

OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DA ÁREA DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS DOS ELEMENTOS COMPONENTES DE ESTRUTURAS PLANAS DO TIPO TRELIÇA

André Luis CHRISTOFORO¹
Suzinei Aparecida Siqueira MARCONATO²
Renata Zotin Gomes de OLIVEIRA²

- RESUMO: Na engenharia civil, e, em particular, na construção civil, as estruturas compostas por elementos de barra, ou elementos reticulados, são dimensionadas para resistirem à ação de forças atuantes e, restritas a pequenos deslocamentos, de maneira que a escolha da área da seção transversal mais adequada para os seus elementos estruturais componentes seja calculada por intermédio de uma metodologia baseada em tentativa e erro. Este trabalho tem como objetivo, apresentar uma metodologia de cálculo utilizada na determinação do valor ótimo das áreas das seções transversais para os elementos estruturais componentes de estruturas planas do tipo treliça, por intermédio do programa Aotm, desenvolvido nos fundamentos do Método dos Elementos Finitos aliado ao Método dos Mínimos Quadrados. Um exemplo de estrutura plana do tipo treliça é avaliado pelo programa Aotm de maneira a se constatar a sua eficiência.
- PALAVRAS-CHAVE: Estruturas planas do tipo treliça; método dos elementos finitos; método dos mínimos quadrados.

1 Introdução

A Engenharia Civil, e em particular, a construção civil, é a área da engenharia responsável pela elaboração e dimensionamento das mais diversificadas formas de concepção estrutural, tais como pontes, edificações, estruturas de cobertura etc.

As estruturas de cobertura são geralmente classificadas como sendo do tipo treliça, assim como ilustra a Figura 1. As estruturas do tipo treliça são amplamente utilizadas na construção civil, projetadas de maneira em que as mesmas estejam restritas a pequenos deslocamentos, e que, para tais cálculos, as áreas das seções transversais são *ajustadas* por intermédio de uma metodologia baseada em tentativa e erro, dessa forma, o usuário de programas comerciais de análise estrutural tais como ANSYS, SAP, NASTRAN entre outros, avalia o desempenho mecânico da estrutura variando-se as dimensões das seções transversais dos seus elementos componentes de maneira em que a mesma atinja a configuração de deslocamentos desejada.

¹ Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo – USP, Caixa Postal 359, CEP: 13566-590, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: achristo@sc.usp.br

² Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus Rio Claro, Caixa Postal 178, CEP: 13506-700, Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: sasmarc@rc.unesp.br / rzotin@rc.unesp.br

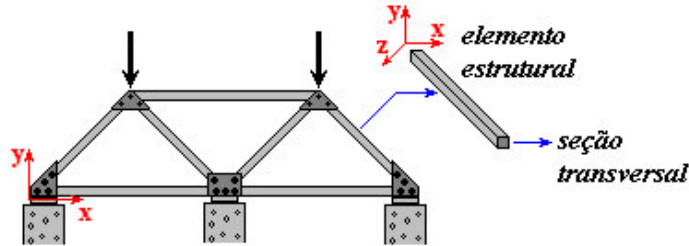


Figura 1 - Estrutura do tipo treliça.

Este trabalho tem como objetivo, apresentar uma metodologia de cálculo, e mais especificamente, um software, utilizado para obter as áreas das seções transversais dos elementos estruturais que mais se adequam a um determinado projeto de estruturas planas do tipo treliça. Este software está fundamentado no Método dos Elementos Finitos aliado ao Método dos Mínimos Quadrados, de maneira que os valores de área das seções transversais dos elementos estruturais calculados pelo programa são tomados como valores ótimos, ou seja, são os que mais se adequam a estrutura em questão.

2 Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) mostra-se como uma excelente ferramenta de cálculo utilizada para analisar o comportamento dos materiais empregados em projetos estruturais, assim como o de avaliar o desempenho mecânico dessas estruturas.

Historicamente, o MEF surgiu em 1955, como evolução da análise matricial de modelos reticulados, motivado pelo advento do computador e elaborado com o intuito de se projetar estruturas de modelos contínuos.

O MEF pode ser considerado como uma técnica de gerar funções de aproximação, que podem ser utilizadas para interpolar deslocamentos, esforços, tensões e deformações ao longo do domínio do elemento.

Para a resolução de problemas estruturais segundo o MEF, as funções de forma podem ser aplicadas diretamente à sua equação diferencial (Resíduos Ponderados) ou a princípios energéticos, tais como o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

O deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental, obtido por intermédio da resolução de um sistema de equações lineares, assim como expressa a equação 1,

$$[K]\{U\}=\{F\} \quad (1)$$

em que:

$[K]$ - matriz de rigidez da estrutura;

$\{U\}$ - vetor dos deslocamentos nodais da estrutura;

$\{F\}$ - vetor das forças equivalentes nodais da estrutura.

A sua construção fica em função da disposição da malha, e conseqüentemente dos nós dos elementos finitos na estrutura, como pode ser visto na Figura 2.

Com relação ao emprego do M.E.F. na engenharia de estruturas, alguns trabalhos podem ser citados tais como o de Góes (2004), Mascia (1991), Cheung (2003), Parrine *et al.* (2002) entre outros.

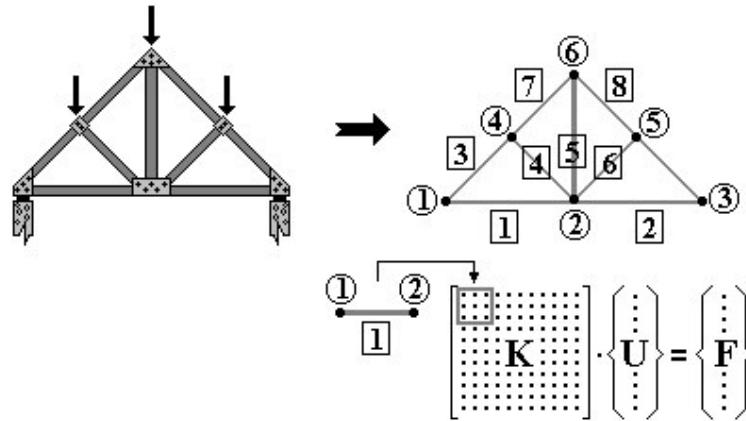


Figura 2 - Exemplo de discretização de uma malha de elementos finitos em uma estrutura do tipo treliça.

3 Método dos mínimos quadrados

Em 1809, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou um artigo demonstrando que a melhor maneira de se determinar um parâmetro desconhecido de uma equação de condições é minimizando-se a soma dos quadrados dos resíduos, mais tarde chamado de Mínimos Quadrados por Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Em abril de 1810, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) apresenta no *memoir* da Academia de Paris, a generalização a problemas com vários parâmetros desconhecidos.

O problema de Mínimos Quadrados consiste em minimizar uma função f , chamada função objetivo, dada por $f(x) = \|V(x)\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, em que V é a função residual.

A função objetivo utilizada para o cálculo do valor ótimo da área das seções transversais para os elementos estruturais está fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados.

4 Método de Newton

A busca pelo valor ótimo da função objetivo (minimização) é realizada mediante a aplicação do Método de Newton, que está fundamentado no desenvolvimento da função f em série de Taylor em torno de um ponto x^k .

O Método de Newton possui várias versões, diferenciando-se apenas na forma de aproximação da função em torno de um ponto, sendo a linear a mais utilizada. A Figura 3 ilustra a busca pelo valor de mínimo da função quadrática g segundo o Método de Newton com aproximação linear, por intermédio da equação (2).

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g(x^k)}{g'(x^k)}, \quad g'(x^k) \neq 0 \quad (2)$$

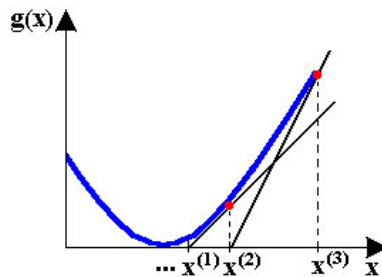


Figura 3 - Aproximação linear pelo Método de Newton.

Neste trabalho, optou-se por utilizar o Método de Newton com aproximação quadrática q , na busca pela solução ótima do problema, assim como encontrado no trabalho de Aguiar (2004), em virtude da função objetivo estar fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados (equação 24) e, sendo assim, a convergência para a solução ótima do problema é obtida em uma única iteração. A Figura 4 ilustra uma aproximação quadrática para a função g no caso de x ser uma variável real.

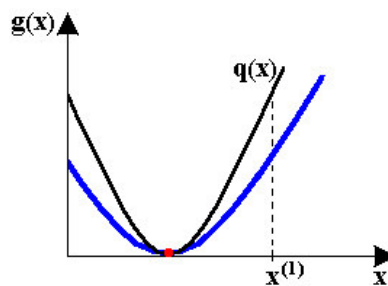


Figura 4 - Aproximação quadrática pelo método de Newton.

A aproximação de Taylor para uma função quadrática é expressa por:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^t \nabla^2 f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = q(\mathbf{x}) \quad (3)$$

onde f tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas com $\nabla f(\mathbf{x}^k) \neq 0$.

O ponto \mathbf{x}^{k+1} é determinado pelo mínimo de q .

Determina-se primeiramente o gradiente da função q :

$$\nabla q(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k), \text{ onde } \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \text{ é o hessiano de } f \quad (4)$$

Igualando-se o gradiente da função a zero, tem-se:

$$\nabla q(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla^2 f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = -\nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (5)$$

Multiplicando-se a equação (5) por $[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1}$, tem-se:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^k = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (6)$$

onde, a solução de $\nabla q(\mathbf{x}) = 0$ é dada por:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^k = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (7)$$

A equação (7) pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{d}_k, \text{ onde } \mathbf{d}_k = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (8)$$

Na prática faz-se:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (9)$$

em que o passo α_k é determinado de maneira a satisfazer $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) < f(\mathbf{x}^k)$

Com relação à aplicação e ao desenvolvimento das técnicas de otimização, alguns trabalhos podem ser citados tais como os de Alvarenga e Antunes (1994), Soares e El Debs (1997), Rigo (1999), Grañadrmoond e Lusem (2004), Humes et al. (2004), Mascarenhas (2004), Lavor e Maculan (2004) Solodov (2004), entre outros.

5 Formulação do elemento finito segundo o princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Neste trabalho, a formulação do elemento finito será desenvolvida segundo a aplicação do MEF no PTV, que segundo esta metodologia, o conhecimento das equações diferenciais oriundas dos problemas de barras de treliça tornam-se desnecessários.

Pela Figura 5 a seguir, o PTV pode ser expresso como:

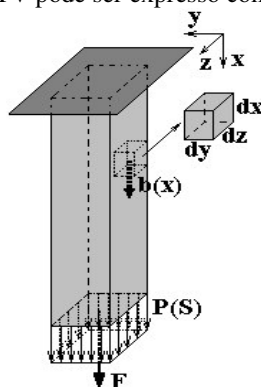


Figura 5 - Barra de treliça no espaço.

$$\Delta_v \cdot F + \int_V \Delta_v \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV + \int_S \Delta_v \cdot \mathbf{P}(S) dS = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})_v \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (10)$$

onde:

dV - volume do elemento de dimensões infinitesimais;

dS - superfícies das faces do elemento de dimensões infinitesimais;

$\mathbf{P}(S)$ - força de superfície;

F - força pontual;

$\mathbf{b}(\mathbf{x})$ - força por unidade de volume;

Δ_v - deslocamento virtual;

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})_v$ - deformação virtual;

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ - tensões.

O primeiro membro da equação (10) contabiliza o trabalho das forças externas atuantes no elemento estrutural e o segundo, contabiliza o trabalho dos esforços internos ou a energia de deformação interna do corpo.

Para a aplicação do PTV ao elemento de barra, o conhecimento das hipóteses geométricas responsáveis por descrever o seu campo de deformações torna-se necessário.

A deformação para um elemento de barra sollicitado na direção do seu eixo principal é ilustrada pela Figura 6 e expressa pela equação (11).

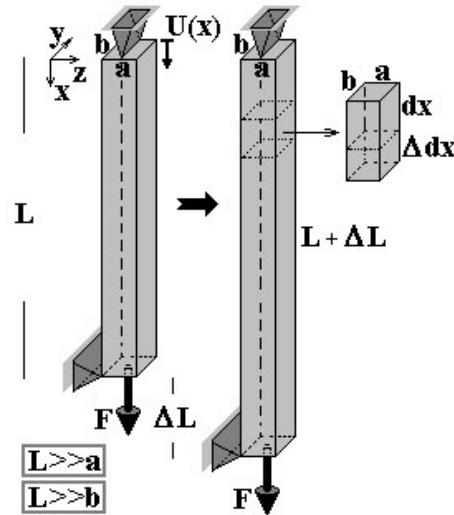


Figura 6 - Deformação em uma barra por sollicitação normal.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{d}{dx}(U(x)) = U'(x) \quad (11)$$

em que:

ε_x - deformação na direção "x";

$U(x)$ - função dos deslocamentos da barra;

Δdx - variação do comprimento do elemento infinitesimal;
 dx - comprimento original do elemento infinitesimal.

A tensão normal com a direção do eixo principal para um elemento reticulado (barra de treliça) é determinada segundo a equação (12).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x \quad (12)$$

em que:

σ_x - tensão normal na direção do eixo “x” do elemento;

$\boldsymbol{\sigma}$ - tensor das tensões;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - tensor das deformações;

D - tensor constitutivo de rigidez;

E - módulo de elasticidade longitudinal.

O elemento finito utilizado para o cálculo da área das seções transversais para os elementos estruturais possui dois nós, sendo composto por um grau de liberdade por nó (deslocamentos), assim como ilustra a Figura 7.

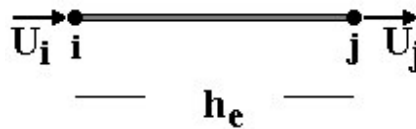


Figura 7 - Elemento finito (barra de treliça).

A função de forma adotada para o problema é um polinômio do primeiro grau. Este polinômio possui dois coeficientes, representando os graus de liberdade para o elemento finito. O polinômio é expresso por:

$$\varphi(x) = ax + b \quad (13)$$

O objetivo desta função consiste em interpolar o campo de deslocamentos no interior do elemento finito, em função dos seus deslocamentos nodais.

Como o elemento finito possui dois graus de liberdade, a função de aproximação do campo de deslocamentos ao longo do seu domínio é constituída de duas parcelas, expressas pela equação (14).

$$\bar{U}(x) = U_i\varphi_1(x) + U_j\varphi_2(x) \quad (14)$$

Os coeficientes para as duas funções de forma, contidas na função aproximativa do campo de deslocamentos, são determinados mediante a aplicação da técnica de elementos finitos, que consiste em atribuir um “deslocamento unitário” a um dos graus de liberdade do elemento mantendo-se os demais nulos, repetindo-se este processo para todos os demais graus de liberdade do elemento.

A função aproximativa dos deslocamentos, segundo a técnica de elementos finitos, é ilustrada pela Figura 8.

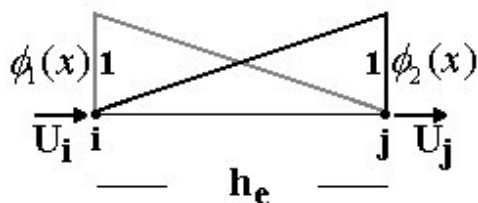


Figura 8 - Funções de forma segundo o M.E.F. para o elemento de barra.

As duas funções de forma determinadas mediante a técnica de elementos finitos são expressas pelas equações (15) e (16) dadas abaixo.

$$\text{para : } \begin{cases} \varphi_1(0) = 1 \\ \varphi_1(h_e) = 0 \end{cases} \quad \varphi_1(x) = -\frac{1}{h_e}x + 1 \quad (15)$$

$$\text{para : } \begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(h_e) = 1 \end{cases} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{h_e}x \quad (16)$$

Como visto anteriormente, a deformação para o elemento de treliça é calculada mediante a primeira derivada da sua função de deslocamentos. Sendo assim, o campo de deformações ao longo do elemento finito é determinado calculando-se a primeira derivada de sua função aproximativa de deslocamentos, expressa pela equação (17).

$$\tilde{\epsilon}(x) = U_i \varphi_1'(x) + U_j \varphi_2'(x) \quad (17)$$

A matriz de rigidez e o vetor das forças equivalentes nodais (desconsiderando-se as forças de superfície e volume) para o elemento finito são determinados substituindo-se as equações (12) e (17) na equação (10), assim como expressam respectivamente as equações (18) e (19).

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Até o presente momento, a matriz de rigidez assim como o vetor de forças equivalentes nodais para a barra de treliça foram desenvolvidos no “sistema de coordenadas locais”, que tem como objetivo determinar as deformações, tensões e esforços atuantes em cada elemento finito. Porém, para se determinar os deslocamentos da estrutura, torna-se necessário o conhecimento de suas coordenadas nodais no “sistema de coordenadas globais”, expresso por intermédio da equação (20), assim como ilustra a Figura 9.

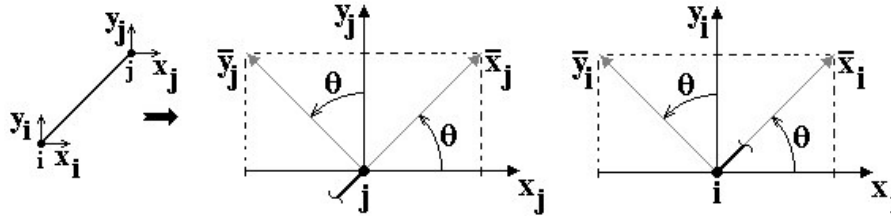


Figura 9 - Transformação de coordenadas.

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{x}_j \\ \bar{y}_j \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (20)$$

A matriz $[T]$ é chamada de matriz de transformação de coordenadas.

A matriz de rigidez para o elemento finito no sistema de coordenadas globais é expressa pela equação (21):

$$[K_e]^g = [T]^T [K_e]^l [T]$$

$$[K_e]^g = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (21)$$

em que:

$[K_e]^g$ - matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas globais;

$[K_e]^l$ - matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas locais.

O vetor de forças equivalentes nodais para o sistema de coordenadas globais é expresso pela equação (22).

$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ 0 \\ F_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

6 Métodos

Para a determinação do valor ótimo da área da seção transversal “A” para os elementos estruturais via o programa Aotm, desenvolvido por intermédio do *software* Mathcad versão 2000 versão (www.mathsoft.com), o usuário deve aferir no seu arquivo de entrada de dados informações como o número e a disposição dos nós na estrutura, o número de elementos estruturais, o módulo de elasticidade de cada elemento, os nós da estrutura que se encontram carregados, a magnitude e direção dessas forças, e, os nós com os quais a estrutura encontra-se vinculada (restrição aos deslocamentos).

Com posse dessas informações, o programa Aotm monta o sistema de equações como expressa a equação (23).

$$\{F^*\} = [K_{est}]\{U_{est}\} \Rightarrow \{F^*\} = A[K^*]\{U_{est}\} \quad (23)$$

Em que:

$\{F^*\}$ - vetor das forças internas que têm como variável dependente à área da seção transversal dos elementos estruturais;

$[K_{est}]$ - matriz de rigidez da estrutura;

$\{U_{est}\}$ - vetor dos deslocamentos nodais da estrutura;

$[K^*]$ - matriz composta pelo comprimento e módulo de elasticidade de cada elemento.

Com posse do vetor de forças equivalentes nodais da estrutura $\{F_{est}\}$, definido no arquivo de entrada de dados do programa, e do vetor $\{F^*\}$, elaborado segundo a técnica de elementos finitos, uma função objetivo é construída, fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados e que tem como variável independente a área da seção transversal dos elementos estruturais, expressa pela equação (24).

$$f(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F^*_i - F_{est_i})^2 \quad (24)$$

O valor ótimo da área das seções transversais dos elementos estruturais é determinado mediante a minimização da equação (24), com o uso do Método de Newton.

7 Aspectos computacionais

O sistema de coordenadas globais do elemento está representado pela Figura 10, sendo k um número inteiro, responsável por sua identificação na estrutura.

O programa Aotm admite que a área calculada para as seções transversais de todos os elementos componentes da estrutura é a mesma. É importante ressaltar que esta particularidade não se mostra como uma restrição do programa, pois, para um único valor de área estão associadas diversas formas e dimensões para as seções transversais dos elementos componentes da estrutura, assim como ilustra a Figura 11.

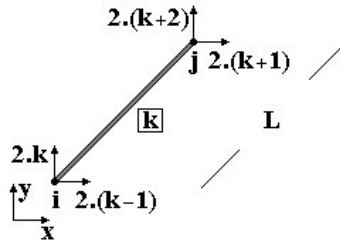


Figura 10 - Sistema de coordenadas globais para o elemento finito.



Figura 11 - Formas geométricas distintas para um mesmo valor de área da seção transversal dos elementos componentes de uma estrutura.

8 Exemplo

A Figura 12 ilustra uma estrutura do tipo treliça para o qual são determinados os valores das áreas das seções transversais dos seus elementos estruturais componentes, assim como os seus deslocamentos nodais.

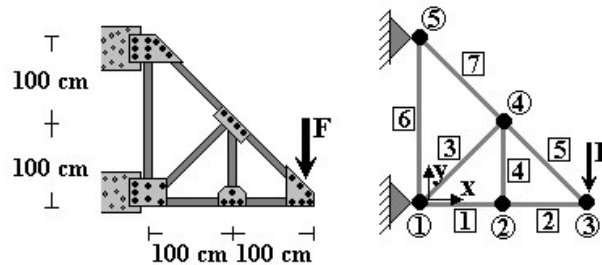


Figura 12 - Estrutura tipo Howe em balanço.

O valor da força F aplicada no nó 3 na direção do eixo “y” tem intensidade igual a 45 kN e , o módulo de elasticidade adotado para todos os seus elementos estruturais é igual a 1579 kN/cm².

As Tabelas 1 e 2 expressam respectivamente os valores dos deslocamentos nodais da estrutura e o valor da área ótima obtida para esta configuração de deslocamentos.

O valor encontrado para as áreas das seções transversais dos elementos para a estrutura treliçada do tipo Howe é igual a 16 cm². Esta particularidade não se mostra como uma restrição do programa Aotm, visto que, para o dimensionamento da estrutura, as barras podem ser idealizadas como sendo de seções retangulares, circulares etc, com diferentes dimensões, proporcionando-se, no entanto, o mesmo valor de área.

Tabela 1 - Deslocamentos nodais da estrutura

Nó	Deslocamento na direção x (cm)	Deslocamento na direção y (cm)
1	0	0
2	-0,178	-0,252
3	-0,356	-1,364
4	0,252	0,252
5	0	0

Tabela 2 - Área das seções transversais de cada elemento estrutural

Elemento	Área (cm ²)
1	16
2	16
3	16
4	16
5	16
6	16
7	16

Conclusões

Em função da restrita e usual metodologia de cálculo baseada em tentativa e erro utilizada por engenheiros, o programa Aotm mostra-se como um bom critério de cálculo na escolha da área da seção transversal mais adequada para um projeto de estruturas planas do tipo treliça.

CHRISTOFORO, A. L.; MARCONATO, S. A. S.; OLIVEIRA, R. Z. G. de. Numerical optimization of the area to the transversal sections for the component structural elements of plain structures of truss type. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.25, n.3, p.57-69, 2007.

- *ABSTRACT: In civil engineering, and, in particular, in the civil construction, the composed structures for bar elements are dimensionated to resist the action of operating forces and, restricted the small displacements, thus the choice of the area of the adjusted transversal section more for its component structural elements is calculated by a methodology based on attempt and error. This work has as objective, to present a methodology of calculation used to determine of the optimal value to the transversal sections areas for the component structural elements of a plain structures of truss type, by the Aotm program, developed based on the Finite Elements Method and the Least Squares Method. An example of plain structure of the truss type is evaluated by way the Aotm program to evidence its efficiency.*
- *KEYWORDS: Plain structures of truss type; finite element method; least squares method.*

Referências

AGUIAR, A. R. A numerical treatment of material overlapping in elasticity. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 25., 2004. *Proceeding...* 2004.

- ALVARENGA, R. C. S. S.; ANTUNES, H. M. C. C. *Otimização de treliças*. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 15., 1994, Belo Horizonte, MG. *Anais...* Belo Horizonte, 1994. p.1699-1708.
- CHEUNG, A. B.; LINDQUIST, M.; CALIL, C. J.. *Calibração de propriedades elásticas de uma placa ortótropa utilizando algoritmos genéticos*. *Rev. Sul-americana Eng. Estrut. Passo Fundo*, v.1, n.2, p.74-92, 2004.
- GÓES, J. L. N.. *Modelos teóricos para o dimensionamento de pontes com tabuleiro multicelular de madeira protendida*. In: JORNADAS SUD-AMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 31., 2004, Mendonça. *Anais...* Mendonça: Universidad Nacional de Cuyo, 2004. 2004. 1CD-ROM.
- GRAÑADRUMOND, L. M.; LUSEM, A. N. A projected gradient method for vector optimization problems. *Comput. Optim. Appl.*, Hingham, v.28, p.5-30, 2004.
- HUMES Jr.; C., SILVA, P. J. S.; SVATIER, B. F. Some inexact hybrid proximal augmented lagrangian algorithms. *Numer. Algorithms*, v.25, p.287-300, 2004.
- LAVOR, C. C.; MACULAN, N., A function to test methods applied to global minimization of potential energy molecules. *Num. Algorithms*, v.25, p.287-300, 2004.
- MASCARENHAS, W. F. The BFGS algorithm with exact line searches fails for nonconvex function. *Math. Program.*, Amsterdam, v.99, p.94-101, 2004
- MASCIA, N. T.. *Considerações a respeito da anisotropia da madeira*. 1991. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1991.
- PERRINE, P.; LANDIS E, N.; DAVIDS, W. G.; VASIC, S.. *Morphology-based models for wood and wood composites*. E.M. 2002. 15th ASCE Engineering Mechanics Conference. June 2-5. Columbia University. New York NY, 2002.
- RIGO, E. *Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas*. 1999. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1999.
- SOARES, R. C.; EL DEBS, A. L. H. C.. *Otimização de seções transversais de vigas de concreto armado: aplicação a pavimentos*. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 13., 1997, Brasília. *Anais...* Brasília, 1997. p 1507-1514.
- SOLODOV, M.V., On the sequential quadratically constrained quadratic programming methods. *Math. Oper. Res.*, Providence, v.29, p.64-79, 2004.

Recebido em 31.10.2006.

Aprovado após revisão em 07.12.2007.