

## MODELOS DE RESPOSTA AO ITEM COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO T-ASSIMÉTRICA

Alessandra Noeli Craveiro PINHEIRO<sup>1</sup>  
Josemar RODRIGUES<sup>1</sup>

- RESUMO: A Teoria de Resposta ao Item (TRI) é um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar uma resposta certa a um item (questão) como função dos parâmetros do item e da habilidade do indivíduo. O objetivo de nosso trabalho é desenvolver modelos alternativos na TRI-NA (Teoria de Resposta ao Item Normal Assimétrica) mais flexíveis que os existentes. Com esta finalidade em mente introduzimos a distribuição t-assimétrica (Azzalini e Capitanio 1999). A teoria desenvolvida neste artigo introduz alguns resultados similares aos de Bazán (2005) para a t-assimétrica e uma aplicação a um conjunto de dados reais utilizando métodos bayesianos é considerada.
- PALAVRAS-CHAVE: TRI; Análise Bayesiana; t-assimétrica; normais assimétricas.

### 1 Introdução

A Teoria de Resposta ao Item (TRI) propõe modelos que representam a relação entre a probabilidade de uma resposta certa a um item e a habilidade de um aluno.

A maioria dos modelos existentes na TRI consideram que tanto a habilidade referente aos indivíduos quanto a Curva Característica do Item (CCI) possuem simetria. A CCI representa a probabilidade de uma resposta certa em função dos parâmetros dos itens, ou seja,  $p_{ij} = F(m_{ij})$ ,  $m_{ij} = a_j u_i - b_j$  em que  $a_j$  e  $b_j$  são os parâmetros dos itens,  $u_i$  é a habilidade do indivíduo  $i$ ,  $F(\cdot)$  é dada pela f.d.a de uma determinada distribuição e é conhecida como Curva Característica do Item.

Bazán (2005) propôs uma família de modelos normais assimétricos na TRI. Estes modelos conseguem captar a assimetria presente nos dados e consideram a CCI como a f.d.a da normal assimétrica. Mas nosso interesse é desenvolver modelos

---

<sup>1</sup>Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Caixa Postal 676, CEP: 13565-905, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: [alenoeli@yahoo.com.br](mailto:alenoeli@yahoo.com.br)/  
[vjosemar@power.ufscar.br](mailto:vjosemar@power.ufscar.br)

mais flexíveis, que detectem além da assimetria a presença de pontos atípicos. Com esta finalidade utilizamos a distribuição t-assimétrica que é mais robusta que a normal assimétrica.

O trabalho é organizado da seguinte maneira:

Na Seção 2 apresentamos a distribuição t-assimétrica e suas principais características. Na Seção 3 introduzimos o modelo probito t-assimétrico usando a abordagem de dados aumentados proposto por Chen *et al* (1999) e mostramos que este modelo possui resultados similares aos de Bazán (2005). Na Seção 4 apresentamos as prioris necessárias para realizar a Inferência Bayesiana. Na Seção 5 uma aplicação a um conjunto de dados reais é apresentada e no Apêndice apresentamos a demonstração dos teoremas encontrados no artigo.

## 2 Distribuição t-assimétrica

A distribuição t-assimétrica é uma sub classe importante da família de distribuições elípticas assimétricas (ver Branco e Valle 2004). A densidade de uma variável  $Z$  com distribuição t-assimétrica é dada pela equação (1).

$$f_Z(z) = 2t_\nu(z)T_{\nu+1} \left[ \lambda z \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+z^2}} \right], \quad (1)$$

onde  $t_\nu$  representa a f.d.p de uma distribuição t-Student com  $\nu$  graus de liberdades e  $T_{\nu+1}$  representa a f.d.a de uma distribuição t-Student com  $\nu+1$  graus de liberdades e  $Z$  representa uma distribuição t-assimétrica com parâmetro de assimetria  $\lambda$  e  $\nu$  graus de liberdades.

Para provar alguns resultados desta seção usamos o Lema 2.1 dado por Azzalini e Capitanio (2003).

**Lema 2.1.** *Se  $V$  é uma variável aleatória com distribuição de probabilidades Gama, isto é,  $V \sim G(\psi, \xi)$ , então para qualquer  $a, b, \in \mathbb{R}$*

$$E_V \left\{ \Phi(a\sqrt{V} + b) \right\} = P(T' \leq a\sqrt{\psi/\xi}) \quad (2)$$

em que  $T'$  possui uma distribuição de probabilidades t-Student com parâmetro de não centralidade  $-b$  e  $2\psi$  graus de liberdade.

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em Azzalini e Capitanio (2003).

Uma importante característica da distribuição t-Student, é que esta pode ser representada como a mistura de normais. Para maiores detalhes consultar Johnson e Kotz (1970). Este resultado também é válido para obtermos a distribuição t-assimétrica, porém é necessário utilizar a distribuição normal assimétrica, como pode ser visto no Teorema 2.2.

**Teorema 2.2. (Teorema da representação estocástica da t-assimétrica)**  
 Considere as variáveis aleatórias  $V$  e  $Z$  independentes, tal que  $V$  possui uma distribuição Gama e  $Z$  possui uma distribuição Normal Assimétrica, isto é,  $V \sim G\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$  e  $Z \sim NA(\lambda)$ . Então a variável aleatória  $X = \frac{Z}{\sqrt{V}}$  possui uma distribuição t-assimétrica com parâmetro de assimetria  $\lambda$  e  $\nu$  graus de liberdade.

$$X = \frac{Z}{\sqrt{V}} \sim tA(0, 1, \lambda, \nu). \quad (3)$$

Usando o Teorema da representação estocástica da t-assimétrica (2.2) e o Lema 2.1, podemos obter a f.d.a da t-assimétrica, e esta é dada pelo Teorema 2.3.

**Teorema 2.3.** A função de distribuição acumulada (f.d.a) da variável aleatória  $X$ , em que  $X \sim tA(0, 1, \lambda, \nu)$ , é dada por:

$$\int_0^\infty T_\nu\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) f_W(w) dw, \quad (4)$$

em que  $T_\nu$  é a f.d.a de uma distribuição t-Student com  $\nu$  g.l e parâmetro de não centralidade  $-b = \frac{\delta w}{\sqrt{1-\delta^2}}$  e  $W$  é uma variável aleatória com distribuição normal padrão positiva.

**Teorema 2.4.** A função de distribuição acumulada (f.d.a) da variável aleatória  $X$ , em que  $X \sim tA(0, 1, \lambda, \nu)$ , pode ser, alternativamente, dada por:

$$F_X = 2 T_2\left(\left(\begin{matrix} 0 \\ x \end{matrix}\right); \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} 1 & -\delta \\ -\delta & 1 \end{matrix}\right)\right) \quad \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad (5)$$

em que  $T_2$  representa a f.d.a da t-Student com vetor de médias nulo e com coeficiente de correlação  $-\delta$ .

De acordo com estes Teoremas, percebemos uma grande similaridade da distribuição t-assimétrica com a distribuição normal assimétrica, (ver Azzalini e Capitanio 1999) o que facilita a obtenção do modelo probito t-assimétrico, como veremos a seguir.

### 3 Verossimilhança aumentada para o modelo probito t-assimétrico na TRI

Nesta seção, desenvolvemos o modelo probito t-assimétrico abordando variáveis latentes auxiliares como no trabalho de Chen *et al* (1999). Esta estrutura possui características similares às apresentadas pelos modelos probito assimétricos dados por Bazán (2005). Consideramos as variáveis auxiliares da seguinte maneira:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & Z_{ij} > 0, \\ 0, & Z_{ij} \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$Z_{ij} = m_{ij} + e_{ij},$$

$$e_{ij} \sim tA(0, 1, -\lambda_j, \nu), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Sabemos de acordo com o Teorema 2.2 que a distribuição t-assimétrica pode ser escrita como uma mistura da Normal Assimétrica, assim podemos escrever os erros da forma:

$$e_{ij} = \sqrt{V_{ij}}X_{ij},$$

em que  $V_{ij} \sim GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$  e  $X_{ij} \sim NA(-\lambda_j)$ .  
Reescrevendo  $Z_{ij}$ , obtemos:

$$Z_{ij} = m_{ij} + \sqrt{V_{ij}}X_{ij}, \quad Z_{ij} \sim tA(m_{ij}, 1, -\lambda_j, \nu) \quad (8)$$

Note que  $Z_{ij}|V_{ij} = v_{ij} \sim NA(m_{ij}, v_{ij}, -\lambda_j)$ . Ao considerarmos a representação de Henze (1986) para a variável  $X_{ij}$ , facilitamos a maneira de representar a variável  $Z_{ij}|V_{ij}$ .

$$Z_{ij}|V_{ij} = m_{ij} - \sqrt{V_{ij}}(\delta_j R_{ij} + \sqrt{1 - \delta_j^2} W_{ij}), \quad (9)$$

onde  $R_{ij} \sim N(0, 1)I(r_{ij} > 0)$  e  $W_{ij} \sim N(0, 1)$ .

Seja  $Z'_{ij} = (Z_{ij}|V_{ij}, R_{ij})$ , note que:

$$Z'_{ij} \sim N(m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}}, v_{ij}(1 - \delta_j^2)). \quad (10)$$

Logo, a função de verossimilhança para dados aumentados  $D = (Z, V, R, y)$  no modelo t-assimétrico, em que  $Z, V, R$ , são matrizes  $n \times k$  é dada por:

$$L(U, \beta, \delta|D) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \phi(Z'_{ij}; m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}}, v_{ij}(1 - \delta_j^2)) \times \phi(r_{ij}; 0, 1)I(r_{ij} > 0)f(v_{ij})I' \quad (11)$$

onde  $f(v_{ij})$  é a f.d.p de uma distribuição  $GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$  e  $I' = I(Z'_{ij} > 0)I(y_{ij} = 1) + I(Z'_{ij} \leq 0)I(y_{ij} = 0)$ .

Considerando  $Z'_{ij}$  como em (10), e usando o Lema 2.1, dado por Azzalini e Capitanio (2003), podemos obter facilmente a distribuição de  $p_{ij}$ .

**Proposição 3.1.** *O modelo TRI proibido t-assimétrico, com  $k$  itens e  $n$  indivíduos, com  $y_{ij} \sim Bernoulli(p_{ij})$  e  $p_{ij} = F_{tA}(m_{ij}, 1, -\lambda_j, \nu)$  na qual  $m_{ij} = a_j u_i - b_j$ , é equivalentemente definido considerando que*

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & Z'_{ij} > 0, \\ 0, & Z'_{ij} \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

em que  $Z'_{ij} \sim N(m_{ij} - \delta_j R_{ij} \sqrt{V_{ij}}, (1 - \delta_j^2)V_{ij})$ ,  $V_{ij}$  possui uma distribuição gama invertida, isto é,  $V_{ij} \sim GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ , e  $R_{ij} \sim N(0, 1)I(r_{ij} > 0)$   $j = 1, \dots, k$  e  $i = 1, \dots, n$ .

De acordo com a equação (5) podemos escrever  $p_{ij}$  como uma mistura da f.d.a de uma t-Student ponderada pela normal truncada. Esta representação é similar a que Bazán (2005) obteve em que  $p_{ij}$  foi obtido como uma mistura da f.d.a de uma normal ponderada pela normal truncada resultando na f.d.a de uma distribuição normal assimétrica, ( $p_{ij} = \Phi_{NA}(m_{ij}, \lambda)$ ).

## 4 Especificação de priors

Precisamos especificar uma distribuição a priori para  $\beta$ ,  $u$  e  $\lambda$ . De acordo com as propostas usualmente consideradas na literatura, assumimos independência a priori entre os itens e a habilidade dos indivíduos.

$$\pi(\beta, u, \lambda) = \prod_{j=1}^k g_{1j}(\beta_j) g_{2j}(\lambda_j) \prod_{i=1}^n g_{3i}(u_i), \quad (13)$$

em que  $g_{1j}(\beta_j) = g_{11j}(a_j)g_{12j}(b_j)$ .

Assim como em Sahu (2002), consideramos  $g_{11j}(\cdot)$  possui a densidade da normal positiva, ou seja,  $a_j \sim N(\mu_a, \sigma_a^2)I(a_j > 0)$ ,  $j = 1, \dots, k$  e  $g_{12j}(\cdot)$  possui a densidade da  $N(0, \sigma_b^2)$ ,  $j = 1, \dots, k$  e portanto  $g_{1j}(\cdot)$  é a densidade da  $N_2(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$ , com vetor de médias  $\mu_\beta = (\mu_a, 0)$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_\beta = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{pmatrix}$ .

Para  $g_{3i}(u_i)$  consideramos a densidade da  $NA(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, n$  com  $\theta = (0, 1, k)$  e  $g_{2j}(\cdot)$  com densidade  $NA(w)$ , com  $w$  considerado fixo.

Para o parâmetro de assimetria  $\lambda$ , podemos considerar a parametrização  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ . De acordo com esta parametrização  $\delta \in [-1, 1]$  o que nos sugere utilizar uma distribuição a priori uniforme para  $\delta$ , ou seja,  $\delta \sim U[-1, 1]$ , a qual nos induz ao espaço paramétrico de  $\lambda$  uma distribuição t-Student com os parâmetros de posição, escala e graus de liberdade dados respectivamente por 0, 0.5 e 2 ( $\lambda \sim t(0, 0.5, 2)$ ). Para maiores detalhes ver Rodríguez (2005).

### 4.1 Estrutura Hierárquica

De acordo com as priors especificadas na Seção 4 a estrutura hierárquica necessária para realizar o processo MCMC via Winbugs é dada abaixo.

$$Z'_{ij} | \beta_j, U_i, \delta_j, y_{ij} \sim N(m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}}, v_{ij} 1 - \delta_j^2) I';$$

$$R_{ij} \sim N(0, 1) I(r_{ij} > 0);$$

$$V_{ij} \sim GI\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right);$$

$$U_i \sim NA(\kappa);$$

$$a_j \sim N(\mu_a, \sigma_a^2) I(a_j > 0);$$

$$b_j \sim N(0, \sigma_b^2);$$

$$\delta_j \sim U[-1, 1];$$

em que  $I' = [I(Z'_{ij} > 0)I(y_{ij} = 1) + I(Z'_{ij} \leq 0)I(y_{ij} = 0)]$ .

Essa estrutura foi utilizada na implementação dos modelos t-assimétricos na Seção 5.

## 5 Aplicação

O conjunto de dados utilizado nesta seção corresponde a um teste de matemática que contém 14 itens e foi aplicado a 131 alunos de sexta série de escolas peruanas.

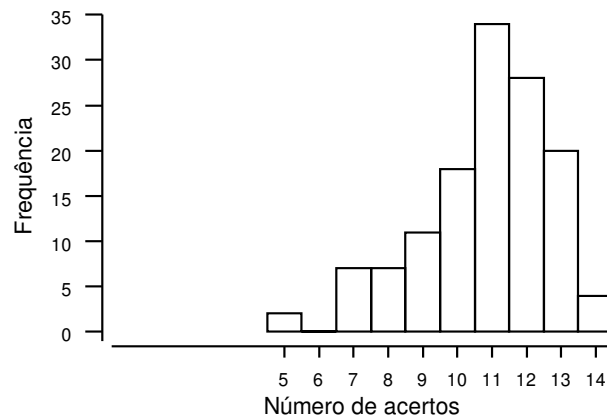


Figura 1 - Histograma dos escores.

Através da Figura 1, notamos a presença de assimetria à esquerda e *outliers*. Deste modo vamos selecionar o modelo que melhor se ajusta a este conjunto de dados dentre os modelos assimétricos na TRI e obter as estimativas dos parâmetros de interesse.

Através do software Winbugs obtemos o DIC que foi o critério utilizado para a seleção de modelos. Para o procedimento foi necessário gerar 4100 iterações para o aquecimento da cadeia e em seguida gerar 200000 iterações, com um salto igual a 100, para diminuir a autocorrelação presente entre os valores amostrados. A priori usada foi proposta por Spiegelhalter (1996) e é dada na Tabela 1. Os DIC's obtidos para cada modelo podem ser vistos na Tabela 2.

Tabela 1 - *Priori para os parâmetros dos itens*

Priori	$a_j \sim N(0,1)I(a_j > 0)$	$b_j \sim N(0,10000)$	$\delta_j \sim U(-1,1)$
--------	-----------------------------	-----------------------	-------------------------

Tabela 2 - *Seleção de modelos considerando  $U \sim N(0,1)$*

Modelo	Dbar	Dhat	$\rho D$	DIC
PAN	1320.430	1382.800	-62.372	1258.060
PtA-N (4)	1345.370	1664.070	-318.697	1026.670
PtA-N (8)	1389.340	1857.810	-468.475	920.863
PtA-N (10)	1398.670	1916.700	-518.028	880.644
PtA-N (12)	1404.100	1949.470	-545.370	858.729
PtA-N (14)	1408.420	1953.710	-545.286	863.134
PtA-N (15)	1410.510	1965.470	-554.954	855.557
PtA-N (20)	1415.670	1958.150	-542.476	873.193

Um gráfico para analisar a tendência do DIC conforme mudamos os g.l dos modelos PtA-N é dado na Figura 2. Observamos que o valor do DIC vai diminuindo conforme aumentamos os g.l até 15 e depois começa a oscilar.

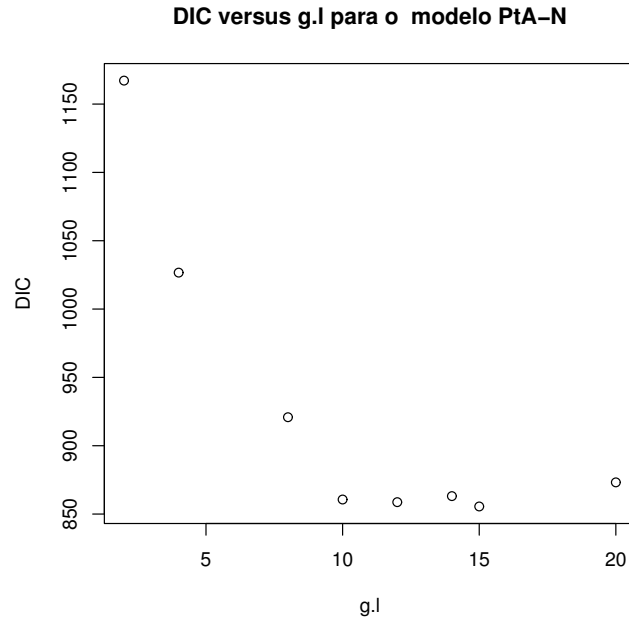


Figura 2 - Tendência do DIC.

De acordo com a Tabela 2, concluímos que o melhor modelo segundo o DIC é

o modelo PtA-N com 15 g.l, assim estimativas para estes parâmetros são dadas na Tabela 3, analisando esta tabela notamos que os itens mais significativos do teste são os itens 9, 11, 12 e 14. O item 9 é considerado o menos discriminatório enquanto que o item 11 é o mais discriminatório do teste, o item mais difícil é o item 12 e o mais fácil é o item 14 pois apresenta o menor valor de  $b$ . Em relação à média das habilidades notamos um valor muito próximo de zero.

Tabela 3 - Estatísticas do modelo PtA-N com 15 g.l

	média	dp	erro	2.5%	mediana	97.5%
a[1]	0.737	0.437	0.008	0.110	0.657	1.858
a[2]	0.475	0.405	0.008	0.020	0.372	1.536
a[3]	0.759	0.432	0.007	0.141	0.680	1.882
a[4]	1.112	0.514	0.011	0.276	1.045	2.361
a[5]	0.714	0.460	0.009	0.082	0.621	1.845
a[6]	0.555	0.428	0.008	0.036	0.445	1.633
a[7]	0.916	0.479	0.009	0.172	0.854	2.069
a[8]	1.156	0.499	0.008	0.371	1.085	2.298
a[9]	0.370	0.360	0.007	0.011	0.263	1.383
a[10]	0.693	0.432	0.008	0.085	0.616	1.785
a[11]	1.549	0.568	0.012	0.607	1.501	2.809
a[12]	0.602	0.426	0.008	0.060	0.509	1.748
a[13]	0.677	0.434	0.009	0.068	0.591	1.773
a[14]	0.638	0.471	0.010	0.034	0.537	1.824
b[1]	-1.82	1.437	0.046	-5.766	-1.357	-0.505
b[2]	-3.112	2.643	0.094	-10.6	-2.169	-0.781
b[3]	-0.105	0.646	0.018	-1.305	-0.097	1.002
b[4]	-3.002	1.52	0.046	-6.919	-2.587	-1.473
b[5]	-2.756	2.141	0.066	-9.078	-2.033	-0.888
b[6]	0.967	1.106	0.034	-0.278	0.71	4.018
b[7]	-2.894	1.747	0.051	-7.669	-2.36	-1.282
b[8]	-2.301	1.081	0.024	-5.015	-2.027	-1.093
b[9]	-2.536	2.279	0.084	-9.057	-1.715	-0.444
b[10]	-2.571	1.965	0.072	-8.137	-1.953	-0.840
b[11]	-3.117	1.013	0.024	-5.57	-2.939	-1.679
b[12]	1.018	1.086	0.033	-0.169	0.752	3.968
b[13]	-2.174	1.731	0.051	-6.96	-1.60	-0.631
b[14]	-4.186	3.218	0.126	-14.07	-3.00	-1.464
média u	0.001	0.087	0.001	-0.170	0.001	0.1746
dp u	0.995	0.060	0.001	0.876	0.995	1.115

## Conclusões

Neste artigo é proposto uma nova ligação assimétrica para os modelos probitos com distribuição acumulada da t-assimétrica. O uso desta distribuição é interessante, pois além de detectar a assimetria presente nos dados, podemos detectar a presença de pontos discrepantes.

Uma característica importante desse novo modelo é a existência de uma similaridade entre a Proposição 3.1 e a proposição dada por Bazán (2005), que considera  $p_{ij}$  como a f.d.a da normal assimétrica no ponto  $m_{ij}$ . A Proposição 3.1



poderia ser vista como uma “extensão” do resultado de Bazán (2005) quando os graus de liberdade tendem ao infinito.

PINHEIRO, A. N. C.; RODRIGUES, J. Item response model with t-skew ligation function. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.26, n.1, p.131-143, 2008.

- **ABSTRACT:** *The Item Response Theory (IRT) is a set of mathematical models representing the probability of an individual to take a correct response of an item and its ability. The purpose of our research is to show the models formulated in the IRT under the skew-normal distributions and to develop flexible alternative models. With this goal in mind we introduced the t-skew distributions (Azzalini et al. 1999) and results similar to Bazán's results are obtained. Some applications using Bayesian methods are also considered.*
- **KEYWORDS:** *Item Response Theory; skew-normal distributions; t-skew distributions; Bayesian analysis.*

## Referências

ALBERT, J. H. Bayesian estimation of normal ogive item response curves using Gibbs sampling. *J. Educ. Stat.*, Alexandria, v.17, p.251-269, 1992.

ALBERT, J. H.; CHIB, S. Bayesian analysis of binary and polichotomous response data. *JASA*, Melville, v.88, p.669-679, 1993.

AZZALINI, A.; CAPITANIO, A. Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution. *J. R. Stat. Soc., Ser. B, Methodol.*, London, v.61, p.579-602, 1999.

AZZALINI, A.; CAPITANIO, A. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution. *J. R. Stat. Soc., Ser. B, Methodol.*, London, v.65, p.367-389, 2003.

AZZALINI, A.; DALLA VALLE, A. The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, London, v.83, p.715-726, 1996.

AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. *Scand. J. Stat.*, Copenhagen, v.12, p.171-178, 1985.

AZZALINI, A. *The skew-normal probability distribution (and related distributions, such as the skew-t)*. Disponível em: <<http://azzalini.stat.unipd.it/SN>>. Acesso em: 10 ago. 2006.

BAZÁN, J. *Uma família de modelos de resposta ao item normal assimétrica*. 2005. Tese (Doutorado em Estatística) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

BAZÁN, J.; BOLFARINE, H.; BRANCO, J. L. A skew item response model. *Bayesian Anal.*, Durhan, v.1, p.861-892, 2006.

BERNARDO, J. M.; SMITH, A. F. M. *Bayesian theory*. Chischester, Wiley, 1994.

- BRANCO, D. M.; VALLE, A. *Distribuições elípticas assimétricas*. In: SINAPE, 16., 2004, Caxambu. *Anais...* Caxambu: SBMAC, 2004.
- BRANCO, D. M. *et al.* Bayesian and classical solutions for binomial cytogenetic dosimetry problem. *J. Data Sci.*, New York, v.1, p.65-82, 2003.
- CHEN, M.; DEY, D. K.; SHAO, Q. A new skewed link model for dichotomous quantal response data. *JASA*, Melville, v.94, p.1171-1186, 1999.
- HAMBLETON, R. K.; SWAMINATHAN, H. *Item response theory: principles and applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1985.
- HENZE, N. A Probabilistic representation of the skew-normal distribution. *Scand. J. Stat.*, Copenhagen, v.13, p.271-275, 1986.
- JOHNSON N. L.; KOTZ S. *Distributions in statistics. Continuous univariate distributions - 2*. New York: Wiley, 1970.
- RODRÍGUEZ C. *Inferência Bayesiana no modelo normal assimétrico*. 2005. Dissertação (Mestrado em Estatística)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- SAHU, S. K. Bayesian estimation and model choice in item response models. *J. Stat. Comput. Simul.*, New York, v.72, p.217-232, 2002.
- SPIEGELHALTER, D. J.; THOMAS, A., BEST, N. G., GILKS, W. R. *BUGS 0.5 examples (Volume 1 Version i)*. Cambridge: University of Cambridge, 1996.
- SPIEGELHALTER, D. J.; BEST, N. G.; CARLIN, B. P.; VAN DER LINDE, A. Bayesian measures of model complexity and fit. *J. R. Stat. Soc., Ser. B, Method.*, London, v.64, p.583-639, 2002.
- The BUGS project. Disponível em: <<http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/content.shtml>>. Acesso em: 10 out. 2006.
- VAN DER LINDEN, W. J.; HAMBLETON, R. K. *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer-Verlag, 1997.

Recebido em 16.10.2007.

Aprovado após revisão em 08.04.2008.

## Apêndice: Demonstração de Teoremas e Proposições

**Demonstração do Teorema 2.2:** De acordo com as definições das variáveis aleatórias  $V$  e  $Z$  temos,

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P(X \leq x) = P(V^{-\frac{1}{2}}Z \leq x) = \int_0^\infty P\left(Z \leq v^{\frac{1}{2}}x | V = v\right) f_V(v) dv \\
 &= \int_0^\infty F_Z(v^{\frac{1}{2}}x) f_V(v) dv \\
 f_X(x) &= \int_0^\infty \frac{d}{dx} F_Z(v^{\frac{1}{2}}x) f_V(v) dv \\
 &= \int_0^\infty f_Z(v^{\frac{1}{2}}x) v^{\frac{1}{2}} f_V(v) dv \\
 &= \int_0^\infty 2\phi(v^{\frac{1}{2}}x) \Phi(\lambda v^{\frac{1}{2}}x) v^{\frac{1}{2}} f_V(v) dv \\
 &= 2 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi}} v^{\frac{\nu+1}{2}-1} \exp\left\{-\left(\frac{\nu+x^2}{2}\right)v\right\} \Phi(\lambda v^{\frac{1}{2}}x) dv \\
 &= 2 \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\left(\frac{\nu+x^2}{2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \times \\
 &\quad \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\nu+x^2}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} v^{\frac{\nu+1}{2}-1} \exp\left\{-\left(\frac{\nu+x^2}{2}\right)v\right\} \Phi(\lambda v^{\frac{1}{2}}x) dv.
 \end{aligned}$$

De acordo com o Lema 2.1, obtemos:  $a = \lambda x$ ,  $b = 0$ ,  $\Psi = \frac{\nu+1}{2}$ ,  $\xi = \frac{\nu+x^2}{2}$ ,  $g.l = \nu+1$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f_X(x) &= 2 \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\left(\frac{\nu+x^2}{2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} P\left\{T' \leq \lambda x \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}}\right\} \\
 &\propto 2t_\nu T_{\nu+1}\left(\lambda x \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}}\right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Demonstração do Teorema 2.3:** Considere  $X = \frac{Z}{\sqrt{V}}$ , como no Teorema 2.2,

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x) &= P(V^{-\frac{1}{2}}Z \leq x) = \int_0^\infty P(Z \leq xv^{\frac{1}{2}} | V = v) f_V(v) dv \\
 &= \int_0^\infty P(\delta W + \sqrt{1-\delta^2}Y \leq xv^{\frac{1}{2}} | V = v) f_V(v) dv, \quad \text{com } \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty P\left(Y \leq \frac{xv^{\frac{1}{2}} - \delta w}{\sqrt{1-\delta^2}} | V = v, W = w\right) f_V(v) dv f_W(w) dw
 \end{aligned}$$

De acordo com o Lema 2.1, obtemos:  $a = \frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}$ ,  $b = \frac{-\delta w}{\sqrt{1-\delta^2}}$  e  $g.l = \nu$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_X(x) &= \int_0^\infty P\left(T' \leq \frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) f_W(w) dw \\ &= \int_0^\infty T_\nu\left(\frac{x}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) f_W(w) dw, \end{aligned}$$

em que  $T_\nu$  é a f.d.a de uma t-Student com  $\nu$  g.l e parâmetro de não centralidade  $-b = \frac{\delta w}{\sqrt{1-\delta^2}}$ . ■

**Demonstração do Teorema 2.4:** Considere  $X = \frac{Z}{\sqrt{V}}$ , como no Teorema 2.2,

$$P(X \leq x) = P(V^{-\frac{1}{2}}Z \leq x).$$

Podemos escrever a distribuição normal assimétrica de uma variável aleatória  $Z$  onde  $Z = Y_2|Y_1 > 0$ , em que  $(Y_1, Y_2) \sim N_2$ (normal bivariada) com densidades marginais padronizadas e coeficiente de correlação  $\delta$ , (Azzalini, 1985). Assim,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(V^{-\frac{1}{2}}Y_2 \leq x|Y_1 > 0) \\ &= 2P\left\{V^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right\} \\ &= 2P\left\{t_2 \leq \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

em que  $t_2$  possui densidade t-Student bivariada. Logo,

$$\Rightarrow F_X = 2 T_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\delta \\ -\delta & 1 \end{pmatrix}\right). \blacksquare$$

**Demonstração da Proposição 3.1:** A probabilidade de que o indivíduo  $i$  acerte a questão  $j$  dadas as variáveis  $V_{ij}$ ,  $R_{ij}$ , o vetor de parâmetros dos itens e as habilidades é dada por

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(y_{ij} = 1|u, \beta, \lambda) = P(Z'_{ij} > 0|u, \beta, \lambda) \\ &= P\left(\frac{Z'_{ij} - (m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}})}{\sqrt{(1-\delta_j^2)v_{ij}}} > -\frac{m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}}}{\sqrt{(1-\delta_j^2)v_{ij}}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Considere } X_{ij} = \frac{Z'_{ij} - (m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}})}{\sqrt{(1-\delta_j^2)v_{ij}}}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= P\left(-X_{ij} \leq \left(\frac{m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}}}{\sqrt{(1 - \delta_j^2)v_{ij}}}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{m_{ij} - \delta_j r_{ij} \sqrt{v_{ij}}}{\sqrt{(1 - \delta_j^2)v_{ij}}}\right), \text{ considere } V_{ij}^* = \frac{1}{V_{ij}} \\
&= \Phi\left(\frac{m_{ij} \sqrt{v_{ij}^*}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}} - \frac{\delta_j r_{ij}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}\right)
\end{aligned}$$

Assim a probabilidade do indivíduo  $i$  acertar a questão  $j$  é dada por

$$p_{ij} = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \Phi\left(\frac{m_{ij} \sqrt{v_{ij}^*}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}} - \frac{\delta_j r_{ij}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}\right) g(v_{ij}^*) dv_{ij}^* \right] f(r_{ij}) dr_{ij},$$

em que  $f$  e  $g$  representam respectivamente as f.d.p de  $R_{ij}$  e  $V_{ij}^*$ . Usando o Lema 2.1, temos:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= \int_0^\infty P\left(T' \leq \frac{m_{ij}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}\right) f(r_{ij}) dr_{ij}, \quad T' \sim t\left(\frac{\delta_j r_{ij}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}, 1, \nu\right) \\
&\Rightarrow p_{ij} = \int_0^\infty T_\nu\left(\frac{m_{ij}}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}\right) f(r_{ij}) dr_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o Teorema 2.3, podemos dizer que,

$$p_{ij} = F_{tA}(m_{ij}, 1, -\lambda, \nu). \blacksquare$$