

# DIAGRAMA DE HASSE E APLICAÇÕES À EXPERIMENTAÇÃO

Renata ALCARDE<sup>1</sup>  
Sônia Maria De Stefano PIEDADE<sup>1</sup>  
Gerson Barreto MOURÃO<sup>1</sup>

- RESUMO: A crescente aplicação da estatística às mais diversas áreas de pesquisa, tem definido delineamentos complexos, dificultando assim seu planejamento e análise. O diagrama de Hasse é uma ferramenta gráfica, que tem como objetivo facilitar a compreensão da estrutura presente entre os fatores experimentais. Além de uma melhor visualização do experimento fornece, através de regras propostas na literatura, os números de graus de liberdade de cada fator. Sob a condição de ortogonalidade do delineamento, podem-se obter também as somas de quadrados e as esperanças dos quadrados médios, propiciando a razão adequada para a aplicação do teste F. A fim de exemplificar as regras e o emprego desta ferramenta, utilizaram-se dados de um experimento realizado com capim Marandu, detalhando-se a estrutura experimental, demonstrando-se a ortogonalidade entre os fatores e indicando-se o esquema da análise da variância.
- PALAVRAS-CHAVE: Ferramenta gráfica; subespaços vetoriais; ortogonalidade.

## 1 Introdução

Um diagrama de Hasse, também conhecido como diagrama da estrutura (LOHR, 1981), é uma representação originária da teoria dos conjuntos, nomeado em homenagem ao matemático alemão Helmut Hasse (1898-1979). Taylor e Hilton (1981) com a publicação do artigo *A Structure Diagram Symbolization for Analysis of Variance*, apresentaram vantagens do uso do diagrama e regras para a obtenção de aspectos relevantes à análise, tais como números de graus de liberdade, esperança dos quadrados médios e razões apropriadas do teste F.

---

<sup>1</sup>Departamento de Ciências Exatas, Universidade de São Paulo, Campus de Piracicaba - ESALQ/USP, CEP: 13.418-900, Piracicaba, São Paulo, Brasil. E-mail: [alcarde83@yahoo.com.br](mailto:alcarde83@yahoo.com.br) / [soniamsp@esalq.usp.br](mailto:soniamsp@esalq.usp.br) / [gbmourao@esalq.usp.br](mailto:gbmourao@esalq.usp.br)

Tal diagrama é uma poderosa ferramenta visual utilizada na representação da estrutura dos fatores em um delineamento experimental, que pode ajudar no planejamento de um experimento complexos bem como elucidar a estrutura dos dados a serem analisados (LOHR, 1995; MACHADO et al., 2005).

Uma valiosa perspectiva complementar para a análise de variância e das técnicas de análise, é fornecida pelo diagrama de Hasse, por meio de uma conexão entre a descrição verbal do experimento e o correspondente modelo linear estatístico (TAYLOR; HILTON, 1981). Posteriormente, Lohr (1995) menciona que o diagrama de Hasse pode ter seu uso estendido à sala de aula, auxiliando no ensino de planejamentos de experimentos.

Como as quantidades desejadas apenas podem ser calculadas, com o auxílio do diagrama, para delineamentos ortogonais, Bailey (2005) utiliza o conceito de classe de fatores para verificar a ortogonalidade das estruturas de tratamento, unidade e finalmente, a ortogonalidade do delineamento.

Um fator generalizado é definido como a combinação de dois ou mais fatores experimentais, por conveniência fatores simples também são considerados fatores generalizados (BRIEN, 2007). Sabendo-se que o diagrama de Hasse é um conjunto parcialmente ordenado (*partially ordered set - poset*), para o qual a relação de ordem parcial dá-se pela relação de aninhamento entre os fatores generalizados, Bailey (2005) sugere que se construa um diagrama para representar a estrutura de unidade e outro para representar a estrutura de tratamento.

A mesma autora descreve a construção do diagrama desenhando uma representação para cada fator generalizado, de tal modo que os fatores aninhados posicionem-se um abaixo do outro e sejam conectados por meio de um segmento, e fatores cruzados posicionem-se um ao lado do outro.

No diagrama, devem haver representações para o fator Universal, aquele que possui apenas uma classe na qual estão todas as unidades ou tratamentos e que geralmente é representado pela média geral, e para o fator Igualdade, aquele que possui uma classe para cada unidade ou tratamento. Representam-se também o ínfimo e o supremo entre dois fatores. Para facilitar a compreensão de tais conceitos, considere os fatores  $F$ ,  $G$  e  $H$ , num mesmo experimento. O ínfimo entre os fatores  $F$  e  $G$ , representado por  $F \wedge G$ , é aquele cujas classes são as interseções não vazias das  $F$ -classes com as  $G$ -classes. O supremo entre os fatores  $F$  e  $G$  é o único fator,  $F \vee G$ , que satisfaz as seguintes condições: (i)  $F \vee G \succ F$  e  $F \vee G \succ G$ ; (ii) se  $H$  é um fator tal que  $H \succ F$  e  $H \succ G$  então  $H \succ F \vee G$  (BAILEY, 2005).

O desdobramento do espaço vetorial definido pelo experimento, em subespaços gerados por cada fator generalizado ( $V$ , é fundamental na realização dos cálculos com o auxílio do diagrama de Hasse, de tal modo que se possam construir subespaços ortogonais entre si. Tais subespaços são denominados  $W$ 's, e obtidos por meio de projeções ortogonais. Uma revisão mais detalhada do assunto pode ser vista em Alcarde (2007).

O objetivo deste trabalho foi apresentar o uso do diagrama de Hasse como ferramenta facilitadora da estatística experimental, em procedimentos de planejamento, análise e ensino. As definições, teoremas e regras utilizadas foram

ilustradas com um experimento realizado com capim Marandu quando submetido a deficit hídrico. Utilizou-se o delineamento em blocos casualizados (quatro blocos) com esquema de tratamento fatorial (3×3) mais um controle. Os fatores de tratamentos foram grau de estresse, representando a suspensão da irrigação até a umidade do solo atingir 75%, 50% e 25% de umidade à capacidade de campo do solo (UCC) e, a época em que a irrigação foi suspensa nas fases de semeadura, germinação e perfilhamento.

## 2 Fatores experimentais

O primeiro passo na análise de um experimento é a identificação dos fatores experimentais, fatores de tratamento, fatores de unidade e em alguns casos fatores de tratamento e unidade. A regra a seguir, proposta por Brien (2007) foi usada como auxílio em tal identificação:

**Regra 1:** Fazer a seguinte pergunta:

Para uma unidade observacional, pode-se identificar os níveis do fator associados à unidade se a aleatorização não foi efetuada?

No caso da resposta ser afirmativa, trata-se de um fator de unidade. Caso contrário, o fator será de tratamento.

### 2.1 Aplicação

Tabela - 1 - Composição dos tratamentos.

	Testemunha	75%	50%	25%
Testemunha	T <sub>1</sub>			
Semeadura		T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>
Germinação		T <sub>5</sub>	T <sub>6</sub>	T <sub>7</sub>
Perfilho		T <sub>8</sub>	T <sub>9</sub>	T <sub>10</sub>

Os tratamentos foram obtidos através da composição que pode ser observada na Tabela 1. Note que o conjunto de tratamentos é composto por dois subconjuntos disjuntos,

Fatorial + tratamento adicional,

logo, criou-se um novo fator de tratamento, *Controle*, com dois níveis, no qual os tratamentos estão aninhados, a fim de se obter a ortogonalidade entre os fatores.

Portanto, os fatores experimentais são: *Blocos* e *Parcelas*, fatores de unidade, e *Controle*, *Época* e *Grau*, fatores de tratamento.

### 3 Estrutura experimental

Com base nas Regras 2 e 3, apresentou-se a estrutura experimental e sua expansão.

**Regra 2:** A estrutura experimental é determinada como segue:

1. descreve-se a relação entre os fatores de unidade no experimento;
2. analogamente, descreve-se a relação entre
  - (i) os fatores de tratamento, e
  - (ii) os fatores de tratamento e de unidade, quando necessário.

E acrescenta-se o número de níveis dos fatores em frente aos respectivos nomes (BRIEN, 2007).

#### 3.1 Aplicação

As estruturas dos fatores no exemplo podem ser descritas por:

Fatores de unidade:  $4\text{Blocos}/10\text{Parcelas}$ ;  
Fatores de tratamento:  $2\text{Controle}/(4\text{Época}*4\text{Grau})$ .

#### 3.2 Expansão da estrutura experimental

Tendo definida a estrutura experimental, Brien (2007) sugere que tal fórmula seja expandida, com o objetivo de se obterem os termos que serão incluídos no diagrama e conseqüentemente, no modelo e na análise de variância. O mesmo autor apresenta uma outra regra, para a realização dessa expansão.

**Regra 3:** Considere os fatores  $F$  e  $G$  em um mesmo conjunto. As regras para a expansão da fórmula estrutural são:

$$\begin{aligned} F * G &= F + G + F : G \\ F / G &= F + G[F] \end{aligned}$$

em que no primeiro lado da equação encontram-se as fórmulas estruturais e no segundo encontram-se as fórmulas expandidas, de tal modo que  $F * G$  representa a estrutura do fator  $F$  cruzado com o fator  $G$ ,  $F / G$  representa a estrutura do fator  $G$  aninhado ao fator  $F$ ,  $F : G$  representa o efeito da interação entre os fatores  $F$  e  $G$ , e  $G[F]$  representa o efeito do fator  $G$  dentro do fator  $F$ .

#### 3.3 Aplicação

Assim,

$$\text{Estrutura de unidade} = \text{Blocos} + \text{Parcelas}[\text{Blocos}],$$

$$\begin{aligned} \text{Est. de tratamento} &= \text{Controle}/(\acute{E}poca + \text{Grau} + \acute{E}poca:\text{Grau}) \\ &= \text{Controle} + \acute{E}poca[\text{Controle}] + \text{Grau}[\text{Controle}] + \\ &\quad + \acute{E}poca:\text{Grau}[\text{Controle}]. \end{aligned}$$

## 4 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade

A construção do diagrama dá-se pela seguinte regra:

**Regra 4:** O diagrama de Hasse para a fórmula estrutural, de um conjunto de fatores, sejam eles fatores de tratamento ou de unidade, é formado colocando acima de todos aquele que é marginal aos demais, conectando-os por um segmento. Em contrapartida, fatores cruzados ficam um ao lado do outro. O fator Universal, geralmente representado pela média geral, é incluído no topo do diagrama. E, no final do diagrama consta a representação do ínfimo entre os fatores. Do lado esquerdo do fator generalizado escreve-se o número de níveis e do lado direito o número de graus de liberdade para a correspondente fonte de variação, que é obtido pela diferença entre o número de seus níveis e a soma dos números de graus de liberdade de todos os fatores generalizados marginais a ele (BRIEN, 2007).

### 4.1 Aplicação

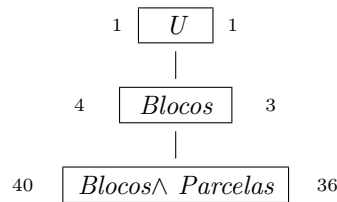


Figura - 1 - Diagrama de Hasse para os fatores de unidade

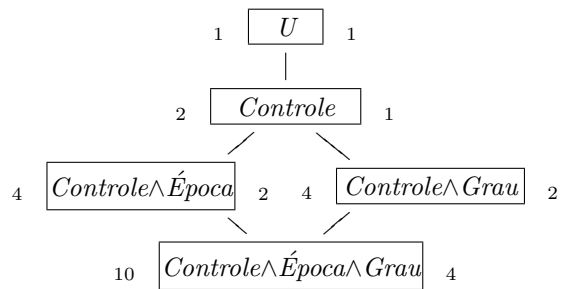


Figura - 2 - Diagrama de Hasse para fatores de tratamento

## 5 Ortogonalidade

Segundo Lohr (1995) o diagrama de Hasse pode ser construído para delineamentos não ortogonais. Porém, para a obtenção das somas de quadrados, razões apropriadas da estatística F e outras características de interesse o delineamento deve, necessariamente, ser ortogonal.

## 5.1 Classes dos fatores

Bailey (2005) define classe de um fator a partir das notações seguintes, em que  $F$  e  $G$ , são fatores de unidade e tratamento, respectivamente.

$$\begin{aligned} F(w) &= \text{nível do fator } F \text{ na unidade } w, \\ G(i) &= \text{nível do fator } G \text{ no tratamento } i \end{aligned}$$

Logo, a classe de  $F$  contendo a unidade  $\alpha$  é o conjunto das unidades  $w$  pertencentes ao conjunto de todas as unidades do experimento ( $\Omega$ ), tal que o nível do fator  $F$  na unidade  $w$  é igual ao nível de  $F$  na unidade  $\alpha$ .

Analogamente, a classe de  $G$  contendo o tratamento  $j$  é o conjunto dos tratamentos  $i$  pertencentes ao conjunto de todos os tratamentos do experimento ( $\mathcal{T}$ ), tal que o nível do fator  $G$  no tratamento  $i$  é igual ao nível de  $G$  no tratamento  $j$ .

## 5.2 Fatores ortogonais

Pode-se verificar a ortogonalidade entre fatores generalizados, com o auxílio da Equação 1, decorrente do Teorema 5.1, proposto por Bailey (2005).

**Teorema 5.1** *Os fatores  $F$  e  $G$  são ortogonais se, e somente se, as duas seguintes condições estão satisfeitas dentro de cada classe de  $F \vee G$  separadamente:*

- (i) *toda  $F$ -classe encontra toda  $G$ -classe;*
- (ii) *todas essas intersecções têm tamanho proporcional ao produto dos tamanhos das  $F$ -classes pelas  $G$ -classes relevantes.*

Assumindo a seguinte notação, em que:  $p_i$  é o tamanho da  $i$ -ésima classe de  $F$ ,  $q_j$  é o tamanho da  $j$ -ésima classe de  $G$  e  $s_{ij}$  é o tamanho da interseção entre as classes relevantes de  $F$  e  $G$ .

As condições (i) e (ii) podem ser substituídas pela condição de existência de uma constante  $c_\Delta$  para cada classe  $\Delta$  de  $F \vee G$ , tal que

$$s_{ij} = c_\Delta p_i q_j \tag{1}$$

uma vez que, se a interseção da  $i$ -ésima classe de  $F$  com a  $j$ -ésima classe de  $G$  é vazia então  $s_{ij} = 0$ .

Uma verificação rápida da ortogonalidade entre fatores generalizados pode ser a utilização da Definição 5.2, do Teorema 5.3 ou do Corolário 5.4, todos demonstrados por Bailey (2005).

**Definição 5.2** Uma coleção de fatores  $F_1, F_2, \dots, F_n$  é uma corrente de fatores se  $F_1 \prec F_2 \prec \dots \prec F_n$ .

**Teorema 5.3** *A coleção de fatores em uma corrente é composta por fatores mutuamente ortogonais.*

**Corolário 5.4** *Se os fatores  $F$ ,  $G$  e  $H$  são ortogonais dois a dois. Então  $F \vee G$  é ortogonal a  $H$ .*

### 5.3 Delineamento ortogonal

A ortogonalidade das estruturas de tratamento e unidade, bem como do delineamento podem ser verificadas através das definições 5.5, 5.6 e 5.7, respectivamente.

**Definição 5.5** Um conjunto  $\mathcal{G}$  de fatores não equivalentes em  $\mathcal{T}$  é uma estrutura de tratamento ortogonal se:

- (i)  $U \in \mathcal{G}$ ;
- (ii) se  $F \in \mathcal{G}$  e  $G \in \mathcal{G}$  então  $F \vee G \in \mathcal{G}$ ;
- (iii) se  $F \in \mathcal{G}$  e  $G \in \mathcal{G}$  então  $F$  é ortogonal a  $G$  (BAILEY, 2005).

**Definição 5.6** Um conjunto  $\mathcal{F}$  de fatores não equivalentes em  $\Omega$  é uma estrutura ortogonal de unidade se

- (i) todo fator em  $\mathcal{F}$  é uniforme;
- (ii)  $U \in \mathcal{F}$ ;
- (iii)  $E \in \mathcal{F}$ ;
- (iv) se  $F \in \mathcal{F}$  e  $G \in \mathcal{F}$  então  $F \vee G \in \mathcal{F}$ ;
- (v) se  $F \in \mathcal{F}$  e  $G \in \mathcal{F}$  então  $F \wedge G \in \mathcal{F}$ ;
- (vi) se  $F \in \mathcal{F}$  e  $G \in \mathcal{F}$  então  $F$  é ortogonal a  $G$  (BAILEY, 2005).

**Definição 5.7** Um delineamento cuja estrutura de unidade consiste de um conjunto  $\mathcal{F}$  de fatores em um conjunto  $\Omega$  de unidades, cuja estrutura de tratamento consiste de um conjunto  $\mathcal{G}$  de fatores em um conjunto  $\mathcal{T}$  de tratamentos e cujos tratamentos estão alocados a unidades de acordo com a função de delineamento  $T$  é um delineamento ortogonal se:

- (i)  $\mathcal{F}$  é uma estrutura de unidade ortogonal;
- (ii)  $\mathcal{G}$  é uma estrutura de tratamento ortogonal;
- (iii) a função  $T$  é tal que:
  - (a) se os fatores de tratamento  $G_1$  e  $G_2$  estão em  $\mathcal{G}$ , então, eles permanecem ortogonais entre si em  $\Omega$ ;
  - (b) se  $F \in \mathcal{F}$  e  $G \in \mathcal{G}$  então  $F$  é ortogonal a  $G$ ;
  - (c) se  $F \in \mathcal{F}$  e  $G \in \mathcal{G}$  então  $F \vee G \in \mathcal{G}$  (BAILEY, 2005).

#### 5.4 Aplicação

Do Teorema 5.3 conclui-se que os fatores generalizados de unidade são ortogonais entre si. Como todas as classes de tais fatores são uniformes e por convenção o fator Universal, é tanto um fator de tratamento quanto um fator de unidade, conforme a Definição 5.6, a estrutura de unidade é ortogonal.

Analogamente, segue do Teorema 5.3 que os fatores generalizados de tratamento são ortogonais entre si, com exceção dos fatores generalizados  $Controle \wedge \acute{E}poca$  e  $Controle \wedge Grau$ , cuja ortogonalidade pode ser verificada através da Equação 1, conforme segue.

Listando as classes dos fatores generalizados de interesse:

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo o tratamento  $T_1$ :

$$(\acute{E}poca)_1 = \{T_1\} \Rightarrow p_1 = 1.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo o tratamento  $T_2$ :

$$(\acute{E}poca)_2 = \{T_2, T_3, T_4\} \Rightarrow p_2 = 3.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo o tratamento  $T_5$ :

$$(\acute{E}poca)_3 = \{T_5, T_6, T_7\} \Rightarrow p_3 = 3.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo o tratamento  $T_8$ :

$$(\acute{E}poca)_4 = \{T_8, T_9, T_{10}\} \Rightarrow p_4 = 3.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo o tratamento  $T_1$ :

$$(Grau)_1 = \{T_1\} \Rightarrow q_1 = 1.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo o tratamento  $T_2$ :

$$(Grau)_2 = \{T_2, T_5, T_8\} \Rightarrow q_2 = 3.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo o tratamento  $T_3$ :

$$(Grau)_3 = \{T_3, T_6, T_9\} \Rightarrow q_3 = 3.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo o tratamento  $T_4$ :

$$(Grau)_4 = \{T_4, T_7, T_{10}\} \Rightarrow q_4 = 3.$$



Como o supremo entre  $Controle \wedge \acute{E}poca$  e  $Controle \wedge Grau$  é o fator generalizado  $Controle$ , listou-se também suas classes.

Classe de  $Controle$  contendo o tratamento  $T_1$ :

$$(Controle)_1 = \{T_1\}.$$

Classe de  $Controle$  contendo o tratamento  $T_2$ :

$$(Controle)_2 = \{T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}.$$

As intersecções entre as classes de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  e  $Controle \wedge Grau$  são dadas por:

Para  $(Controle)_1$ :

$$\begin{aligned} s_{11} = 1, p_1 = 1, q_1 = 1 \text{ e } \forall i, j \neq 1 \ s_{ij} = 0. \\ \Rightarrow 1 = c_{\Delta_1} \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow c_{\Delta_1} = 1. \end{aligned}$$

Para  $(Controle)_2$ :

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 3, \forall i = 2, 3, 4 \\ q_j = 3, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 1, \forall i, j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} 1 = c_{\Delta_2} \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow c_{\Delta_2} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Assim, existe uma constante  $c_{\Delta_1} = 1$  para a primeira classe de  $Controle$  e existe uma segunda constante  $c_{\Delta_2} = \frac{1}{9}$  para a segunda classe de  $Controle$ . Logo, verificou-se que os fatores generalizados  $Controle \wedge \acute{E}poca$  e  $Controle \wedge Grau$  são ortogonais. Portanto, conforme Definição 5.5 o experimento apresenta estrutura de tratamento ortogonal.

Segundo a Definição 5.7, para comprovar que o delineamento utilizado trata-se de um delineamento ortogonal deve-se ainda, verificar as condições apresentadas no item (iii).

Notou-se que a relação de marginalidade entre os fatores generalizados de tratamento não se altera quando considerado o subespaço indexado pelas unidades. Assim, bastou assegurar a ortogonalidade entre os fatores  $Controle \wedge \acute{E}poca$  e  $Controle \wedge Grau$ . Para tanto, organizaram-se os dados conforme a Tabela 2 e foram reescritas as classes dos fatores generalizados de tratamento.

Tabela - 2 - Organização dos dados, informando o número da unidade (índice) e o tratamento alocado à mesma.

Bloco I	T <sub>1 1</sub>	T <sub>2 2</sub>	T <sub>3 3</sub>	T <sub>4 4</sub>	T <sub>5 5</sub>	T <sub>6 6</sub>	T <sub>7 7</sub>	T <sub>8 8</sub>	T <sub>9 9</sub>	T <sub>10 10</sub>
Bloco II	T <sub>1 11</sub>	T <sub>2 12</sub>	T <sub>3 13</sub>	T <sub>4 14</sub>	T <sub>5 15</sub>	T <sub>6 16</sub>	T <sub>7 17</sub>	T <sub>8 18</sub>	T <sub>9 19</sub>	T <sub>10 20</sub>
Bloco III	T <sub>1 21</sub>	T <sub>2 22</sub>	T <sub>3 23</sub>	T <sub>4 24</sub>	T <sub>5 25</sub>	T <sub>6 26</sub>	T <sub>7 27</sub>	T <sub>8 28</sub>	T <sub>9 29</sub>	T <sub>10 30</sub>
Bloco IV	T <sub>1 31</sub>	T <sub>2 32</sub>	T <sub>3 33</sub>	T <sub>4 34</sub>	T <sub>5 35</sub>	T <sub>6 36</sub>	T <sub>7 37</sub>	T <sub>8 38</sub>	T <sub>9 39</sub>	T <sub>10 40</sub>

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo a unidade 1:

$$(\acute{E}poca)_1 = \{1, 11, 21, 31\} \Rightarrow p_1 = 4.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo a unidade 2:

$$(\acute{E}poca)_2 = \{2, 3, 4, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 32, 33, 34\} \Rightarrow p_2 = 12.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo a unidade 5:

$$(\acute{E}poca)_3 = \{5, 6, 7, 15, 16, 17, 25, 26, 27, 35, 36, 37\} \Rightarrow p_3 = 12.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca$  contendo a unidade 8:

$$(\acute{E}poca)_4 = \{8, 9, 10, 18, 19, 20, 28, 29, 30, 38, 39, 40\} \Rightarrow p_4 = 12.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo a unidade 1:

$$(Grau)_1 = \{1, 11, 21, 31\} \Rightarrow q_1 = 4.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo a unidade 2:

$$(Grau)_2 = \{2, 5, 8, 12, 15, 18, 22, 25, 28, 32, 35, 38\} \Rightarrow q_2 = 12.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo a unidade 3:

$$(Grau)_3 = \{3, 6, 9, 13, 16, 19, 23, 26, 29, 33, 36, 39\} \Rightarrow q_3 = 12.$$

Classe de  $Controle \wedge Grau$  contendo a unidade 4:

$$(Grau)_4 = \{4, 7, 10, 14, 17, 20, 24, 27, 30, 34, 37, 40\} \Rightarrow q_4 = 12.$$

Classe de *Controle* contendo a unidade 1:

$$(\textit{Controle})_1 = \{1, 11, 21, 31\}.$$

Classe de *Controle* contendo a unidade 2:

$$(\textit{Controle})_2 = \{2, \dots, 10, 12, \dots, 20, 22, \dots, 30, 32, \dots, 40\}.$$

As intersecções entre as classes de  $\textit{Controle} \wedge \textit{Época}$  e  $\textit{Controle} \wedge \textit{Grau}$  são dadas por:

Para  $(\textit{Controle})_1$ :

$$\begin{aligned} s_{11} = 4, p_1 = 4, q_1 = 4 \text{ e } \forall i, j \neq 1 \ s_{ij} = 0. \\ \Rightarrow 4 = c_{\Delta_1} \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow c_{\Delta_1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Para  $(\textit{Controle})_2$ :

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 12, \forall i = 2, 3, 4 \\ q_j = 12, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 4, \forall i, j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} 4 = c_{\Delta_2} \cdot 12 \cdot 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow c_{\Delta_2} = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Como existem as constantes para cada classe de *Controle*, concluiu-se que os fatores generalizados  $\textit{Controle} \wedge \textit{Época}$  e  $\textit{Controle} \wedge \textit{Grau}$  são ortogonais. Logo, verificou-se que os fatores generalizados de tratamentos permanecem ortogonais entre si quando consideradas as classes indexadas pelas unidades.

Construiu-se o diagrama de Hasse combinado para os fatores de tratamento e unidade, apresentado na Figura 3. Notou-se que o supremo entre quaisquer dois fatores de tratamento e unidade, será sempre o fator Universal,  $U$ , que por definição possui uma classe para todas as unidade. Cabe salientar que,  $\textit{Blocos} \wedge \textit{Parcelas}$  é o fator igualdade do experimento, ou seja,  $\textit{Blocos} \wedge \textit{Parcelas}$  possui uma classe para cada unidade.

A ortogonalidade entre os fatores generalizados *Controle* e *Blocos* será garantida pelo Corolário 5.4. Resta verificar a ortogonalidade entre  $\textit{Controle} \wedge \textit{Época}$  e *Blocos*,  $\textit{Controle} \wedge \textit{Grau}$  e *Blocos* e  $\textit{Controle} \wedge \textit{Época} \wedge \textit{Grau}$  e *Blocos*, pois a ortogonalidade entre os demais fatores generalizados é garantida pelo Teorema 5.3.

As classes de *Blocos* e  $\textit{Controle} \wedge \textit{Época} \wedge \textit{Grau}$  são descritas a seguir:

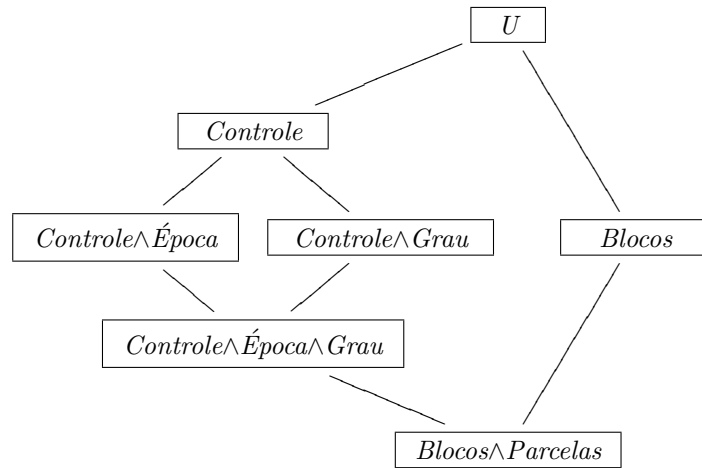


Figura - 3 - Diagrama de Hasse combinado para fatores de tratamento e de unidade.

Classe de *Blocos* contendo a unidade 1:

$$(Blocos)_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Classe de *Blocos* contendo a unidade 11:

$$(Blocos)_2 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Classe de *Blocos* contendo a unidade 21:

$$(Blocos)_3 = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}.$$

Classe de *Blocos* contendo a unidade 31:

$$(Blocos)_4 = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}.$$

Classe de *Controle^Época^Grau* contendo a unidade 1:

$$(\acute{E}poca^Grau)_1 = \{1, 11, 21, 31\}.$$

Classe de *Controle^Época^Grau* contendo a unidade 2:

$$(\acute{E}poca^Grau)_2 = \{2, 12, 22, 32\}.$$

Classe de *Controle^Época^Grau* contendo a unidade 3:

$$(\acute{E}poca^Grau)_3 = \{3, 13, 23, 33\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 4:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_4 = \{4, 14, 24, 34\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 5:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_5 = \{5, 15, 25, 35\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 6:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_6 = \{6, 16, 26, 36\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 7:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_7 = \{7, 17, 27, 37\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 8:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_8 = \{8, 18, 28, 38\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 9:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_9 = \{9, 19, 29, 39\}.$$

Classe de  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$  contendo a unidade 10:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau)_{10} = \{10, 20, 30, 40\}.$$

Verificou-se, conforme segue, a ortogonalidade entre os fatores generalizados  $Blocos$  e  $Controle \wedge \acute{E}poca$ ,  $Blocos$  e  $Controle \wedge Grau$  e,  $Blocos$  e  $Controle \wedge \acute{E}poca \wedge Grau$ .

Para  $(Blocos)_i$  e  $(\acute{E}poca)_1$ , com  $i = 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned} s_{i1} &= c_{\Delta_1} \cdot p_i \cdot q_1 \\ 1 &= c_{\Delta_1} \cdot 10 \cdot 4 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_{\Delta_1} = \frac{1}{40}.$$

Para  $(Blocos)_i$  e  $(\acute{E}poca)_j$ , com  $i = 1, \dots, 4$  e  $j = 2, 3, 4$ :

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 10, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 12, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 3, \forall i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta_2} \cdot p_i \cdot q_j \\ 3 &= c_{\Delta_2} \cdot 10 \cdot 12 \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{\Delta_2} = \frac{1}{40}.$$

De modo análogo,

Para  $(Blocos)_i$  e  $(Grau)_1$ , com  $i = 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned} s_{i1} &= c_{\Delta_1} \cdot p_i \cdot q_1 \\ 1 &= c_{\Delta_1} \cdot 10 \cdot 4 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_{\Delta_1} = \frac{1}{40}.$$

Para  $(Blocos)_i$  e  $(Grau)_j$ , com  $i = 1, \dots, 4$  e  $j = 2, 3, 4$ :

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 10, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 12, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 3, \forall i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta_2} \cdot p_i \cdot q_j \\ 3 &= c_{\Delta_2} \cdot 10 \cdot 12 \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{\Delta_2} = \frac{1}{40}.$$

Ainda,

Para  $(Blocos)_i$  e  $(\acute{E}poca \wedge Grau)_j$ , com  $i = 1, \dots, 4$  e  $j = 1, \dots, 10$ :

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 10, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 5, \forall j = 1, \dots, 10 \\ s_{ij} = 1, \forall i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 1, \dots, 10 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}s_{ij} &= c_{\Delta} \cdot p_i \cdot q_j \\ 1 &= c_{\Delta} \cdot 10 \cdot 5\end{aligned}$$

Então,

$$c_{\Delta} = \frac{1}{50}.$$

Como a constante  $c_{\Delta}$  existe para os dois casos, concluiu-se que o fator generalizado *Blocos* é ortogonal aos fatores generalizados *Controle* $\wedge$ *Época*, *Controle* $\wedge$ *Grau* e *Controle* $\wedge$ *Época* $\wedge$ *Grau*. Portanto, confirmou-se que o delineamento em questão é ortogonal.

## 6 Subespaços ortogonais

Considere os fatores  $F$  e  $G$ , de acordo com Bailey (2005) cada fator experimental gera um subespaço, do espaço vetorial do experimento, então  $V_F$  é o subespaço gerado por  $F$  e  $V_G$  é o subespaço gerado pelo fator  $G$ . A partir dos subespaços  $V$  são construídos os subespaços  $W$  para cada fator, de tal modo que sejam ortogonais entre si ( $W_F \perp W_G$ ).

Agora, tome os fatores  $F$  e  $G$ , tais que  $F < G$  e seja  $\mathbf{y} \in \left( \bigcap_{G > F} V_G \right)$ . Obter  $W_F$  significa identificar os vetores ortogonais a  $\mathbf{y}$  em  $V_F$ .

Seja então,  $V_F$  um subespaço de dimensão  $n_F$ ,  $\mathbf{B}_F$  uma base ortogonal para  $V_F$ , tal que

$$\mathbf{B}_F = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_{n_F}]$$

e  $\mathbf{P}_F \mathbf{y}$  a projeção ortogonal de  $\mathbf{y}$  em  $V_F$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_F \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{n_F} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i \\
&= \frac{b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \dots + b_{n1}y_n}{b_{11}^2 + b_{21}^2 + \dots + b_{n1}^2} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{n2}y_n}{b_{12}^2 + b_{22}^2 + \dots + b_{n2}^2} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \frac{b_{1n_F}y_1 + b_{2n_F}y_2 + \dots + b_{nn_F}y_n}{b_{1n_F}^2 + b_{2n_F}^2 + \dots + b_{nn_F}^2} \begin{pmatrix} b_{1n_F} \\ b_{2n_F} \\ \vdots \\ b_{nn_F} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathbf{b}'_1 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} \cdot \mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{b}'_2 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \frac{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \cdot \mathbf{b}_{n_F} \\
&= \mathbf{b}_1 \cdot \frac{\mathbf{b}'_1 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} + \mathbf{b}_2 \cdot \frac{\mathbf{b}'_2 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} + \dots + \mathbf{b}_{n_F} \cdot \frac{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \\
&= \left[ \mathbf{b}_1 \frac{1}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} \mathbf{b}'_1 + \mathbf{b}_2 \frac{1}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} \mathbf{b}'_2 + \dots + \mathbf{b}_{n_F} \frac{1}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \mathbf{b}'_{n_F} \right] \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_{n_F} \\ \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_{n_F} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F} \end{pmatrix}.$$

Mas,  $\mathbf{b}'_i \mathbf{b}_j = 0, \forall i \neq j$ . Assim,

$$\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F} \end{pmatrix}.$$

E,

$$(\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \end{pmatrix}.$$



Logo,

$$\mathbf{B}_F(\mathbf{B}'_F\mathbf{B}_F)^{-1}\mathbf{B}'_F\mathbf{y} = \left[ \mathbf{b}_1 \frac{1}{\mathbf{b}'_1\mathbf{b}_1} \mathbf{b}'_1 + \mathbf{b}_2 \frac{1}{\mathbf{b}'_2\mathbf{b}_2} \mathbf{b}'_2 + \dots + \mathbf{b}_{n_F} \frac{1}{\mathbf{b}'_{n_F}\mathbf{b}_{n_F}} \mathbf{b}'_{n_F} \right] \mathbf{y}.$$

Portanto,  $\mathbf{B}_F(\mathbf{B}'_F\mathbf{B}_F)^{-1}\mathbf{B}'_F\mathbf{y} = \mathbf{P}_F\mathbf{y}$ . Conclui-se então, que  $\mathbf{B}_F(\mathbf{B}'_F\mathbf{B}_F)^{-1}\mathbf{B}'_F$  é a matriz de projeção ortogonal de  $\mathbf{y}$  em  $V_F$ .

Então, a projeção ortogonal de  $\mathbf{y}$  em  $W_F$ ,  $\mathbf{Q}_F\mathbf{y}$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_F\mathbf{y} = \mathbf{B}_F(\mathbf{B}'_F\mathbf{B}_F)^{-1}\mathbf{B}'_F\mathbf{y} - \sum_{G \succ F} \mathbf{Q}_G\mathbf{y}.$$

## 6.1 Aplicação

As bases ortogonais dos subespaços gerados pelos fatores generalizados foram criadas seguindo a ordem padrão, em que o segundo fator varia mais rápido que o primeiro, assim fixou-se *Blocos* e variou-se *Blocos* $\wedge$ *Parcelas*.

Sabendo-se que existe um fator  $U$ , Universal, tanto de unidade quanto de tratamento, uma base ortogonal para  $V_U$  deu-se por  $\mathbf{B}_U$ :

$$\mathbf{B}_U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}_{40 \times 1}.$$

Fatores de tratamento:

Os fatores generalizados *Controle*, *Controle* $\wedge$ *Época*, *Controle* $\wedge$ *Grau* e *Controle* $\wedge$ *Época* $\wedge$ *Grau*, definem subespaços sobre o espaço vetorial  $V$  indexado por  $\mathcal{T}$ . Logo, uma base ortogonal para o subespaço definido pelo fator *Controle*,  $V_C$ , deu-se por:

$$\mathbf{B}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{40 \times 2} .$$

Uma base ortogonal para o subespaço  $V_E$ , definido pelo fator *Controle*  $\wedge$  *Época*:

$$\mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{40 \times 4} .$$

Base ortogonal para o subespaço  $V_G$ , definido pelo fator *Controle*  $\wedge$  *Grau*:

$$\mathbf{B}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{40 \times 4}$$

Base ortogonal para o subespaço definido pelo fator *Controle*∧*Época*∧*Grau*:

$$\mathbf{B}_{EG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{40 \times 40}$$

Então,  $V_C$  é o subespaço gerado por  $\mathbf{B}_C$ , logo  $V_C$  é composto pelos vetores que são combinações lineares dos vetores em  $\mathbf{B}_C$ .

De modo análogo definiram-se  $V_E$ ,  $V_G$  e  $V_{EG}$ , os quais são subespaços gerados por  $\mathbf{B}_E$ ,  $\mathbf{B}_G$  e  $\mathbf{B}_{EG}$ , respectivamente.

Fatores de unidade:

Os fatores generalizados *Blocos* e *Blocos*∧*Parcelas* definem subespaços sobre o espaço vetorial  $V$  indexado por  $\Omega$ . Assim, uma base ortogonal para o subespaço definido por *Blocos* deu-se por:

$$\mathbf{B}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{40 \times 4}$$

Logo,  $V_B$  é o subespaço gerado pela base ortogonal  $\mathbf{B}_B$ , isto é,  $V_B$  é descrito pela combinação linear de  $\mathbf{B}_B$ .

E uma base ortogonal para o subespaço definido pelo fator *Blocos*∧*Parcelas* é dada pela matriz Identidade de ordem 40 ( $\mathbf{I}_{40}$ ), uma vez que *Blocos*∧*Parcelas*

é o fator Igualdade, ou seja, possui uma classe para cada unidade. Sendo assim,  $V_P$  é gerado por  $\mathbf{I}_{40}$ .

Assim, as matrizes de projeção ortogonal de um determinado vetor  $\mathbf{y}$  nos respectivos subespaços foram dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_U &= \mathbf{B}_U(\mathbf{B}'_U\mathbf{B}_U)^{-1}\mathbf{B}'_U \\ \mathbf{P}_B &= \mathbf{B}_B(\mathbf{B}'_B\mathbf{B}_B)^{-1}\mathbf{B}'_B \\ \mathbf{P}_P &= \mathbf{B}_P(\mathbf{B}'_P\mathbf{B}_P)^{-1}\mathbf{B}'_P \\ \mathbf{P}_C &= \mathbf{B}_C(\mathbf{B}'_C\mathbf{B}_C)^{-1}\mathbf{B}'_C \\ \mathbf{P}_E &= \mathbf{B}_E(\mathbf{B}'_E\mathbf{B}_E)^{-1}\mathbf{B}'_E \\ \mathbf{P}_G &= \mathbf{B}_G(\mathbf{B}'_G\mathbf{B}_G)^{-1}\mathbf{B}'_G \\ \mathbf{P}_{EG} &= \mathbf{B}_{EG}(\mathbf{B}'_{EG}\mathbf{B}_{EG})^{-1}\mathbf{B}'_{EG}\end{aligned}$$

### 6.1.1 Diagrama de Hasse e somas de quadrados

Sejam os fatores  $F$  e  $G$ , tais que  $F \prec G$  e o vetor de dados  $\mathbf{y}$ . De acordo com Bailey (2005),

$$SQ_{\text{crua}}(F) = \|\mathbf{P}_{F\mathbf{y}}\|^2 = \|\mathbf{Q}_{F\mathbf{y}}\|^2 + \sum_{G \succ F} \|\mathbf{Q}_{G\mathbf{y}}\|^2.$$

Logo,

$$SQ(F) = \|\mathbf{Q}_{F\mathbf{y}}\|^2 = \|\mathbf{P}_{F\mathbf{y}}\|^2 - \sum_{G \succ F} \|\mathbf{Q}_{G\mathbf{y}}\|^2.$$

Mas, pela Seção 6, pode-se escrever:

$$SQ(F) = \|\mathbf{B}_F(\mathbf{B}'_F\mathbf{B}_F)^{-1}\mathbf{B}'_F\mathbf{y}\|^2 - \sum_{G \succ F} \|\mathbf{Q}_{G\mathbf{y}}\|^2 \quad (2)$$

**Regra 5:** Seja,  $\mathbf{y}$  o vetor de observações de interesse. No diagrama, do lado esquerdo de cada fator generalizado, acrescenta-se a norma ao quadrado da projeção ortogonal de  $\mathbf{y}$  no respectivo subespaço  $W$  e do lado direito as expressões em função das normas ao quadrado das projeções ortogonais de  $\mathbf{y}$  no subespaço  $V$  do fator em questão e dos subespaços  $V_s$  dos fatores marginais a ele.

## 6.2 Aplicação

Diagrama de Hasse para fatores de unidade:

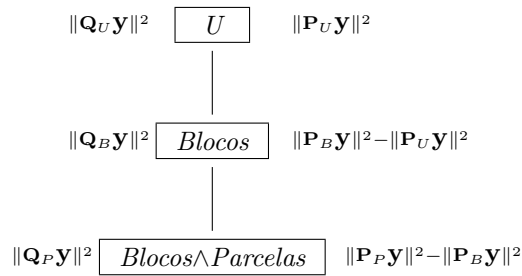


Figura - 4 - Somas de quadrados dos fatores de unidade em termos de projeções ortogonais

Diagrama de Hasse para fatores de tratamento:

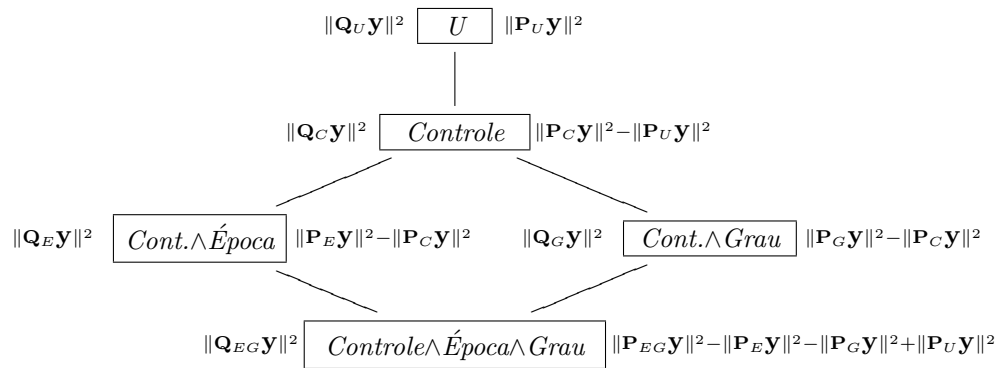


Figura - 5 - Somas de quadrados dos fatores de tratamento em termos de projeções ortogonais

## 7 Análise de variância, modelo maximal e esperança dos quadrados médios

A tabela da análise de variância pode ser formada através dos passos listados na Regra 6, descrita por Brien (2007).

**Regra 6:**

1. Listam-se todos os fatores de unidade na coluna para *Fonte*, seus respectivos números de graus de liberdade na coluna *gl* e suas somas de quadrados na coluna *SQ*;
2. Colocam-se os fatores de tratamentos indentados sob o fator de unidade com o qual é confundido, acrescentam-se seus números de graus de liberdade e, se o delineamento for ortogonal, suas somas de quadrados;

3. As fontes *Residuais* são adicionadas de tal forma que estejam indentadas ao respectivo fator de unidade, abaixo de todos os fatores de tratamento identados ao mesmo, e seus números de graus de liberdade e somas de quadrados. Para experimentos ortogonais, a soma de quadrados para Resíduos é a diferença das normas ao quadrados das projeções ortogonais a partir da qual é calculada.

A esperança e a variância dos termos do modelo maximal foram calculadas segundo a Regra 7, dada a seguir:

**Regra 7:**

1. Designa-se cada fator do experimento como fixo ou aleatório;
2. Determina-se se o fator é um termo potencial para esperança ou variância como segue: fatores que envolvem somente fatores (originais) fixos são termos potenciais para a esperança e fatores que contém pelo menos um fator (original) aleatório se tornará termo para a variação. Se não houver fator de unidade que tenha sido classificado como aleatório, o termo consistindo de todos os fatores de unidade será designado como aleatório;
3. A esperança do modelo maximal é então a soma de todos os termos esperados exceto aqueles que são marginais a um termo no modelo; se não existirem termos esperados, o modelo consiste de um único termo para a média geral;
4. A variância do modelo maximal é a soma de todos os termos de variação (BRIEN, 2007).

Brien (2007) sugere os seguintes passos para a construção das esperanças dos quadrados médios para um experimento segundo um delineamento ortogonal:

**Regra 8:**

1. Para cada fórmula estrutural, toma-se o diagrama de Hasse dos fatores generalizados para a fórmula e, para cada fator generalizado  $F$ , substitui-se o número de combinações de níveis,  $f$ , à esquerda por **i**)  $(n/f) \sigma_F^2$  se  $F$  é um termo na variação do modelo, ou **ii**)  $q(\psi)$  se  $F$  é um termo potencial da esperança do modelo. À direita de cada fator generalizado  $F$ , informa-se a respectiva contribuição para a esperança do quadrado médio incluindo:
  - a) a expressão a esquerda para toda variação do fator generalizado  $V$  marginal a  $F$  ( $F \preceq V$ ), iniciando com o mais abaixo de  $F$  até  $V$ , isto é, a expressão a esquerda para todo  $V$  diretamente ou indiretamente conectado a  $F$ ; e
  - b) a expressão para  $F$  a sua esquerda.
2. Adicionam-se as contribuições dos fatores de unidade à esperança do quadrado médio, calcula-se no diagrama de Hasse, para a tabela de análise de variância, colocando cada contribuição de acordo com sua fonte na tabela, a menos que a fonte tenha sido desdobrada, neste caso coloca-se a contribuição de acordo com a fonte na qual tenha sido desdobrada.

3. Repete-se o passo 2 para a outra fórmula estrutural, adicionando a contribuição daqueles que já estão na tabela. Entretanto se o fator generalizado ocorrer mais que uma vez no diagrama de Hasse, seu  $(n/f) \sigma_F^2$  ou  $q(\psi)$  é adicionado somente uma vez.

### 7.1 Aplicação

Os diagramas de Hasse com as contribuições para a esperança dos quadrados médios foram:

Para fatores de unidade, em que todos foram considerados aleatórios.

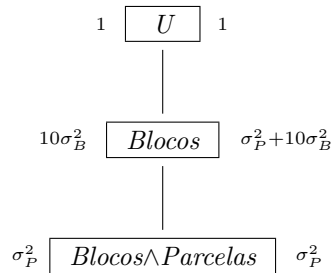


Figura - 6 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de unidade

Para fatores de tratamento, os quais foram considerados fixos.

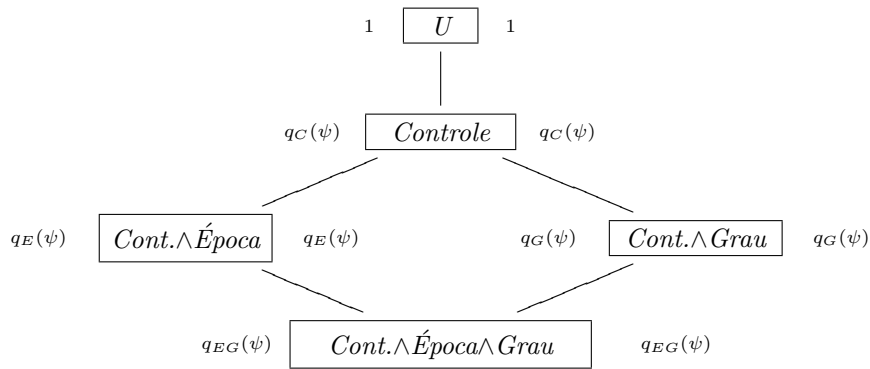


Figura - 7 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de tratamento

Como todos os fatores de tratamento foram alocados às unidades (*Parcelas*), o esquema da tabela da análise de variância fica:

Tabela - 3 - Esquema da análise de variância.

Fonte de variação	gl	SQ	E(QM)
Total	39		
<i>Blocos</i>	3	$\ \mathbf{Q}_{BY}\ ^2$	$\sigma_P^2 + 10\sigma_B^2$
<i>Parcelas</i> [ <i>Blocos</i> ]	36	$\ \mathbf{Q}_{PY}\ ^2$	
<i>Controle</i>	1	$\ \mathbf{Q}_{CY}\ ^2$	$\sigma_P^2 + q_C(\psi)$
<i>Época</i> [ <i>Controle</i> ]	2	$\ \mathbf{Q}_{EY}\ ^2$	$\sigma_P^2 + q_E(\psi)$
<i>Grau</i> [ <i>Controle</i> ]	2	$\ \mathbf{Q}_{GY}\ ^2$	$\sigma_P^2 + q_G(\psi)$
<i>Época:Grau</i> [ <i>Controle</i> ]	4	$\ \mathbf{Q}_{EGY}\ ^2$	$\sigma_P^2 + q_{EG}(\psi)$
Resíduo	27	por diferença	$\sigma_P^2$

## Conclusões

O presente estudo confirmou a praticidade das técnicas propostas pelo diagrama de Hasse, propondo ao leitor uma opção adicional de planejamento, análise e principalmente do ensino da estatística experimental, uma vez que o aluno poderá visualizar a estrutura presente entre os fatores e fundamentar através da álgebra linear os cálculos das quantidades desejadas.

Vale ressaltar que tal ferramenta pode facilitar também a compreensão por parte do pesquisador quanto aos cálculos e análises realizadas, e por parte do estatístico, que não mais necessita planejar o experimento seguindo um delineamento conhecido.

Em contrapartida, um obstáculo é a verificação da ortogonalidade, passo de maior dificuldade, que pode ser maior ou menor de acordo com o número de fatores generalizados do experimento e da variação em sua estrutura.

## Agradecimentos

Este trabalho é parte da dissertação de Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica do primeiro autor no Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, Piracicaba e foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), através do Programa de Demanda Social.

ALCARDE, R.; PIEDADE, S. M. S.; MOURÃO, G. B. Hasse diagram and its applications on experimentation. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.26, n.1, p.25-49, 2008. *Rev. Mat. Estat.* (São Paulo), v. 26, n.1, p. 25-49, 2008.



- **ABSTRACT:** The increase of statistics applications on the most diverse research areas has defined complex statistics designs turn its planning and analysis really hard. The Hasse diagram is a graphic tool that has as objective turn the comprehension of the present structure among the experimental factors easiest. More than a better experiment overview, by the rules proposed on the literature, this diagram gives the degrees of freedom for each factor. By the condition of design orthogonality, the nucleus matrix of quadratic form for the sum of squares and the expected values for the mean squares can also be obtained, given the proper ratio for F test application. And, to give an example about the rules and the application of this tool, experimental data of Marandu grazing was used, with a detailed experiment structure, showing the orthogonality within the factors and with an indication of the analysis of variance model.
- **KEYWORDS:** Graphic tool; vectorial subspaces; orthogonality.

## Referências

- ALCARDE, R. *Fundamentos do diagrama de Hasse e aplicações à experimentação*, 2007. 97f. Dissertação (Mestrado em Agronomia - Estatística e Experimentação Agrônômica), Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo – USP, Piracicaba, 2007.
- BAILEY, R. A. *Hasse diagrams in designed experiments: a pictorial aid to thinking about blocking, stratification, degrees of freedom, randomization, and analysis of variance*. In: SIMPÓSIO DE ESTATÍSTICA APLICADA À EXPERIMENTAÇÃO AGRONÔMICA, 11., 2005, Londrina. *Minicurso...* Londrina: UEL, 2005. 96p.
- BRIEN, C. J. Determining the analysis of variance table. In: ——— *Statistical Modelling*. Disponível em: <<http://chris.brien.name/ee2/course/SM06.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2007.
- LOHR, S. L. Hasse diagram in statistical consulting and teaching. *Am. Stat.*, New York, v.39, n.4, p.376-381, 1995.
- MACHADO, A. de A. et al. *Estatística experimental uma abordagem baseada no planejamento e no uso de recursos computacionais*. In: SIMPÓSIO DE ESTATÍSTICA APLICADA À EXPERIMENTAÇÃO AGRONÔMICA, 11., 2005, Londrina *Minicurso...* Londrina: UEL, 2005. 300p.
- TAYLOR Jr., W. H.; HILTON, H. G. A Structure diagram symbolization for analysis of variance. *Am. Stat.*, New York, v.35, n.2, p.85-93, 1981.

Recebido em 26.11.2007.

Aprovado após revisão em 09.04.2008.