# ANÁLISE DE COVARIÂNCIA INTRABLOCOS DE DELINEAMENTOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS COM DUAS CLASSES DE ASSOCIADOS E P VARIÁVEIS AUXILIARES

Paulo César Moraes RIBEIRO[1]
Augusto Ramalho de MORAIS[2]

▪ RESUMO: Este trabalho visou desenvolver uma metodologia para a análise de covariância intrablocos de delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados, com *p* variáveis auxiliares e duas classes de associados - ($PBIB_2$) Os parâmetros do delineamento foram definidos de acordo com a notação de Bose e Nair (1939). Utilizando-se o método dos mínimos quadrados, foram obtidos: o sistema de equações normais, a solução para efeitos dos tratamentos,a soma de quadrados dos parâmetros, a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos e regressão.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Covariância; blocos incompletos

## 1 Introdução

Ao conduzir um ensaio para avaliar diferenças entre tratamentos, um dos maiores desafios da pesquisa experimental reside no fato de que, não raro, fontes de variações indesejáveis podem gerar conclusões equivocadas, se não forem identificadas corretamente pelo pesquisador. Tal fato torna crucial, em experimentação, o desenvolvimento de técnicas que possam eliminar ou, pelo menos, controlar tais fontes, de modo a proporcionarem maior precisão e eficiência ao experimento, sob pena de invalidação do mesmo.

Um aspecto importante relacionado com o controle de tais causas (indesejáveis) de variação reside no problema de avaliar um número elevado de tratamentos. Por diversas razões, nem sempre é possível alocar todos os tratamentos em cada um dos blocos. Em situações como essa, os delineamentos denominados blocos incompletos (BIB), introduzidos por Yates em 1936 e generalizados por Bose e Nair com os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB), em 1939, são os mais indicados.

Surgem ainda situações em que, variações nas parcelas, não podem ser controladas via blocagem. Nesse caso, medidas de valores assumidos por uma ou mais variáveis

[1] Divisão de Ensino, Escola Preparatória de Cadetes do Ar – EPCAR, CEP: 36205-058, Barbacena, MG, Brasil. E-mail: *pcmribeiro@yahoo.com.br.*
[2] Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras – UFLA, Caixa Postal 37, CEP:37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: *armorais@ufla.br*

adicionais (covariáveis) devem ser tomadas, procedendo, posteriormente, à chamada análise de covariância.

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer metodologia e fundamentos teóricos para a análise de covariância intrablocos nos delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados, $PBIB_{(2)}$, quando p variáveis auxiliares são consideradas.

## 2 Revisão de literatura

Diz-se que a estrutura de um experimento é de um delineamento inteiramente casualizado, se as unidades experimentais são relativamente uniformes e as observações podem ser reunidas em apenas um grupo (ou bloco de parcelas). Caso contrário, se as unidades experimentais são agrupadas em subgrupos homogêneos dentro de si e heterogêneos entre os subgrupos, esses podem constituir uma estrutura de blocos propriamente dito (Milliken e Johnson, 1984).

Uma estrutura de blocos incompletos ocorre quando o número de tratamentos excede o número de unidades experimentais no bloco, de modo que, um conjunto de tratamentos não ocorre dentro de cada bloco. Tais delineamentos surgiram com Yates (1936), com o propósito de avaliar grande quantidade de tratamentos. Segundo esse autor, tais delineamentos são obtidos com o arranjo de v tratamentos distribuídos em b blocos de k parcelas (k<v) nas quais cada tratamento ocorre uma única vez em r dos blocos (r<b) e cada par de tratamentos ocorre $\lambda$ vezes nos blocos.

Verifica-se a importante relação entre tais parâmetros conhecida como condição de balanceamento:

$$\lambda(v-1) = r(k-1) \tag{1}$$

Devido à importância dos parâmetros que definem um delineamento em blocos incompletos parcialmente balanceados, Bose e Nair (1939) definiram as seguintes relações existentes entre eles:

$$\begin{aligned}
&bk = vr && (i)\\
&n_1 + n_2 + \ldots + n_m = v-1 && (ii)\\
&\sum_{j'=1}^{m} p^{i}_{jj'} = \begin{cases} n_j \;\; se\; i \neq j \\ n_j - 1 \; se\; i = j \end{cases} && (iii)\\
&n_i p^{i}_{jk} = n_j p^{j}_{ik} && (iv)
\end{aligned} \tag{2}$$

Barbosa (1986) apresentou solução generalizada para a estimativa dos efeitos de tratamentos ajustados para delineamentos em PBIB; a qual é, sob a restrição $\sum \hat{t}_i = 0$, obtida matricialmente por $\hat{\tau} = M^{-1}Q$; sendo: $Q_i = T_i - \frac{1}{k} Z_i$; sendo $Z_i = NB$; N, a matriz de incidência dos tratamentos nos blocos, de dimensão v por b; T= totais dos tratamentos; B= totais dos blocos e $M^{-1} = (m^{*}_{ii'})$, tal que

$$m_{ii'}^{*} = \begin{cases} \dfrac{k}{\Delta_1} B_{22},\ se\ i = i' \\ -\dfrac{k}{\Delta_1} B_{12},\ se\ i\ e\ i'\ \text{são primeiros associados} \\ 0,\ se\ o\ i\ e\ i'\ \text{são segundos associados} \end{cases}$$

sendo:

$$A_{12} = r(k-1) + \lambda_2$$
$$A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1)p_{12}^2$$
$$B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1$$
$$B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$\Delta_1 = A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}$$

Já para os delineamentos em BIB, Dias (1981) apresentou, para cálculo dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão, a expressão

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_x \hat{\alpha}$$

em que: $\hat{\tau}_0 = M^{-1}Q$ ; $\hat{\tau}_x = M^{-1}Q_x$ , $M^{-1} = \dfrac{k}{\lambda v} I_v$ e $Q_x = T_x - NK^{-1}B_x$ ; $Q_x$ , a matriz dos totais dos tratamentos ajustados para blocos, em relação às variáveis auxiliares, e $T_x$ , a matriz dos totais dos tratamentos, em relação às covariáveis.

## 3 Material e métodos

### 3.1 Caracterização

O desenvolvimento da metodologia baseia-se em um experimento em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados, em que são consideradas p variáveis auxiliares $x^{(w)}$, com as quais a variável dependente mantém, por hipótese, relação linear.

Os parâmetros (de primeira espécie) que caracterizam os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados, com duas classes de associados, são representados por:

v: número de parâmetros;
b: número de blocos;
r: número de repetições dos tratamentos;
k: número de parcelas por bloco;

e, ainda, $\lambda_1, \lambda_2$ , $n_1$, $n_2$ e os chamados de segunda espécie $p_{jk}^{i}$ , (i,j, k=1,2), definidos conforme Bose e Nair (1939)

Sem perda de generalidade, seja um experimento em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados (m=2) do tipo triangular em que os $v = \frac{n(n-1)}{2} = 10$ tratamentos (v=nm,) satisfazem ao seguinte esquema de associação:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| * | a | b | c | d |
| a | * | e | f | g |
| b | e | * | h | i |
| c | f | h | * | j |
| d | g | i | j | * |

## 3.2 Modelo linear

O modelo matemático de análise de covariância intrablocos, para o caso de p variáveis auxiliares $x^{(w)}$ associadas a cada valor observado, e com as quais a variável de interesse mantém por hipótese, relação linear, é o que se segue:

$$Y_{ij} = m + t_i + b_j + \sum_{w=1}^{p} \alpha_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij} \tag{3}$$

em que, para i=1,2,...,v; j=1,2,...,b; w=1,2,...,p:

$y_{ij}$ : valor observado, referente ao tratamento i no bloco j;

$m$ : média geral;

$t_i$ : efeito do tratamento i;

$b_j$ : efeito do bloco j;

$\alpha_w$ : coeficiente de regressão linear múltipla, associado à variável auxiliar $x^{(w)}$ ;

$x_{ij}^{w}$ : valor observado da variável auxiliar w, no tratamento i e no bloco j;

$e_{ij}$: erro experimental, por hipótese, independentes e normalmente distribuídos, de média zero e variância $\sigma^2$, ou seja, $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.

Admitindo-se que os efeitos de blocos incluem a média geral teórica e usando-se a forma matricial, o modelo pode ser escrito por:

$$Y = X\theta + e \tag{4}$$

em que:

$x^{(w)}$ Y: vetor dos valores observados de dimensões (bk x 1), sendo que $Y \sim N((X\theta, \sigma^2 I)$ ;

$X$ : matriz dos coeficientes, da forma [$X_1$ $X_2$ $X_3$] de dimensões [bk x (v+b+p)];

$X_1$ : matriz dos coeficientes dos efeitos de tratamentos, de dimensões (bk x v);

$X_2$ : matriz dos coeficientes dos efeitos de blocos, de dimensões (bk x b);

$X_3$ : matriz dos valores observados das variáveis auxiliares, de posto p, cujas colunas são, por hipótese, independentes das colunas das matrizes $X_1$ e $X_2$, e de dimensões (bk x p);

θ : vetor da forma $[\tau' \quad \beta' \quad \alpha']$, de dimensões [1 x (v+b+p)] em que

$$\tau = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ ... \\ t_i \\ ... \\ t_v \end{bmatrix}, \ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_j \\ ... \\ \beta_b \end{bmatrix}, \ \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_w \\ ... \\ \alpha_p \end{bmatrix};$$

$e$ : vetor dos erros experimentais, de dimensões (bk x 1), sendo $e \sim N(\phi, \sigma^2 I)$;

v: número de tratamentos;

b: número de blocos;

p: número de variáveis auxiliares

bk: número de observações.

## 3.3 Sistema de equações normais

Por meio do método dos quadrados mínimos, obtém-se o sistema de equações normais:

$$X^{'}X\hat{\theta} = X^{'}Y \tag{5}$$

Após partições da matriz X e do vetor $\theta$ de modo conveniente, o modelo passa a ser: $Y = X_1\tau + X_2\beta + X_3\alpha + e$

Substituindo-se a nova matriz X em (3), e fazendo

$$\begin{cases} X_1^{'}X_1 = R \\ X_1^{'}X_2 = N \\ X_1^{'}X_3 = T_X \end{cases}, \begin{cases} X_2^{'}X_1 = N^{'} \\ X_2^{'}X_2 = K \\ X_2^{'}X_3 = B_X \end{cases}, \begin{cases} X_3^{'}X_1 = T_X \\ X_3^{'}X_2 = B_X^{'} \\ X_3^{'}X_3 = L \end{cases} e \begin{cases} X_1^{'}Y = T \\ X_2^{'}Y = B \\ X_3^{'}Y = Z \end{cases}$$

o sistema de equações normais pode ser escrito como:

$$\begin{cases} R\hat{\tau} + N\hat{\beta} + T_X\hat{\alpha} = T \ (i) \\ N^{'}\hat{\tau} + K\hat{\beta} + B_X\hat{\alpha} = B \ (ii) \\ T_X^{'}\hat{\tau} + B_X^{'}\hat{\beta} + L\hat{\alpha} = Z \ (iii) \end{cases} \tag{6}$$

Partindo-se de solução adotada por Bose e Nair (1939), obteve-se a generalização de expressões para estimadores dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos e regressão, e para os coeficientes de regressão linear múltipla.

## 4 Resultados e discussão

### 4.1 Estimação dos efeitos de tratamentos

Efetuando-se a pré-multiplicação de (ii) em (6) por $(-NK^{-1})$ e $(-B_x^{'}K^{-1})$ e somando-se a (i) e (iii), respectivamente, com o objetivo de eliminar os efeitos dos blocos, obtém-se:

$$\begin{cases} (R - NK^{-1}N^{'})\hat{\tau} + (T_X - NK^{-1}B_X)\hat{\alpha} = (T - NK^{-1}B) \\ (T_X^{'} - B_X^{'}K^{-1}N^{'})\hat{\tau} + (L - B_X^{'}K^{-1}B_X)\hat{\alpha} = (Z - B_X^{'}K^{-1}B) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} C\hat{\tau} + Q_X\hat{\alpha} = Q(i) \\ Q_X^{'}\hat{\tau} + E_1\hat{\alpha} = E_2(ii) \end{cases} \tag{7}$$

Como observa Barbosa (1986), a matriz NN' é sempre da forma:

$$NN^{'} = \begin{bmatrix} r & \lambda_{12} & \lambda_{13} & ... & \lambda_{1v} \\ \lambda_{21} & r & \lambda_{23} & ... & \lambda_{2v} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & r & ... & \lambda_{3v} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{v1} & \lambda_{v2} & \lambda_{v3} & ... & r \end{bmatrix}$$

sendo que os elementos fora da diagonal principal correspondem ao número de vezes que cada tratamento ocorre com um outro no mesmo bloco; os elementos da diagonal principal correspondem aos números de repetições dos tratamentos. Assim, a matriz C é da forma $C = (c_{ii^{'}})_{vxv}$, tal que:

$$c_{ii^{'}} = \begin{cases} \dfrac{r(k-1)}{k}, \; se \; i = i^{'} \\ -\dfrac{\lambda_1}{k}, \; se \; o \; i - ésimo \; e \; o \; i^{'} - ésimo \; tratamentos \; são \; primeiros \; associados \\ -\dfrac{\lambda_2}{k}, \; se \; o \; i - ésimo \; e \; o \; i^{'} - ésimo \; tratamentos \; são \; segundos \; associados \end{cases}$$

Substituindo-se os elementos correspondentes da matriz C em (i) de (7), tem-se que:

$$\begin{cases} r(k-1)\hat{t}_1 - \lambda_{12}\hat{t}_2 - \lambda_{13}\hat{t}_3 - \ldots - \lambda_{1v}\hat{t}_{vv} = K(Q_1 - Q_{X1}\hat{\alpha}) \\ -\lambda_{21}\hat{t}_1 + r(k-1)\hat{t}_2 - \lambda_{23}\hat{t}_3 - \ldots - \lambda_{2v}\hat{t}_v = K(Q_2 - Q_{X2}\hat{\alpha}) \\ \ldots \\ -\lambda_{i1}\hat{t}_1 - \lambda_{i2}\hat{t}_2 - \ldots + r(k-1)\hat{t}_i - \ldots - \lambda_{iv}\hat{t}_v = K(Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha}) \\ \ldots \\ -\lambda_{v1}\hat{t}_1 - \lambda_{v2}\hat{t}_2 - \lambda_{v3}\hat{t} - \ldots + r(k-1)\hat{t}_v = K(Q_V - Q_{xv}\hat{\alpha}) \end{cases}$$

Fixando-se o tratamento i, definindo-se $S_1(\hat{t}_i)$ e $S_2(\hat{t}_i)$ como, as somas dos efeitos dos tratamentos que são primeiros e segundos associados do tratamento i, respectivamente, chega-se à equação:

$$r(k-1)\hat{t}_i - \lambda_1 S_1(\hat{t}_i) - \lambda_2 S_2(\hat{t}_i) = k(Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha}) \qquad (8)$$

Fixando-se o tratamento i, definindo-se $S_1(Q_i)$ e $S_2(Q_i)$ como as somas dos Q's dos tratamentos que são primeiros e segundos associados do tratamento i, respectivamente, somando-se as $n_1$ equações correspondentes aos tratamentos primeiros associados de i, tem-se:

$$r(k-1)S_1\hat{t}_i - \lambda_1 S_1 S_1(\hat{t}_i) - \lambda_2 S_1 S_2(\hat{t}_i) = k(S_1 Q_i - S_1 Q_{xi}\hat{\alpha}) \qquad (9)$$

Sabe-se, de Chakrabarti (1962), que, se um conjunto de tratamentos obedece à estrutura de um delineamento PBIB com m classes de associados, fixando-se o tratamento s, as seguintes igualdades se verificam:

$$\mathrm{S}_{j'}[\mathrm{S}_i(\hat{\mathrm{t}}_s)] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{p}_{j'i}^{j}\mathrm{S}_j(\hat{\mathrm{t}}_s), \text{ se } j' \neq i \\ \mathrm{n}_i\hat{\mathrm{t}}_s + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{p}_{ii}^{j}\mathrm{S}_j(\hat{\mathrm{t}}_s), \text{ se } j' = i \end{cases}$$

Dessa forma, tem-se para m=2 e tratamento i:

$$\begin{cases} S_1\left[S_1(\hat{t}_i)\right] = n_1\hat{t}_i + p_{11}^1 S_1(\hat{t}_i) + p_{11}^2 S_2(\hat{t}_i) \\ S_1\left[S_2(\hat{t}_i)\right] = p_{12}^1 S_1(\hat{t}_i) + p_{12}^2 S_2(\hat{t}_i) \end{cases} \qquad (10)$$

Usando-se (10) em (9), encontra-se:

$$\begin{aligned} &-\lambda_1 n_1\hat{t}_i + \left[r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1\right]S_1(\hat{t}_i) + \left[-\lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2\right]S_2(\hat{t}_i) \\ &= k\left[S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha}\right] \end{aligned} \qquad (11)$$

Conforme observou RAO (1947), no caso em que $n_1 < n_2$, o cálculo da estimativa dos efeitos de tratamentos é facilitado, eliminando-se $S_2(\hat{t}_i)$ ; para tanto, impõe-se em (8) a restrição:

$$\sum_i \hat{t}_i = \hat{t}_i + S_1(\hat{t}_i) + S_2(\hat{t}_i) = 0 \textit{; usando } S_2(\hat{t}_i) = -\hat{t}_i - S_1(\hat{t}_i) \textit{ obtém-se:}$$

$$\left[r(k-1)+\lambda_2\right]\hat{t}_i + \left[\lambda_2 - \lambda_1\right]S_1(\hat{t}_i) = k(Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha}) \qquad (12)$$

Procedendo de forma análoga em (9), tem-se:

$$\begin{aligned}&\left[\lambda_1(p_{11}^2 - n_1) + \lambda_2 p_{12}^2\right]\hat{t}_i + \left[r(k-1) + \lambda_1(p_{11}^2 - p_{11}^1) + \lambda_2(p_{12}^2 - p_{12}^1)\right]S_1(\hat{t}_i) \\ &= k\left[S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha}\right]\end{aligned} \qquad (13)$$

De (iii) de (2) sabe-se que:

$$p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1 \ e \ p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1$$

Dessa forma, com um pouco de Álgebra, chega-se às expressões:

$$\left[\lambda_1(p_{11}^2 - n_1) + \lambda_2 p_{12}^2\right] = p_{12}^2(\lambda_2 - \lambda_1)$$

e

$$r(k-1) + \lambda_1(p_{11}^2 - p_{11}^1) + \lambda_2(p_{12}^2 - p_{12}^1) = r(k-1) + \lambda_2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Substituindo-se em (11), para os novos coeficientes de $\hat{t}_i$ e $S_1(\hat{t}_i)$, tem-se:

$$\begin{aligned}&\left[p_{12}^2(\lambda_2 - \lambda_1)\right]\hat{t}_i + \left[r(k-1) + \lambda_2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_2 - \lambda_1)\right]S_1(\hat{t}_i) \\ &= k\left[S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha}\right]\end{aligned} \qquad (14)$$

A partir das equações (12) e (14) forma-se o sistema:

$$\begin{cases}\left[r(k-1)+\lambda_2\right]\hat{t}_i + \left[\lambda_2 - \lambda_1\right]S_1(\hat{t}_i) = k(Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha}) \\ \left[p_{12}^2(\lambda_2 - \lambda_1)\right]\hat{t}_i + \left[r(k-1) + \lambda_2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_2 - \lambda_1)\right]S_1(\hat{t}_i) \\ k\left[S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha}\right]\end{cases}$$

Fazendo-se:

$$\begin{aligned}A_{12} &= r(k-1) + \lambda_2 \\ A_{22} &= p_{12}^2(\lambda_2 - \lambda_1) \\ B_{12} &= \lambda_2 - \lambda_1 \\ B_{22} &= r(k-1) + \lambda_2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_2 - \lambda_1)\end{aligned} \qquad (15)$$

obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ S_1(\hat{t}_i) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha} \\ S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha} \end{bmatrix}$$

como

$$\Delta = A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}$$

tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ S_1(\hat{t}_i) \end{bmatrix} = \frac{k}{\Delta} \begin{bmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -A_{22} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha} \\ S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha} \end{bmatrix}$$

donde

$$\tau = \frac{k}{\Delta}\left[B_{22}Q - B_{12}S_1(Q)\right] - \frac{k}{\Delta}\left[B_{22}Q_x - B_{12}S_1(Q_x)\right]\hat{\alpha} \tag{16}$$

sendo a expressão que permite obter os efeitos ajustados de tratamentos, equivalente a:

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_x\hat{\alpha} \quad ou \quad \hat{t}_i = \hat{t}_{i0} - \sum_{w=1}^{p} \hat{\alpha}_w \hat{t}_{iw},\ i = 1,2,...,v$$

em que:

$\hat{t}_i$ é o estimador do efeito do tratamento i, ajustado para blocos e regressão;

$\hat{t}_{i0} = \frac{k}{\Delta}\left[B_{21}Q - B_{11}S_2(Q)\right]$ é o estimador do efeito do tratamento i, ajustado para blocos, em relação à variável dependente y;

$\hat{t}_{iw} = \frac{k}{\Delta}\left[B_{21}Q_x - B_{11}S_2(Q_x)\right]$, semelhante a $\hat{t}_{i0}$, porém, em relação às variáveis auxiliares;

$\hat{\alpha}_w$ é estimador do coeficiente de regressão linear, associado à variável auxiliar $x^{(w)}$.

## 4.2 Estimação dos coeficientes de regressão linear múltipla

Substituindo-se (16) em (ii) de (7) tem-se que:

$$\left\{E_1 - \frac{k}{\Delta}Q'_{xi}\left[B_{22}Q_{xi} - B_{12}S_1(Q_{xi})\right]\right\}\hat{\alpha} = E_2 - \frac{k}{\Delta}Q'_{xi}\left[B_{22}Q_i - B_{12}S_1(Q_i)\right]$$

Sendo $E_1$ uma matriz não singular, tem-se que:

$$\hat{\alpha} = E_3^{-1}E_4$$

### 4.3 Caso especial: experimentos em blocos incompletos balanceados (BIB)

As soluções para efeitos de tratamentos ajustados, para delineamentos em BIB, podem ser obtidas a partir de um delineamento PBIB$_2$, considerando-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ nas expressões (15), as quais retornam:

$$\begin{aligned} A_{12} &= r(k-1)+\lambda \\ A_{22} &= 0 \\ B_{12} &= 0 \\ B_{22} &= r(k-1)+\lambda \end{aligned}$$

Como $\Delta = A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}$, tem-se que $\Delta = [r(k-1)+\lambda]^2$.
Substituindo-se em (16), para o tratamento i vem:

$$\hat{t}_i = \frac{k}{\Delta}\{B_{22}(Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha}) - B_{12}[S_1(Q_i) - S_1(Q_{xi})\hat{\alpha}]\}$$

$$\hat{t}_i = \frac{k}{[r(k-1)+\lambda]^2}[r(k-1)+\lambda](Qi - Q_{xi}\hat{\alpha})$$

Usando (1) chega-se à expressão:

$$\hat{t}_i = \frac{k}{\lambda v}(Q_i - Q_{xi}\hat{\alpha})$$

que é a solução encontrada por Dias (1981).

No caso em que $n_1 > n_2$, demonstra-se analogamente que as expressões são:

$$\tau = \frac{k}{\Delta}[B_{21}Q - B_{11}S_2(Q)] - \frac{k}{\Delta}[B_{21}Q_x - B_{11}S_2(Q_x)]\hat{\alpha}\ ;$$

$$\left\{E_1 - \frac{k}{\Delta}Q_{xi}^{'}[B_{21}Q_{xi} - B_{11}S_2(Q_{xi})]\right\}\hat{\alpha} = E_2 - \frac{k}{\Delta}Q_{xi}^{'}[B_{21}Q_i - B_{11}S_2(Q_i)]$$

## 5 Somas de quadrados

### 5.1 Soma de quadrados dos parâmetros

Sabe-se da teoria dos Modelos Lineares que a solução para a soma de quadrados de parâmetros (representada por $\mathrm{SQP}_1$) do modelo apresentado em (5) é dada por:

$$SQP_1 = \theta^{'}X^{'}Y = \begin{bmatrix}\hat{\tau}^{'} & \hat{\beta}^{'} & \hat{\alpha}^{'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T \\ B \\ Z\end{bmatrix} = \hat{\tau}^{'}T + \hat{\beta}^{'}B + \hat{\alpha}^{'}Z \qquad (17)$$

De acordo com (ii) de (4):

$$K\hat{\beta} = B - N^{'}\hat{\tau} - B_X\hat{\alpha}$$

ou seja,

$$\hat{\beta}^{'} = B^{'}K^{-1} - \hat{\tau}^{'}NK^{-1} - \hat{\alpha}^{'}B_X^{'}K^{-1}$$

que substituindo em (17) fornece:

$$SQP_1 = \hat{\tau}^{'}(T - NK^{-1}B) + B^{'}K^{-1}B + \hat{\alpha}^{'}(Z - B_x^{'}K^{-1}B)$$
$$SQP_1 = \hat{\tau}^{'}Q + B^{'}K^{-1}B + \hat{\alpha}^{'}E_2$$
$$SQP_1 = \left\{\frac{k}{\Delta}\left[B_{22}Q - B_{12}S_1(Q)\right] - \frac{k}{\Delta}\left[B_{22}Q_x - B_{12}S_1(Q_x)\right]\hat{\alpha}\right\}^{'} Q + B^{'}K^{-1}B + \hat{\alpha}^{'}E_2$$
$$SQP_1 = \frac{k}{\Delta}\left[B_{22}Q^{'} - B_{12}S_1(Q)^{'}\right]Q + B^{'}K^{-1}B + \hat{\alpha}^{'}\left\{E_2 - \frac{k}{\Delta}\left[B_{22}Q_x^{'} - B_{12}S_1(Q_x)^{'}\right]Q\right\}$$
$$SQP_1 = \hat{\tau}_0^{'}Q + B^{'}K^{-1}B + \hat{\alpha}^{'}E_4$$

em que:

$\hat{\tau}_0^{'}Q$ é a soma de quadrados de tratamentos, ajustada para blocos, referente à variável dependente;

$B^{'}K^{-1}B$ é a soma de quadrados de blocos, referente à variável dependente e

$\hat{\alpha}^{'}E_4$ =soma de quadrados da regressão.

### 5.2 Soma de quadrados dos resíduos, ajustada para regressão

$$SQ\,\mathrm{Re}\,s^* = Y^{'}Y - SQP_1$$

### 5.3 Soma de quadrados dos resíduos ajustada para blocos e regressão

A partir do modelo reduzido (sem efeito de tratamentos): $Y_{ij} = m + b_j + \sum_{w=1}^{p}\alpha_w x_{ij}^{(w)} + e_{ij}$, de forma matricial $Y = X^*\theta^* + e$, tem-se o sistema de equações normais $X^{'*}X^*\tilde{\theta} = X^{'*}Y$

Após partições da matriz $X^*$ e do vetor $\theta^*$ de modo conveniente, o modelo passa a ser $Y = X_2\beta + X_3\alpha + e$ e por meio de procedimentos análogos ao do modelo (3), chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} K\tilde{\beta} + B_X\tilde{\alpha} = B\ (i) \\ B_X^{'}\tilde{\beta} + L\tilde{\alpha} = Z\ (ii) \end{cases} \qquad (18)$$

e por operações elementares, chega-se à equação reduzida:

$$(L - B_X^{'} K^{-1} B_X)\tilde{\alpha} = (Z - B_X^{'} K^{-1} B)\text{, } ou \ E_1\tilde{\alpha} = E_2$$

A solução para a soma de quadrados de parâmetros (representada por $SQP_2$) é obtida por:

$$SQP_2 = \theta^{'} * X^{'} * Y = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}^{'} & \tilde{\alpha}^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ Z \end{bmatrix} = \tilde{\beta}^{'} B + \tilde{\alpha}^{'} Z$$

De (i) de (16), obtém-se $\tilde{\beta}^{'} = K^{-1}B^{'} - K^{-1}\tilde{\alpha}^{'}B_x^{'}$. Portanto, $SQP_2 = B^{'}K^{-1}B + \tilde{\alpha}^{'}E_2$

Dessa forma, a expressão para a soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos e regressão é dada por:

$$SQTrat*(aj.) = SQP_1 - SQP_2 = \hat{\tau}_0^{'}Q + \hat{\alpha}^{'}E_4 - \tilde{\alpha}^{'}E_2$$

## 6 Aplicação

Para aplicação da metodologia apresentada, utilizou-se parte dos dados adaptados obtidos na Aracruz celulose (Ramalho et al., 2000), os quais se encontram na Tabela 1.

Tabela 1 - Valores observados da variável dependente: altura da planta (em metros) e das variáveis independentes: diâmetro à altura do peito (DAP, em cm); número médio de brotos árvores (NMB) e porcentagem de enraizamento das estacas (PEE)

| Bloco | Tratamento | Altura(m) | DAP(cm) | NBM(u) | PEE(%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 12.3 | 10.0 | 26.2 | 41.9 |
| 1 | 2 | 12.4 | 11.3 | 31.9 | 53.6 |
| 1 | 3 | 11.8 | 9.9 | 35.6 | 56.5 |
| 1 | 4 | 14.8 | 11.8 | 36.0 | 44.0 |
| 2 | 1 | 13.3 | 10.3 | 24.2 | 36.0 |
| 2 | 5 | 13.2 | 10.6 | 38.0 | 53.9 |
| 2 | 6 | 13.7 | 10.8 | 38.3 | 24.2 |
| 2 | 7 | 12.9 | 9.7 | 31.1 | 34.6 |
| 3 | 2 | 9.6 | 8.1 | 32.4 | 40.3 |
| 3 | 5 | 14.9 | 10.9 | 25.3 | 26.8 |
| 3 | 8 | 11.5 | 10.6 | 26.5 | 38.6 |
| 3 | 9 | 11.6 | 9.5 | 49.5 | 23.3 |
| 4 | 3 | 16.4 | 11.4 | 15.0 | 14.3 |
| 4 | 6 | 13.8 | 11.0 | 24.5 | 40.3 |
| 4 | 8 | 15.0 | 11.9 | 3.0 | 81.6 |
| 4 | 10 | 20.5 | 15.1 | 1.3 | 48.3 |
| 5 | 4 | 18.1 | 13.1 | 16.3 | 17.9 |
| 5 | 7 | 17.0 | 13.1 | 13.1 | 27.6 |
| 5 | 9 | 18.4 | 14.4 | 34.9 | 29.8 |
| 5 | 10 | 12.7 | 11.3 | 61.8 | 53.8 |

Este delineamento, de acordo com Bose e Nair (1939) é um $PBIB_{(2)}$ do tipo triangular no qual tem-se que:

i. cada bloco contém k=4 tratamentos;

ii. cada tratamento ocorre em r=2 blocos;

Fixando-se um tratamento, os demais podem ser agrupados em 2 grupos de tamanhos $n_1 = 6$ e $n_2 = 3$, de modo que os tratamentos do primeiro grupo ocorram com o tratamento em questão em $\lambda_1 = 1$ bloco e os do segundo grupo, em $\lambda_1 = 0$ bloco, conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2 - Tratamentos com seus respectivos tipos de associados

| **Associados** | **Tratamentos** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| Primeiros | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| | 3 | 3 | 2 | 2 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |
| | 4 | 4 | 4 | 3 | 7 | 7 | 6 | 9 | 8 | 8 |
| | 5 | 5 | 6 | 7 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 |
| | 6 | 8 | 8 | 9 | 8 | 8 | 9 | 6 | 7 | 7 |
| | 7 | 9 | 10 | 10 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 |
| Segundos | 8 | 6 | 5 | 5 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| | 9 | 7 | 7 | 6 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 |
| | 10 | 10 | 9 | 8 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 |

iii. os parâmetros de segundo tipo são:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } p_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

As somas de quadrados (obtidas através de cálculos auxiliares apresentados nas Tabelas 3a e 3b), foram desenvolvidas no software R®.2.4.0, cujas rotinas encontram-se no Anexo, foram:

1. soma de quadrados de parâmetros:

$$SQP_1 = \hat{\tau}_0^{'} Q + B^{'} K^{-1} B + \hat{\alpha}^{'} E_4 =$$
$$25{,}49025 + 4103{,}998 + 38{,}58499$$

2. soma de quadrados dos resíduos:

$$SQ\,\mathrm{Re}\,s^* = Y^{'} Y - SQP_1 = 41{,}16225$$

3. soma de quadrados dos resíduos ajustados:

$$(Y'Y - SQBloco - SQTrat(aj.)) - SQ\,\mathrm{Re}\,g = 2{,}577263$$

4. soma de quadrados dos tratamentos ajustados para blocos e regressão :

$$SQTrat^*(aj.) = SQP_1 - SQP_2 = \hat{\tau}_0^{'}Q + \hat{\alpha}^{'}E_4 - \tilde{\alpha}^{'}E_2 = 4{,}088$$

Tabela 3a - Tabela auxiliar para a analise de covariância intrablocos do experimento (T, Q, Tx; Qx)

| Trat. | T | Q | Tx | | | Qx | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25,6 | -0,5 | 20,3 | 50,4 | 77,9 | -0,8 | -14,925 | -8,275 |
| 2 | 22,0 | -2,725 | 19,4 | 64,3 | 93,9 | -1,125 | -1,55 | 12,65 |
| 3 | 28,2 | -1,050 | 21,3 | 50,6 | 70,8 | -1,8 | 7,225 | -24,325 |
| 4 | 32,9 | 3,525 | 24,9 | 52,3 | 7,9 | 1,175 | -11,65 | -11,875 |
| 5 | 28,1 | 2,925 | 21,5 | 63,3 | 80,7 | 1,375 | -3,025 | 11,275 |
| 6 | 27,5 | -2,2 | 21,8 | 62,8 | 64,7 | -0,9 | 18,95 | -18,8 |
| 7 | 29,9 | 0,075 | 22,8 | 44,2 | 62,2 | -0,525 | -20,225 | -9,75 |
| 8 | 26,5 | -1.825 | 22,5 | 29,5 | 120,2 | 0,375 | -14,875 | 41,825 |
| 9 | 30,0 | 1,55 | 23,9 | 84,4 | 53,1 | 1.15 | 19,45 | -13,925 |
| 10 | 33,2 | 0,225 | 26,4 | 63,1 | 120,1 | 1,075 | 20,625 | 21,2 |
| Tot. | | 0,000 | | | | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Tabela 3b - Tabela auxiliar para a analise de covariância intrablocos do experimento (S2(Q), 2os Associados, S2(Qx), $\hat{t}_i$ )

| Trat. | S2(Q) | 2os Associados | S2(Qx) | | | $\hat{t}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,05 | 8,9,10 | 2,60 | 25,20 | 49,10 | -0,92 |
| 2 | -1,9 | 6,7,10 | -0,35 | 19,35 | -7,25 | -0,91 |
| 3 | 4,55 | 5,7,9 | 2,00 | -3,8 | -12,40 | 0,04 |
| 4 | -1,1 | 5,6,8 | 0,85 | 1,050 | 34,30 | 0,82 |
| 5 | 2,7 | 3,4,10 | 0,45 | 16,2 | -15,00 | 0,81 |
| 6 | 2,35 | 2,4,9 | 1,2 | 6,25 | -13,15 | -0,43 |
| 7 | -5,6 | 2,3,8 | -2,55 | -9,2 | 30,15 | -0,53 |
| 8 | 3,1 | 1,4,7 | -0,15 | -46,8 | -29,90 | -1,12 |
| 9 | -3,75 | 1,3,6 | -3,5 | 11,25 | -51,40 | 1,22 |
| 10 | -0,3 | 1,2,5 | -0,55 | -19,5 | 15,65 | 1,02 |
| Tot. | 0,00 | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Dessa forma um resumo da análise de variância, sem levar em conta as covariáveis, pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 - ANAVA para modelo sem covariáveis

| F.V. | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Blocos | b=5 | 4.130,998 | 820,79 | |
| Trat(aj) | v-1=9 | 25,5015 | 2,8335 | 0,413 |
| Res. | bk-b-v+1=6 | 41,151 | 6,8585 | |
| Total | bk=20 | 4.170,65 | | |

Na Tabela 5 são apresentados os resultados para o modelo covariante.

Tabela 5 - ANAVA para modelo com covariáveis

| F.V. | G.L. | S.Q. | Q.M. | F |
|---|---|---|---|---|
| Regressão | p=3 | 40,04778 | 13,35 | 36,36 |
| Trat(aj) | v-1=9 | 25,5015 | 2,8335 | 7,72 |
| Resíduo* | bk-b-v-p+1=3 | 1,103220 | 0,367 | |

## Conclusões

Como esperado, vê-se que a soma de quadrados dos parâmetros pôde ser decomposta em soma de quadrados de tratamentos ajustada para blocos e regressão, soma de quadrados de blocos e soma de quadrados da regressão.

O modelo linear adotado apresentou-se adequado ao objetivo proposto na medida que generaliza a análise de covariância de delineamentos em $PBIB_{(2)}$, caracterizando o BIB como caso particular do modelo proposto.

Vê-se com o exemplo que a análise de covariância efetivamente aumentou a precisão do experimento na medida que reduziu a variação residual. O teste para regressão revela que pelo menos um coeficiente é diferente de zero e, portanto, há efeito de pelo menos uma covariável nas estimativas das médias de tratamentos.

RIBEIRO, P. C. M.; MORAIS, A. R. Intrablock covariance analysis of partially balanced incomplete block design with and two associated classes and *p* auxiliary variables. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.26, n.1, p.7-23, 2008.

- *ABSTRACT: This work has been developed one methodology for the intrablock covariance analysis of partially balanced incomplete block design with p auxiliary variables and two associated classes – $PBIB_{(2)}$. The design parameters were defined according to the symbol notes of BOSE e NAIR (1939). Using the method of least square were obtained: the system of normal equations; the solutions of the parameters effects, the sum of squares of the parameters, the sum of squares for treatments, adjusted for blocks and regression .*

- *KEYWORDS: Covariance; incomplete block.*

## Referências

BARBOSA, G. V. S. *Planejamento e análise de ensaios em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados – PBIB$_{(2)}$*. 1986. 118f. Dissertação (Mestrado em Agronomia, Área de Concentração Estatística e Experimentação Agronômica), Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiros, Universidade de São Paulo – USP, Piracicaba, 1986.

BOSE, R. C., SHIMAMOTO, T. Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes**.** *J. Am. Stat. Assoc.*, Washington, v.47, p.151-184, 1952.

DIAS, J. F. S. *Análise de covariância intrablocos, com p variáveis auxiliares, para delineametos em blocos incompletos equilibrados***.** 1981. 96f. Tese (Doutorado em Agronomia, Área de Concentração Estatística e Experimentação Agronômica), Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiros, Universidade de São Paulo – USP, Piracicaba, 1981.

MILLIKEN, G. A.; JOHNSON, D. E. *Analysis of messy data:* designed experiments**.** London: Lifetime Learning Publications, 1984. v.1.

NAIR K. R. Analysis of partially balanced incomplete block designs illustrated on the simple square and rectangular lattices**.** *Biometrics*, Raleigh, v.8, p.122-155,1952.

RAO, C. R. General methods of incomplete block designs**.** *J. Am. Stat. Assoc*., Washington, v.8 , p.541-561,1947.

RAMALHO, M. A P.; FERREIRA, D. F., OLIVEIRA, A. C. *Experimentação em genética e melhoramento de plantas***.** Lavras: Editora UFLA, 2000. 303p.

YATES, F. A new method of arranging variety involving a large number of varieties**.** *J. Agric. Sci.*, Cambridge, v.26, p.424-455, 1936.

Recebido em 18.09.2007.

Aprovado após revisão em 15.02.2008.

## ANEXO

```
Y<-
matrix(c(12.3,13.3,12.4,9.6,11.8,16.4,14.8,18.1,13.2,14.9,13.7,13.8,12.9,17,11.5,15,11.6,18.4,20.5,12.7),20,1)
 X3<-
matrix(c(10,10.3,11.3,8.1,9.9,11.4,11.8,13.1,10.6,10.9,10.8,11,9.7,13.1,10.6,11.9,9.5,14.4,15.1,11.3,26.2,24.2,31
.9,32.4,35.6,15,36,16.3,38,25.3,38.3,24.5,31.1,13.1,26.5,3,49.5,34.9,1.3,61.8,41.9,36,53.6,40.3,56.5,14.3,44,27.9
,53.9,26.8,24.2,40.3,34.6,27.6,38.6,81.6,23.3,29.8,48.3,53.8),20,3)
 N<-
matrix(c(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1),10,5)
 S2<-
matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,
0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0),10,10)
 T<-matrix(c(25.6,22,28.2,32.9,28.1,27.5,29.9,26.5,30,33.2),10,1)
 Tx<-
matrix(c(20.3,19.4,21.3,24.9,21.5,21.8,22.8,22.5,23.9,26.4,50.4,64.3,50.6,52.3,63.3,62.8,44.2,29.5,84.4,63.1,77.
9,93.9,70.8,71.9,80.7,64.5,62.2,120.2,53.1,102.1),10,3)
 B1<-matrix(c(51.3,53.1,47.6,65.7,66.2),5,1)
 Bx<-matrix(c(43,41.4,39.1,49.4,51.9,129.7,131.6,133.7,43.8,126.1,196,148.7,129,184.5,139.1),5,3)
 d<-40
 b21<-6
 b11<-1
 k<-4
 Q<-T-1/k*N%*%B1
 Qx<-Tx-1/k*N%*%Bx
 Z<-t(X3)%*%Y
 L<-t(X3)%*%X3
 E1<-L-1/k*t(Bx)%*%Bx
 E2<-Z-1/k*t(Bx)%*%B1
 S2Q<-S2%*%Q
 S2Qx<-S2%*%Qx
 E3<-E1-k/d*t(Qx)%*%(b21*Qx-b11*S2Qx)
 E4<-E2-k/d*(b21*t(Qx)%*%Q-b11*t(Qx)%*%S2Q)
 library(MASS)
 ahat<-ginv(E3)%*%E4
 ti<-k/d*(b21*Q-b11*S2Q)-k/d*(b21*Qx-b11*S2Qx)%*%ahat
 SQTaj<-t(k/d*(b21*Q-b11*S2Q))%*%Q
 SQReg<-(t(E2)-k/d*(b21*t(Q)%*%Qx-b11*t(Q)%*%S2Qx))%*%ahat
 SQB<-1/k*t(B1)%*%B1
 SQResaj<-t(Y)%*%Y-SQTaj-SQB-SQReg
 atil<-ginv(E1)%*%E2
 SQTasteriscoaj<-SQTaj+SQReg-t(atil)%*%E2
 t(Y)%*%Y
```