se os membros de \mathcal{I} satisfazem

- I3.** Se $I, J \in \mathcal{I}$, com $|I| < |J|$, então existe $e \in J - I$ tal que $I \cup e \in \mathcal{I}$.¹

então o par $M = (S, \mathcal{I})$ é chamado *matróide* com *conjunto-base* S e *família de independentes* \mathcal{I} .

¹Por simplicidade, será usado $I \cup e = I \cup \{e\}$, $I - e = I - \{e\}$, etc.

Um exemplo bem concreto pode ser dado por: seja $G = (V, E)$ um grafo finito. Seja

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : (V, X) \text{ é uma floresta.}\}$$

ou seja, o subgrafo gerado de G cujo conjunto de arestas X é acíclico. Neste caso, é fácil mostrar que $M = (E, \mathcal{I})$ é uma matróide, denotada por $M = M(G)$ e denominada *matróide gráfica* sobre E . Não é difícil ver que toda matróide gráfica é isomorfa a uma matróide cujo grafo correspondente é conexo.

Se $M = (S, \mathcal{I})$ é uma matróide e $D \subseteq S$ não é um independente, diz-se que D é um *dependente*. Os subconjuntos de dependentes minimais de uma matróide M são chamados *circuito* de M . Será denotado por \mathcal{C} o conjunto de circuitos de uma matróide. Um membro de \mathcal{C} com um único elemento é chamado *laço*. Para uma matróide gráfica, um circuito corresponde a um ciclo, ou seja, um caminho fechado sem repetição de vértices.

O conjunto de circuitos de uma matróide satisfaz as propriedades:

C1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

C2. Se C_1 e C_2 são membros de \mathcal{C} e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$.

C3. Se C_1 e C_2 são membros distintos de \mathcal{C} e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe um membro C_3 de \mathcal{C} tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Os independentes maximais são chamados *bases* da matróide, cujo conjunto será denotado por \mathcal{B} .

Proposição 3.1. Sejam B_1 e B_2 base de uma matróide M . Então $|B_1| = |B_2|$.

Prova: Suponha, por absurdo, que $|B_1| < |B_2|$. Pela propriedade (I3) dos independentes, existe $e \in B_2 - B_1$ tal que $B_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Porém isto contradiz a maximalidade de um elemento da base. Um argumento semelhante mostra que não é possível $|B_2| < |B_1|$. Logo todos elementos de \mathcal{B} têm a mesma cardinalidade. ■

Para uma matróide gráfica, as bases desta correspondem ao conjunto de arestas de árvores geradoras do grafo correspondente (considerando a possível conexidade desse grafo).

Proposição 3.2. Se M é uma matróide e \mathcal{B} é a coleção de bases de M então

B1. \mathcal{B} é não-vazio.

B2. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, e $e \in B_1 - B_2$, então existe $f \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - e) \cup f \in \mathcal{B}$.

Prova: A propriedade (B1) segue de (I1). Agora, note que $|B_1 - e| < |B_2|$, pois pela proposição (3.1) $|B_1| = |B_2|$. Portanto, por (I3), existe um elemento $f \in B_2 - (B_1 - e)$ tal que $(B_1 - e) \cup f \in \mathcal{I}$. Evidentemente, $f \in B_2 - B_1$. Além disso, como $(B_1 - e) \cup f$ é independente, ele está contido em um conjunto independente maximal B'_1 . Pela proposição (3.1), novamente, $|B'_1| = |B_1|$ como $|B'_1| = |(B_1 - e) \cup f|$, tem-se

que $B'_1 = (B_1 - e) \cup f$, ou seja $(B_1 - e) \cup f$ é uma base de M . Portanto, \mathcal{B} satisfaz (B2). ■

Seja $M = (S, \mathcal{I})$ uma matróide sobre S e suponha que $X \subseteq S$. Defina $\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$ a restrição dos independentes de M ao subconjunto X . É fácil verificar que $(X, \mathcal{I}|X)$ é uma matróide, chamada a *restrição* de M a X , ou a *deleção de $S - X$ de M* . Isto é denotado por $M|X$ ou $M \setminus (S - X)$.

Como $M|X$ é uma matróide, ela possui uma coleção de bases, cujos elementos têm a mesma cardinalidade. Fica, pois, bem definida a *função posto* de uma matróide ou de um subconjunto de uma matróide como sendo a cardinalidade de um elemento qualquer de sua família de bases. Será denotada por $r_M(X)$, a função posto de X em M , e não havendo confusão, será usado simplesmente $r(X)$.

A função posto possui as seguintes propriedades (ver Oxley, 1998):

- R1.** Se $X \subseteq S$, então $0 \leq r(X) \leq |X|$.
- R2.** Se $X \subseteq Y$, então $r(X) \leq r(Y)$.
- R3.** Para todo par $X, Y \subseteq S$, $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Para finalizar esta seção será definida a dualidade para um matróide. Seja M uma matróide e $\mathcal{B}(M)$ sua família de bases. Se for definido a família $\mathcal{B}^*(M) = \{S - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$, mostra-se que tal família de subconjuntos de M é a família de bases de um matróide sobre S . Tal matróide é chamada *dual* de M e denotada por M^* . Assim, $\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}^*(M)$. Também é imediato ver que $(M^*)^* = M$. Se G^* é o dual geométrico do grafo planar G , então $M(G^*) = M^*(G)$ (ver Oxley, 1998).

As bases de M^* são chamadas *co-bases* de M . Da mesma forma, denominam-se *co-circuitos co-independentes* e *co-laços* de M os circuitos, independentes e laços de M^* , respectivamente.

3.1 O polinômio de Tutte para matróides

Seja M uma matróide definida sobre um conjunto S cuja família de independentes é denotada por \mathcal{I} . Define-se para M a *polinômio do posto*:

$$R(M; x, y) = \sum_{A \subseteq S} x^{r(S) - r(A)} y^{|A| - r(A)}, \quad (5)$$

sendo r é a função posto definida sobre M . Defina, agora:

$$T(M; x, y) = R(M; x - 1, y - 1) \quad (6)$$

Denote ainda para $e \in S$, $M'_e = M|(S - e)$ e $M''_e = M \cdot (S - e)$. Usaremos L e L^* para representar um laço e um co-laço, respectivamente.

Tanto $R(M; x, y)$, quanto $T(M; x, y)$ são tipos especiais de invariantes sobre a classe das matróides (EMA, 1992), chamado invariante de Tutte-Gröthendieck.

Segue um resultado importante devido a Brylawski (1972).

Teorema 3.3. Existe uma única função T (o polinômio de Tutte) da classe de isomorfismos de matróides no anel de polinômios $\mathbb{Z}[x, y]$ tendo as seguintes propriedades:

- (i) $T(L^*; x, y) = x$ e $T(L; x, y) = y$.
- (ii) Se e é um elemento da matróide M e e não é um laço, nem um co-laço, então

$$T(M; x, y) = xT(M'_e; x, y) + yT(M''_e; x, y).$$

- (iii) Se e é um laço de uma matróide M , então $T(M; x, y) = xT(M'_e; x, y)$.
- (iv) Se e é um co-laço de uma matróide M , então $T(M; x, y) = yT(M'_e; x, y)$. \square

3.2 Uma equação para matróide

Teorema 3.4. Existe uma única função real f satisfazendo

- (i) $f(M) = f(N)$, se $M \cong N$.
- (ii) $f(M) = af(M'_e) + bf(M''_e)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
- (iii) $f(M_1 + M_2) = f(M_1)f(M_2)$, e M_1 e M_2 são matróides sobre conjuntos disjuntos.
- (iv) $f(L^*) = x$.
- (v) $f(L) = y$.

Esta função é dada para qualquer matróide M sobre S por

$$f(M) = a^{|S|-r(S)}b^{r(S)}T(M; b^{-1}xa^{-1}y), \quad (7)$$

e T é o polinômio de Tutte de M .

Prova: É fácil verificar que f como definida em (7) satisfaz (i)–(v). A unicidade segue da unicidade do polinômio de Tutte dada pelo teorema (3.3). \blacksquare

Seja M uma matróide sobre um conjunto finito S e suponha que cada elemento de S tem, independentemente de todos os outros elementos, uma probabilidade $q = 1 - p$ de ser deletado de S . O menor da restrição resultante $\omega(M)$ de M é chamada *submatróide aleatória* de M , correspondendo de maneira óbvia a um grafo aleatório quando M é a matróide gráfica do grafo completo. Suponha que $P(p; M)$ seja a probabilidade que $\omega(M)$ tenha o mesmo posto de M . Então desde que e não seja nem um laço, nem um co-laço de M ,

$$P(p; M) = qP(p; M'_e) + pP(p; M''_e) \quad (8)$$

e, para M_1 e M_2 matróides definidas sobre conjuntos disjuntos,

$$P(p; M_1 + M_2) = P(p; M_1)P(p; M_2). \quad (9)$$

Também,

$$P(p, M) = \begin{cases} p, & \text{se } M \text{ é um co-laço,} \\ 1, & \text{se } M \text{ é um laço.} \end{cases} \quad (10)$$

Portanto pelo teorema (3.4),

$$P(p; M) = q^{|S|-r(S)} p^{r(S)} T(M; 1, q^{-1}) \quad (11)$$

Por um argumento semelhante, se $\rho(M; \theta) = \mathcal{E}(\theta^{r(\omega(M))})$ denota a função geradora de probabilidade do posto de uma submatróide aleatória de M , temos que quando e não é nem laço, nem co-laço,

$$\begin{aligned} \rho(M; \theta) &= q\rho(M'_e, \theta) + p\theta\rho(M''_e; \theta), \\ \rho(L^*; \theta) &= q + p\theta, \quad \rho(L; \theta) = 1, \end{aligned}$$

e, daí,

$$\rho(M; \theta) = q^{|S|-r(S)} (p\theta)^{r(S)} T\left(M; \frac{q}{p\theta} + 1, \frac{1}{q}\right). \quad (12)$$

4 O modelo de percolação para clutters

A teoria de percolação clássica foi introduzida por Broadbent e Hammersley (1957) e preocupava-se com o fluxo de líquido através de um tipo de grafos aleatórios. Será definido um modelo de percolação que tem uma maior aplicabilidade que este, mas que claramente contém o modelo clássico como caso particular.

Seja S um conjunto finito e seja $\mathcal{A} = (A_i : i \in I)$ uma família de subconjuntos de S com a propriedade de que para $i \neq j$, $A_i \not\subseteq A_j$. Esta família é chamada *clutter* ou *família Sperner*. Suponha que cada elemento de S independentemente de todos os outros elementos seja pintado de branco com probabilidade p ou de preto com probabilidade $q = 1 - p$. Isto define um espaço de probabilidade Ω de realizações possíveis e tal espaço será chamado *modelo de percolação sobre \mathcal{A}* . O modelo clássico é um caso especial, no qual S é o conjunto de arestas de um grafo finito e \mathcal{A} é alguma coleção de caminhos.

Para dados \mathcal{A} e p , define-se a probabilidade de percolação $P(\mathcal{A}; p)$ como sendo a probabilidade que algum membro de \mathcal{A} tenha todos seus membros pintados de branco. Assim

$$P(\mathcal{A}; p) = \sum p^{|X|} q^{|S-X|}, \quad (13)$$

em que a soma é sobre todos os subconjuntos X de S que contenham algum membro de \mathcal{A} . Logo, se $|S| = n$ e se for denotado por u_k o número de k -subconjuntos de S

que contém algum membro de \mathcal{A} , fica naturalmente definido o *polinômio superior*, $U(\mathcal{A}; z)$, por

$$U(\mathcal{A}, z) = \sum_{k=0}^n u_k z^k. \quad (14)$$

Note que $P(\mathcal{A}; p) = q^n U(\mathcal{A}; p/q)$.

Seja G um grafo conexo finito e tome \mathcal{A} sendo a coleção do conjunto de arestas de árvores geradoras de G . Então $P(\mathcal{A}; p)$ é apenas a probabilidade que um subgrafo aleatório de G seja conexo. Isto claramente é o mesmo que a probabilidade que uma submatróide da matróide gráfica $M(G)$ tenha posto cheio e por (11), tem-se

$$P(\mathcal{A}; p) = q^{|E|-|V|+1} p^{|V|-1} T(M; 1, q^{-1}),$$

aqui E e V representam o conjunto de arestas e vértices de G , respectivamente.

Se \mathcal{A} é um clutter sobre S e T é um subconjunto de S defina

$$\mathcal{A}|T = \{A_i : A_i \in \mathcal{A}, A_i \subseteq T\}$$

$$\mathcal{A}.T = \{\text{conjuntos minimais da forma } A_i \cap T : A_i \in \mathcal{A}\},$$

e se $T = S - e$, escreve-se

$$\mathcal{A}|T = \mathcal{A}'_e, \quad \mathcal{A}.T = \mathcal{A}''_E.$$

A *soma direta* $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ de dois clutters sobre conjuntos disjuntos é a coleção de conjuntos $\{A_1 \cup A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ e } A_2 \in \mathcal{A}_2\}$. A *união* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{A : A \in \mathcal{A}_1 \text{ ou } A \in \mathcal{A}_2\}$.

O *blocker* \mathcal{A}^* de \mathcal{A} é a coleção de conjuntos minimais X tais que $X \cap A_i = \emptyset$, para todo $A_i \in \mathcal{A}$. são resultados conhecidos (ver Edmonds e Fulkerson, 1970): $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ e

$$(\mathcal{A}|T)^* = \mathcal{A}.T, \quad (\mathcal{A}.T)^* = \mathcal{A}|T.$$

Um elemento e de S é chamado *essencial* para \mathcal{A} se e pertence a todo $A_i \in \mathcal{A}$ e é *redundante* se e não pertence a nenhum A_i . É fácil verificar que:

Se e é redundante,

$$P(\mathcal{A}; p) = P(\mathcal{A}'_e; p). \quad (15)$$

Se e é essencial,

$$P(\mathcal{A}; p) = P(\mathcal{A}''_e; p). \quad (16)$$

Se e não é redundante, nem essencial,

$$P(\mathcal{A}; p) = qP(\mathcal{A}'_e; p) + pP(\mathcal{A}''_e; p), \quad (17)$$

$$P(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2; p) = P(\mathcal{A}_1; p)P(\mathcal{A}_2; p). \quad (18)$$

Se $S = \{e\}$, então,

$$P(\mathcal{A}; p) = \begin{cases} p, & \text{se } e \text{ é essencial e } \mathcal{A} \text{ é não-vazio,} \\ 1, & \text{se } e \text{ é redundante e } \mathcal{A} \text{ é não-vazio,} \end{cases} \quad (19)$$

5 Sobre a (não-)extensão do polinômio de Tutte

Olhando para as equações (17) a (19) é natural se perguntar quando a teoria do polinômio de Tutte pode ser estendida para clutters arbitrários. Note primeiramente que sobre o conjunto singleton $S = \{e\}$ existem três clutters, a saber,

$$E = \{\{e\}\}, \quad R = \{\emptyset\}$$

e o clutter vazio. Diz-se que E é o *clutter essencial* e R é o *clutter redundante*. Eles são os únicos, a menos de isomorfismo. Assim se a e b são reais não nulos, pergunta-se se existe uma função $f(\mathcal{A}; x, y)$ de duas variáveis reais x e y definida sobre a classe de todos os clutters finitos não-vazios, tal que as seguintes regras sejam satisfeitas.

Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são clutters isomorfos,

$$f(\mathcal{A}; x, y) = f(\mathcal{B}; x, y). \quad (20)$$

Se e não é essencial, nem redundante para \mathcal{A} , então

$$f(\mathcal{A}; x, y) = af(\mathcal{A}'_e; x, y) + bf(\mathcal{A}''_e; x, y), \quad (21)$$

$$f(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2; x, y) = f(\mathcal{A}_1; x, y)f(\mathcal{A}_2; x, y), \quad (22)$$

$$f(E; x, y) = x, \quad f(R; x, y) = y. \quad (23)$$

Teorema 5.1. Se a e b são números reais não nulos fixos, então uma função $f(\mathcal{A}; x, y)$ satisfazendo (20) a (23) é unicamente definida se, e somente se, \mathcal{A} é a família de bases de uma matróide.

Prova: Para (22) e (23) é claro que

$$f(\mathcal{A}; x, y) = \begin{cases} xf(\mathcal{A}'_e; x, y), & \text{se } e \text{ é redundante,} \\ yf(\mathcal{A}''_e; x, y), & \text{se } e \text{ é essencial.} \end{cases} \quad (24)$$

Usaremos indução sobre o tamanho n do conjunto-base S . Seja \mathcal{S}_n a coleção de clutters sobre os conjuntos de tamanho n . O teorema é verdadeiro quando $n = 1$. Suponha que também seja verdadeiro para todo $k < n$. Seja $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_n$ e suponha que f seja unicamente definida para \mathcal{A} . Se e é essencial para \mathcal{A} , então por (24),

$$f(\mathcal{A}; x, y) = xf(\mathcal{A}'_e; x, y)$$

e como f é unicamente definida sobre \mathcal{A} , então deve ser unicamente definida sobre \mathcal{A}'_e e, portanto, pela hipótese de indução \mathcal{A}'_e é o conjunto de bases de uma matróide sobre $S - e$. Daí, \mathcal{A} é uma extensão livre de um único elemento de \mathcal{A}'_e . Um argumento semelhante produz o resultado, quando \mathcal{A} tem um elemento redundante. Logo, pode-se supor que cada elemento de S não é nem redundante, nem essencial para \mathcal{A} .

Sejam A_1 e A_2 membros distintos de A e seja $e \in A_1 - A_2$. Se $A_1 \cup A_2 \neq S$, seja $h \in S - (A_1 \cup A_2)$. Então,

$$f(\mathcal{A}; x, y) = af(\mathcal{A}'_h; x, y) + bf(\mathcal{A}''_h; x, y).$$

Como $f(\mathcal{A}; x, y)$ é unicamente definida, então também será $f(\mathcal{A}'_h; x, y)$ e como $\mathcal{A}'_h \in \mathcal{S}_{n-1}$, ele será o conjunto de bases de uma matróide sobre $S - h$. Mas $A_1, A_2 \in \mathcal{A}'_h$, daí existe $g \in A_2 - A_1$ tal que $(A_2 - g) \cup e \in \mathcal{A}'_h$ e, portanto, está em \mathcal{A} .

Se $A_1 \cup A_2 = S$ e $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, escolhe-se $h \in A_1 \cap A_2$ e como $f(\mathcal{A}; x, y)$ é unicamente definida, $f'(\mathcal{A}''_h; x, y)$ deve ser unicamente definida. Mas $\mathcal{A}''_h \in \mathcal{S}_{n-1}$ e é, pela hipótese de indução, o conjunto de bases de uma matróide sobre $S - h$. Como $A_1 - h, A_2 - h$ são membros de \mathcal{A}''_h , existe $g \in (A_2 - h) - (A_1 - h)$, tal que $(A_2 - \{h, g\}) \cup e \in \mathcal{A}''_h$. Daí, ou $(A_2 - g) \cup e \in \mathcal{A}$, ou $(A_2 - \{h, g\}) \cup e \in \mathcal{A}$. Suponha que o último caso seja válido. Então $e \in ((A_2 - \{h, g\}) \cup e) \cap A_1$, tal que $A_1 - e$ e $A_2 - \{h, g\} \in \mathcal{A}''_e$. Portanto, pela hipótese de indução com \mathcal{A}''_e é o conjunto de bases de uma matróide, $|A_1 - e| = |A_2 - \{h, g\}|$, isto é, $|A_2| = |A_1| + 1$. Mas como $A_1 - h$ e $A_2 - h \in \mathcal{A}''_e$, isto é uma contradição e, daí $(A_2 - g) \cup e \in \mathcal{A}$.

Finalmente, suponha que $A_1 \cup A_2 = S$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Se $u \in A_1$, então $A_1 - u \in \mathcal{A}'_u$ e existe $A'_2 \subseteq A_2$, tal que $A'_2 \in \mathcal{A}''_u$. E

- (i) $A'_2 = A_2$ e $|A_1| = |A_2| + 1$; ou
- (ii) $A'_2 \neq A_2$ e $A'_2 \cup u \in \mathcal{A}$ e $|A_2| > |A'_2| = |A_1| - 1$.

Tome $v \in A_2$. Pelo mesmo argumento, existe $A'_1 \subseteq A_1$, tal que $A'_1 \in \mathcal{A}''_v$ e $|A'_1| = |A_2| - 1$, assim, ou

- (iii) $A'_1 = A_1$ e, daí $|A_1| = |A_2| - 1$; ou
- (iv) $A'_1 \neq A_1$ e $A'_1 \cup v \in \mathcal{A}$ e $|A_1| > |A'_1| = |A_2| - 1$.

Primeiramente, note que (i) e (iii) não podem ocorrer simultaneamente. Suponha que (i) e (iv) sejam válidos. Se $A'_1 = \emptyset$, então $A_2 = \{v\}$ e, por (i), $|A_1| + 2$. Como $A_1 \cup A_2 = S$, forçosamente $S = \{u, v, w\}$ e $\mathcal{A} = \{\{v\}, \{u, w\}\}$ e é fácil verificar que f não é unicamente definida para este clutter. Assim podemos considerar $A'_1 \neq \emptyset$. Escolha $c \in A'_1$. Então \mathcal{A}''_c é o conjunto de bases de uma matróide sobre $S - c$. Agora, como $(A'_1 \cup c) - c$ e $A_1 - c \in \mathcal{A}''_c$, temos que $|(A'_1 \cup c) - c| = |A_1 - c|$. Daí $|A'_1| = |A_1| - 1$. Então, por (iv), $|A_1| = |A_2|$, contrariando (i).

Se (ii) e (iii) forem válidas, então trocando os papéis de A_1 e A_2 , A'_1 e A'_2 e u e v , e pelo mesmo argumento anterior, tem-se uma contradição.

Portanto, (ii) e (iv) são afirmações válidas e, segue que $|A_1| = |A_2|$. Segue que $A'_2 = A_2 - z$, para algum $z \in A_2$ e, por conseguinte, $(A_2 - z) \cup u \in \mathcal{A}$. Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $z \in A_2 - A_1$. Daí, fazendo $u = e$ e $g = z$, obtemos o resultado desejado. ■

Suponha, agora, que sejam trocadas as condições (21)-(23) por suas condições duais. Neste caso, (21) e (22) tornam-se, para $\{e\} \notin \mathcal{A}$ e e nem redundante, nem

essencial,

$$f(\mathcal{A}; x, y) = af(\mathcal{A}/e; x, y) + bf(\mathcal{A} - e; x, y), \quad (21^*)$$

$$f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2; x, y) = f(\mathcal{A}_1; x, y)f(\mathcal{A}_2; x, y) \quad (22^*)$$

Como o dual do clutter essencial E é ele próprio, mas o dual do clutter redundante R é o clutter vazio, Z , o dual do teorema (5.1) tem a seguinte forma:

Teorema 5.2. Se a e b são números reais não-nulos fixos, então a função $f(\mathcal{A}; x, y)$ satisfazendo (20), (21*) e (22*) e

$$f(E; x, y) = x \qquad f(Z; x, y) = y \quad (23^*)$$

é unicamente definida para um clutter finito $\mathcal{A} \neq \emptyset$ se, e somente se, \mathcal{A} é a coleção de circuitos de uma matróide.

Prova: Segue diretamente do fato que o blocker da coleção de bases de uma matróide é o conjunto de circuitos da matróide dual. ■

6 O modelo de percolação para grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário. Cada aresta de G pode estar em dois estados diferentes, que serão denotados por u e d . Para cada $e \in E(G)$, consideram-se dois eventos:

- “ e está no estado u ” = “ e é uma u -aresta,” ou
- “ e está no estado d ” = “ e é uma d -aresta”.

Esses eventos são considerados complementares, ou seja, um é a negação do outro. Aqui serão denotados por u_e e d_e , respectivamente.

A partir desses eventos, chamados *eventos-aresta*, são construídos eventos mais detalhados, tomando-se produtos (lógicos). Tais eventos são chamados *eventos-produto*, e são denotados por produtos algébricos. Assim, $u_e d_{\tilde{e}}$ é o evento “ e é uma u -aresta e \tilde{e} é uma d -aresta.” Se $E', E'' \subseteq E$, estende-se o conceito para o produto geral $u^{E'} d^{E''}$.

Agora, $u_e d_e = 0 \equiv$ “o evento falso” e, escreve-se $u^\emptyset = d^\emptyset = 1 \equiv$ “o evento verdade”.

Eventos mais detalhados são da forma $u^C d^D$ com $C \cup D = E$ e $C \cap D = \emptyset$. Estes são chamados *eventos elementares*. O conjunto de todos os eventos elementares é chamado *espaço de eventos*, que é denotado por Ω . A soma (lógica) de dois eventos a e a' é denotada por $a + a'$. Obviamente, $u_e + d_e = 1$. Dois eventos a e a' são chamados *incompatíveis* ou *disjuntos* se $aa' = 0$.

Eventos formados por somas finitas de eventos-produto finitos são chamados *eventos locais*. Os eventos formados pelo fecho da coleção de eventos locais sobre somas enumeráveis e produto enumeráveis são chamados *eventos aleatórios*.

Eventos mais gerais são obtidos tomando-se o fecho da coleção de eventos aleatórios sobre produtos e somas arbitrárias. Considerando-se a completa distributividade, cada evento pode ser escrito unicamente como uma soma de eventos elementares, logo existe uma correspondência 1-a-1 entre eventos e subconjuntos do espaço de eventos.

Denota-se por P a *probabilidade* de eventos locais e que é definida por:

P1. $P(0) = 0$ e $P(1) = 1$.

P2. $P(u_e) = p_e$ e $P(d_e) = q_e = 1 - p_e$, para cada evento-aresta, sendo $0 \leq p_e \leq 1$.

P3. Para produtos finitos $u^{E'} d^{E''}$ com $E' \cap E'' = \emptyset$, $P(u^{E'} d^{E''}) = p^{E'} q^{E''}$, ou seja, os eventos são considerados independentes.

P4. Para somas finitas de eventos-produto finitos tem-se:

$$P\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n P(a_i).$$

Note que usando a correspondência entre eventos e subconjunto de espaço de eventos, tem-se que a probabilidade sobre eventos locais corresponde a uma medida normada sobre a álgebra dos conjuntos cilíndricos, correspondentes a eventos locais.

Uma *variável local* é uma função real f sobre o espaço de eventos Ω que assume somente um número finito de valores diferentes f_i tais que para cada i , a soma de todos os eventos elementares com $f(u^C d^D; G) = f_i$ é um evento local a_i . Denota-se $f(u^C d^D; G) = f(C)$.

O *valor de expectativa* com respeito a P de uma variável local f é definida sendo:

$$\langle f \rangle = \sum_{i=1}^n f_i P(a_i) = \langle f; G, P \rangle.$$

As variáveis locais correspondem às funções simples com respeito à álgebra de conjuntos cilíndricos.

O valor de expectativa corresponde à integral com respeito a P de uma função simples. As funções obtidas pelo fecho da coleção de variáveis locais não-negativas sobre o supremo e ínfimo de coleções enumeráveis (admitindo-se o valor $+\infty$) são chamadas *variáveis aleatórias não-negativas*. A diferença entre duas variáveis aleatórias não-negativas, ambas não nulas, simultaneamente, é chamada *variável aleatória*. Os termos desta diferença são denominados a parte positiva e negativa da variável aleatória, respectivamente.

Usando o procedimento de extensão da medida sobre semi-anéis, juntamente como esquema de integral de Daniell (Shilov e Gurevich, 1978), pode-se, dada uma probabilidade P sobre eventos locais com o valor de expectativa correspondente $\langle f \rangle$, estende-se de maneira única tais definições a uma probabilidade sobre variáveis aleatórias (Zaanen, 1958) para as quais são usadas novamente a notação $P(a)$ e $\langle a \rangle$. Se o valor de expectativa de uma variável aleatória é finito, esta é dita ser *somável*.

Se ambos os valores da expectativa da variável aleatória não forem $+\infty$, ela é dita ser *integrável*. No caos especial que o grafo é finito o valor de expectativa de uma variável aleatória reduz-se à seguinte soma:

$$\langle f \rangle = \sum_{C \subseteq E} f(C) p^C q^D,$$

e $D = E - C$. Em geral, escreve-se

$$\langle f \rangle = \int_{C \subseteq E} f(C) dP(C).$$

Uma classe particular de variáveis aleatórias (não-negativas) é formulada pelo *indicador* de um evento a , que é a função que toma o valor 1, se a ocorre e o valor 0, se a não ocorre.

Um grafo enumerável G , juntamente com a probabilidade P como descrita anteriormente é chamado *modelo de percolação* e é denotada por (G, P) . A probabilidade P é completamente caracterizada por uma aplicação p de E no intervalo real $[0, 1]$ tal que $p(e) = p_e = P(c_e)$. Usualmente, diz-se que a medida P é gerada pela aplicação p .

Seja f uma variável aleatória definida sobre o espaço de eventos de um grafo G . Seja E' e E'' subconjuntos disjuntos de $E(G)$. Denote por $G_{E''}^{E'}$, o menor obtido de G pela contração das arestas de E' e pela deleção das arestas de E'' . Defina a função \tilde{f} sobre o espaço de eventos de $G_{E''}^{E'}$ por:

$$\tilde{f}(C; G_{E''}^{E'}) = f(G + E'; G), \text{ para todo } C \subseteq E(G_{E''}^{E'}) = E(G) - E' - E''.$$

Por definição, \tilde{f} é uma variável aleatória e se f é somável, \tilde{f} também é somável.

Teorema 6.1. Seja (G, P) um modelo de percolação e f uma variável aleatória integrável. Então para todas arestas $e \in E(G)$:

$$\langle f; G \rangle = p_e \langle \tilde{f}; G_e' \rangle + q_e \langle \tilde{f}; G_e' \rangle \quad (25)$$

Prova: Pela definição, $\langle f \rangle = \int f(C) dP(C)$. Pela construção, P pode ser decomposta como uma medida-produto, $P = P^E = P^e \times P^{E-e}$, no qual o índice superior especifica o domínio de P . Se f é somável, pode-se aplicar o teorema de Fubini. Se f é não-negativa, ela é o limite de uma seqüência monótona não-decrescente de variáveis aleatórias somáveis e, novamente, pode-se usar o teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{C \subseteq E} f(C) dP^{E-e}(C) &= \int_{C' \subseteq \{e\}} dP^e(C') \int_{C'' \subseteq E-e} dP^{E-e}(C'') f(C' + C''); G \\ &= p_e \int_{C \subseteq E-e} dP^{E-e}(C) f(C + e; G) \\ &\quad + q_e \int_{C \subseteq E-e} dP^{E-e}(C) f(C; G) \end{aligned} \quad (26)$$

Pela definição da extensão de f a $G'_e = G - e$ e $G''_e = G/e$, isto é igual a

$$\begin{aligned} p_e \int_{C \subseteq E-e} dP(C) \tilde{f}(C; G''_e) + q_e \int_{C \subseteq E-e} dP(C) \tilde{f}(C; G'_e) \\ = p_e \langle \tilde{f}; G''_e \rangle + q_e \langle \tilde{f}; G'_e \rangle \end{aligned} \quad (27)$$

Finalmente, se f é integrável, mas não necessariamente somável ou não negativa, então ou a parte positiva f^+ de f , ou a parte negativa f^- de f é somável. Sem perda de generalidade, seja f^- somável. Pode-se usar o teorema de Fubini sobre as partes positiva e negativa de f e coletar os termos com p_e e q_e .

$$\begin{aligned} \langle f; G \rangle &= \langle f^+; G \rangle - \langle f^-; G \rangle \\ &= \left[p_e \langle \tilde{f}^+; G''_e \rangle + q_e \langle \tilde{f}^+; G'_e \rangle \right] - \left[p_e \langle \tilde{f}^-; G''_e \rangle + q_e \langle \tilde{f}^-; G'_e \rangle \right] \\ &= p_e \left[\langle \tilde{f}^+; G''_e \rangle - \langle \tilde{f}^-; G''_e \rangle \right] + q_e \left[\langle \tilde{f}^+; G'_e \rangle - \langle \tilde{f}^-; G'_e \rangle \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Como $\tilde{f}^+ = \tilde{f}^+$ e $\tilde{f}^- = \tilde{f}^-$, então:

$$p_e \left[\langle \tilde{f}^+; G''_e \rangle - \langle \tilde{f}^-; G''_e \rangle \right] + q_e \left[\langle \tilde{f}^+; G'_e \rangle - \langle \tilde{f}^-; G'_e \rangle \right] \equiv p_e \langle \tilde{f}; G''_e \rangle + q_e \langle \tilde{f}; G'_e \rangle.$$

■

Corolário 6.2. O valor de expectativa de uma variável aleatória f é uma função linear de p_e com os valores de fronteira finitos:

$$\langle f; G, p_e = 0 \rangle = \langle \tilde{f}; G''_e \rangle \quad \text{e} \quad \langle f; G, p_e = 1 \rangle = \langle \tilde{f}; G'_e \rangle.$$

□

6.1 Um caso prático

Seja $N = (V, E, r)$ uma rede elétrica, ou seja, um grafo $G = (V, E)$, juntamente com uma função $r : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, onde $r_e = r(e)$ é a *resistência* da aresta $e \in E(G)$. Se existe uma *diferença de potencial* $p_e = p_{ab}$ em uma aresta $e = [a, b]$ de a para b , então uma *corrente elétrica* segue a Lei de Ohm,

$$\omega_e = \frac{p_e}{r_e},$$

e flui de a para b . A *Lei de Potencial de Kirchhoff* postula que a soma das diferenças de potencial ao redor de qualquer ciclo é nula. A *Lei de Corrente de Kirchhoff* afirma que a corrente total em um vértice também é zero.

Um potencial absoluto V_x é tal que $p_{xy} = V_x - V_y$. Se $(p_{xy})_{[x,y] \in E(G)}$ é uma distribuição de diferenças de potencial satisfazendo a Lei de Potencial de Kirchhoff e sendo $ux_1x_2 \cdots x_kv$ e $uy_1y_2 \cdots y_lv$ dois uv -caminhos em G , então

$$p_{ux_1} + p_{x_1x_2} + \cdots + p_{x_{k-1}x_k} + p_{x_kv} = p_{uy_1} + p_{y_1y_2} + \cdots + p_{y_{l-1}y_l} + p_{y_lv} \quad (29)$$

e para definir os potenciais absolutos, toma-se um vértice de referência, por exemplo v , e faz-se $V_v = 0$. Daí para cada vértice $u \in V(G)$ tem-se

$$V_u = p_{ux_1} + p_{x_1x_2} + \cdots + p_{x_{k-1}x_k} + p_{x_kv} \quad (30)$$

para qualquer uv -caminho.

A idéia agora é descrever o fluxo de corrente numa rede elétrica que está sujeita a uma determinada configuração (ligações entre vértices). O modelo de percolação para grafos pode ser aplicado a tal rede, o que indicaria uma nova abordagem ao estudo de funções de curto-circuito de redes, que são distúrbios catastróficos sobre uma rede elétrica N .

Se definirmos uma função de risco (Probabilidade de Falha \times Custo) sobre a rede elétrica, o modelo markoviano de descrição de estados é uma forte ferramenta na descrição de cenários futuros. Veja o exemplo aplicado aos geradores da rede elétrica da CHESF delineado em Cordeiro, Lins e Cristino (no prelo), onde são calculadas as probabilidades de um gerador i apresentar r vezes a falha do tipo j no tempo t , em que $i = 1, 2, \dots, 54$ e $j = 1, 2, \dots, 43$.

Considerações finais

Os modelos de percolação aqui apresentados, indicam uma importante técnica no estudo de confiabilidade de sistemas que possam ser formulados com reticulados (lattices), redes, ou grafos. No caso dos dois últimos, foi visto como generalizar para estudo de problemas em matróide.

No caso apresentado na seção 4, todo elemento e da matróide $M(E)$ possui, independentemente dos outros elementos da matróide, probabilidade $p = 1 - q$ de ser deletado de M , o que resulta para $F \subseteq E$,

$$P(F) = \prod_{e \in F} p_i \prod_{e \notin F} q_i.$$

Porém o interesse principal é o estudo de modelos onde cada elemento possui uma probabilidade distinta dos outros elementos. Mais precisamente, dado um modelo para o qual se deseja computar uma rede de confiabilidade, o que se deseja é, dados dois vértices distintos de grafo G , determinar a probabilidade que um subgrafo aleatório de G conter um caminho unindo tais vértices.

Seja G um grafo e $\{s, t\} \subset V(G)$. Seja \tilde{G} o grafo obtido de G adicionando-se uma nova aresta-base d cujos extremos são s e t . Seja \mathcal{D} a família de subconjuntos A de $E(G)$ para os quais $A \cup d$ possua um ciclo de \tilde{G} contendo d .

Proposição 6.3. Seja M uma matróide e seja $M(E \dot{\cup} d)$ a matróide obtida de M considerando-se um novo elemento d . Considere que todo elemento de E tenha, independentemente de todos os outros elementos, a probabilidade $1 - p$ de ser deletado de M , enquanto o elemento d tem probabilidade 0 de ser deletado. Então a probabilidade que em uma submatróide aleatória $\omega(M)$ de M , o elemento d não seja um co-laço é dado por:

$$P(\mathcal{D}) = p^{r(M)} q^{|E|-r(M)-1} g(1/p, 1/q) \quad e \quad (31)$$

$$P(\mathcal{D}) = 1 - p^{r(M)-1} q^{|E|-r(M)} f(1/p, 1/q). \quad (32)$$

e $\tilde{x}f(x, y) + \tilde{y}g(x, y) = T_P(M_d(E \dot{\cup} d); \tilde{x}, x, \tilde{y}, y)$. \square

O polinômio T_P apresentado na proposição acima, é chamado *polinômio de Tutte dirigido*, que é uma generalização do polinômio de Tutte para a matróide sobre $E \dot{\cup} d$ com d é um elemento distinto daqueles de E (ver EMA, 1992), proposição 6.2.19).

Finalmente, se $M = M_d(E \dot{\cup} d)$ então é fácil mostrar que

$$P(\mathcal{D}(M)) = \sum_{i=0}^{|E|} a_i p^i q^{|E|-i},$$

ou seja $P(\mathcal{D}(M))$ é um polinômio homogêneo em p e q . Os coeficientes a_i são iguais ao número de subconjuntos A de E com i elementos para os quais d não é um co-laço de $M_d(A \dot{\cup} d)$.

Agora,

Proposição 6.4. Seja $q(M) = T(M; 1/p, 1/q)$, com $p + q = 1$ e seja d um elemento de M que não seja nem um laço, nem um co-laço. Então:

- (i) $q(M/d) = \frac{p}{q} q(M - d) = f(M; 1/p, 1/q) + \frac{p}{q} g(M; 1/p, 1/q)$.
- (ii) Ambos $q(M - d)$ e $q(M/d)$ são independentes do corte de $M - d$ determinado por d em M . \square

Algumas referências recentes sobre a abordagem teórica de modelos markovianos, de percolação e modelagem de sistemas com grande número de componentes podem ser encontradas em Elgerd (1986), Grainger e Stevenson (1994), Monticelli e Garcia (1999), Stevenson Jr. (1986) e Wood e Wollenberg (1996). A metodologia descrita nas seções 1 e 2 foi aplicada aos geradores da rede elétrica da CHESF como pode ser visto em Cordeiro, Lins e Cristino (2006).

Agradecimentos

Esta pesquisa é suportada financeiramente pela CHESF - Companhia Hidro Elétrica do São Francisco e ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica.

CORDEIRO, G. M.; CRISTINO, C. T.; LIMA, E. O.; MELO, S. B. Markovian models, percolation and modeling of systems with large number of components. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.25, n.1, p.99-116, 2007.

- **ABSTRACT:** *Reliability studies involve the modeling of systems and the application of evaluation techniques that, in the case of a small number of components, are made via Markovian models that work with the matrices of transition and their evolution. The size of the system, given for the number of its components, is a restriction to the use of such tool. In this article, considerations will be made about the Markovian model and about how it indicates the use of models of percolating in graphs and matroids as being another tool for such study.*
- **KEYWORDS:** *Domain frequency; graphs; matroids; Markovian models; percolation; Tutte polynomial.*

References

- BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, London, v.53, p.629-641, 1957.
- BRYLAWSKI, T. A decomposition for combinatorial geometries. *Trans. Am. Math. Soc.*, Providence, v.171, p.235-282, 1972.
- ENCYCLOPEDIA of mathematics and its applications. *Matroid applications*. Cambridge: Neil White, Cambridge University Press, 1992.
- EDMONDS, J.; FULKERSON, D. R. Bottleneck extrema. *J. Comb. Theory*, New York, v.8, p.299-306, 1970.
- ELGERD, O. L. *Electric energy systems theory*. McGraw Hill Book, 1986.
- CORDEIRO, G. M.; LINS, S.; CRISTINO, C. T. Confiabilidade de sistemas e avaliação probabilística de riscos. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo (no prelo).
- GRAINGER, J. J.; STEVENSON, W. D. *Power system analysis*. McGraw Hill, 1994.
- MONTICELLI, A. J.; GARCIA, A. V. *Introdução a sistemas de energia elétrica*. Campinas: Unicamp, 1999.
- OXLEY, J. *Matroid theory*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- SHILOV, G. E.; GUREVICH, B. L. *Integral, measure, and derivative: a unified approach*. Dover Publications, 1978.
- STEVENSON JR., W. D. *Elementos de análise de sistemas de potência*. 2.ed. McGraw Hill do Brasil, 1986.
- WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. *Power generation, operation, and control*. 2.ed. John Wiley and Sons, 1996.
- ZAANEN, A. C. *An introduction to the theory of integration*. Amsterdam: North-Holland Pub., 1958.

Recebido em 01.01.2005.

Aprovado após revisão em 01.01.2005.