AVALIAÇÃO DA ROBUSTEZ DE UM INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A RAZÃO DE TAXAS DE POISSON OBTIDO POR UM MODELO LOG-LINEAR

Elisa Norberto Ferreira SANTOS[1]
Marcelo Angelo CIRILLO[1]

▪ RESUMO : A estimação de taxas provenientes de duas populações Poisson (λ_i), com (i =1,2) independentes, foi proposta Gart e Zweifel (1967), considerando um método intervalar, construído a partir das premissas de um modelo log-linear. Com este propósito o presente trabalho objetivou-se avaliar a robustez desse método mediante, as amostras geradas com a presença e ausência do efeito de superdispersão, considerando diferentes valores paramétricos e correções de continuidade. Para isso, utilizou-se simulação Monte Carlo, na qual, obteve-se de forma empírica resultados referentes a probabilidade de cobertura e amplitude média intervalar. Concluiu-se que mediante ao efeito da superdispersão o método em questão apresentou resultados mais discrepantes em relação à precisão, quando comparado com a situação favorável para aplicação do mesmo, representada pelas amostras livres do efeito da superdispersão.

▪ PALAVRAS-CHAVE**:** Monte Carlo; probabilidade de cobertura; superdispersão; log-linear.

1 Introdução

As aplicações da distribuição de Poisson basicamente referem-se à modelagem do número de ocorrência de eventos raros, sendo esses subentendidos como eventos que apresentam baixa probabilidade de ocorrência. De acordo com essa propriedade, emprega-se o modelo de Poisson em diversas situações, desde que o número de ocorrência de um evento raro seja contado num intervalo de tempo previamente fixado. Como exemplo, pode-se citar o número de acidentes registrados em uma estrada durante um final de semana.

Nos casos em que a variável resposta proveniente de contagem, e deseja-se estudar sua relação com variáveis explicativas, utiliza-se a técnica de regressão, acoplada ao modelo Poisson, originando-se então o modelo de regressão de Poisson. Tal modelo, pertence a uma classe especial de modelos lineares generalizados**.** Wang et al. 1996, comentam a aplicabilidade deste modelo em estudos de coorte, retrospectivos ou prospectivos (Dean & Lawless, 1989) e, naturalmente, a ocorrência de eventos raros, conforme já relatado anteriormente. Contudo, vale ressaltar que a amostra observada poderá apresentar a superdispersão, ou seja, variância amostral ser excedente a variância

[1] Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Caixa Postal 3037, CEP:37200-000, Lavras, MG, Brasil. Email: *norelisa@hotmail.com* / *macufla@gmail.com*

nominal inerente ao modelo de Poisson. As principais conseqüências, citadas por Hinde & Demétrio 1998, são inferidas na subestimação do erro padrão dos estimadores, cuja principal conseqüência ocasionará inferências imprecisas.

Em se tratando de estudar igualdade das taxas médias (λ_i) i=1,2, provenientes de duas populações independentes distribuídas por uma Poisson (λ_i), Sahai & Misra 1992, descreveram vários métodos. Entre eles, destaca-se um método assintótico, baseado na aproximação normal em relação à distribuição de Poisson, utilizado para construir intervalos de confiança para soma das taxas. Um outro método, proposto por Dobson et al. 1991, foi dado no que tange a obtenção dos limites de confiança aproximados para as somas de pesos de parâmetros de Poisson como funções lineares de limites de confiança para um único parâmetro de Poisson. Intuitivamente, esse procedimento trata da estimação de um único parâmetro da distribuição Poisson, considerado como a soma de pesos de λ_i.

Em virtude do que foi mencionado, este trabalho se propôs a avaliar a robustez de um método de estimação, indicado para razão de duas taxas de populações Poisson (λ_i) (i=1,2) assumindo que essas taxas foram provenientes de populações correlacionadas, isso é, Poisson (λ_i,ρ) (i=1,2), diferentes valores paramétricos e correções de continuidade.

2 Metodologia

O presente trabalho consistiu em avaliar a robustez de um método de estimação intervalar proposto para inferir sobre razão de duas taxas de populações Poisson (λ_i) (i=1,2) independentes. No entanto, objetivando avaliar o desempenho deste método, nas populações cujas unidades amostrais apresentaram-se correlacionadas, simulou-se duas variáveis aleatórias seguindo a distribuição Poisson correlacionada (Luceño, 1995), especificada por, Y_i~Poisson (λ_i,ρ) (i=1,2), onde o parâmetro ρ correspondeu ao grau de correlação previamente especificado nos valores ρ = 0; 0,1; 0,5 e 0,9.

Os valores amostrais de Y_i~Poisson (λ_i,ρ) (i=1,2) gerados neste trabalho foram obtidos, seguindo a metodologia encontrada em Tutia, Diniz e Leite 2002, na qual, trata a distribuição binomial correlacionada BC(n_i,p_i,ρ) onde especificados esses parâmetros a distribuição de probabilidade é dada por

$$P\left(Y_i = y_i | n_i, p_i, \rho\right) = \binom{n_i}{y_i} p_i^{y_i} \left(1 - p_i\right)^{n_i - y_i} \left(1 - \rho\right) I_{A(1)}(y_i) + p_i^{\frac{y_i}{n_i}} \left(1 - p_i\right)^{\frac{(n_i - y_i)}{n_i}} \rho I_{A(2)}(y_i) \qquad (1)$$

onde , $A_1=\{0,1,...,n_i\}$; $A_2=\{0,n_i\}$ e $y_i=0,...,n_i$.

Com base em (1) a distribuição de Y_i ~ Poisson(λ_i,ρ) (i=1,2) foi feita considerando apenas $n_i \rightarrow \infty$, $p_i \rightarrow 0$. Assim sendo, tem-se a estrutura de média e variância (Luceño, 1995) dada por

$$E\left(Y_i\right) = \lambda_i(1 - \rho) \qquad (2)$$

$$Var\left(Y_i\right) = (1 - \rho)\left(\lambda_i + \rho\lambda_i^2\right) \qquad (3)$$

Por meio da expressão (2) observa-se que $\rho \rightarrow 1$, em média os valores amostrais gerados são mais próximo de zero, o que de certa forma, resulta em um modelo com excesso de zeros. Evidentemente, para ρ = 0 originou-se o modelo de Poisson ordinário, isto é, Y_i~Poisson (λ_i) para i=1,2.

Após a geração dessas amostras, o parâmetro correspondente à razão das taxas das duas populações foi representado por $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$. O intervalo de confiança avaliado neste trabalho foi construído por Gart e Zweifel, 1967 seguindo as premissas de um modelo log-linear definido por $E(Y)=X\boldsymbol{\beta}$, em que, $Y^t = [Y_1 + c, Y_2 + c]$ sendo c um valor referente a correção de continuidade; X é a componente sistemática representada pela matriz de delineamento (4) e $\boldsymbol{\beta}$ o vetor de parâmetros (5).

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Com essas especificações, o vetor de parâmetros β é caracterizado por

$$\beta_0 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} \; ; \; \beta_1 = ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right). \tag{5}$$

O estimador de máxima verossimilhança para β_1 (Gart e Zweifel, 1967) e estimativa de sua variância são:

$$\hat{\beta}_1 = ln\left(\frac{(y_1 + c)}{(y_2 + c)}\right) \; e \; Var(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{(y_1 + c)} + \frac{1}{(y_2 + c)}. \tag{6}$$

Os limites intervalares de 100(1-α)% para a λ, segundo Price e Bonett 2000, são obtidos considerando o I.C de Wald para β_1, fazendo $\exp(\hat{\beta}_1)$. Desta obtém-se

$$LI_\lambda = \frac{y_1 + c}{y_2 + c} exp\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{y_1 + c} + \frac{1}{y_2 + c}} \right) \tag{7}$$

$$LS_\lambda = \frac{y_1 + c}{y_2 + c} exp\left(z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{y_1 + c} + \frac{1}{y_2 + c}} \right) \tag{8}$$

Isto posto, admitiu-se neste trabalho diferentes valores da correção de continuidade, sendo estes assumidos por c=0,5 e c=0,375 probabilidade do nível de confiança fixados em 90 e 95% e valores paramétricos, cuja razão λ fosse resultante em λ= 0,05 ; 0,1; 0,6 e 1. Além dos valores do grau de correlação entre as unidades amostrais (ρ) já relatados anteriormente.

Pelo fato de que a robustez do intervalo proposto para a razão de taxas de Poisson, cujos limites foram definidos em (7) e (8), ter sido avaliada sobre a distribuição de Poisson correlacionada, verificou-se uma alta probabilidade de a observação gerada ser zero, assim sendo, os limites intervalares resultariam em uma indeterminação. Tendo em vista esse fato, justifica-se necessariamente o uso de um valor definido em c, sendo este, interpretado como uma da correção de continuidade. Importante ressaltar que os autores Price e Bonett 2000, adotam c=0,5 e para populações independentes. A contribuição deste trabalho é verificada no desempenho do intervalo referido sobre uma amostra de populações correlacionadas, considerando diferentes correções de continuidade.

De acordo com essas configurações, elaborou-se um programa em R versão (2.3.1), utilizando o método Monte Carlo, com 5000 simulações. Para cada simulação, computou-se a probabilidade de cobertura e amplitude média intervalar. Os resultados encontram-se descritos na seção (3).

3 Resultados e discussão

Os resultados encontrados nas Tabelas 1 e 2 foram obtidos via o método de Monte Carlo, de tal forma que para cada configuração representada pela combinação dos valores das probabilidades de confiança, correções de continuidade (c) e valores paramétricos (λ). Em face disso, a robustez do método proposto por Price e Bonett 2000, foi verificada comparando-se os resultados referentes à probabilidade de cobertura e amplitude média intervalar, obtidos nas amostras geradas por meio da distribuição Poisson correlacionada.

Importante ressaltar que a probabilidade de cobertura obtida neste trabalho via o método de Monte Carlo, foi estimada, computando-se a proporção referente ao número de intervalos em que o valor paramétrico λ estivesse contido, em relação ao número total de simulações. Para estes intervalos, computou-se a amplitude média intervalar, com o propósito de inferir sobre a precisão do método avaliado.

Assumindo valores de $\rho \neq 0$, a amostra gerada resultou no efeito da superdispersão. Em particular para ρ = 0,90 este efeito foi mais pronunciado pelo excesso de valores zeros contidos na amostra. Especificamente para ρ =0,0 a amostra gerada, manteve-se a pressuposição de independência, sendo esta, fundamental para obtenção dos limites intervalares (6) para o parâmetro λ. Portanto, isto posto há um respaldo em afirmar que o método intervalar, proposto por Price e Bonett 2000, é robusto em relação ao efeito da superdispersão, caso os resultados obtidos sejam próximos ao resultado ideal, proporcionado pela condição de independência imposta por (ρ = 0).

Em se tratando de avaliar a valor assumido pela correção de continuidade, representada pelos valores c=0,5 e 0,375, manteve-se o interesse neste trabalho em função de que os limites de confiança (6) e (7), formulados por Gart e Zweifel 1967, foram derivados da transformação logit. Tal formulação foi imposta a correção de continuidade c = 0,5. Contudo, nenhum resultado referente a outras correções foi abordado pelos referidos autores.

Uma outra questão a ser salientada, devido a sua interpretação mais usual, refere-se ao valor de λ=1. Neste caso, pode-se inferir sobre a igualdade dos λ_i (i=1,2). Isto posto, procede-se com a discussão dos resultados, fixados a probabilidade de confiança em 90% e 95%. Tais resultados encontram-se respectivamente nas Tabelas 1 e 2.

Os resultados encontrados na Tabela 1 evidenciaram que para todos os valores paramétricos avaliados, o intervalo proposto apresentou uma probabilidade de cobertura superior ao nível de confiança fixado em 90%. Tal resultado já era esperado, em função da própria formalização que o intervalo de confiança foi construído. Contudo, o resultado de maior destaque foi verificado na situação em que a amostra gerada, considerando ρ=0,9 apresentou um número excessivo de zeros.

Tabela 1 - Probabilidades de cobertura e amplitude média intervalar proveniente do intervalo de 90% de confiança para o parâmetro λ sob diferentes valores paramétricos, correções de continuidade e grau de correlação entre as unidades amostrais

λ	Correção (c)	ρ	Prob. Cobertura	Amplitude média
0,05	0,375	0,0	0,914	0,137
		0,1	0,841	13,741
		0,5	0,743	83,606
		0,9	0,908	164,157
	0,5	0,0	0,909	0,137
		0,1	0,845	6,842
		0,5	0,741	45,598
		0,9	0,908	28,343
0,1	0,375	0,0	0,861	0,729
		0,1	0,836	59,564
		0,5	0,676	145,533
		0,9	0,886	289,956
	0,5	0,0	0,823	0,726
		0,1	0,814	10,802
		0,5	0,625	77,706
		0,9	0,866	93,688
0,6	0,375	0,0	0,900	0,478
		0,1	0,743	107,213
		0,5	0,477	623,288
		0,9	0,803	963,533
	0,5	0,0	0,902	0,480
		0,1	0,741	59,453
		0,5	0,473	350,147
		0,9	0,804	439,881
1	0,375	0,0	0,999	6,442
		0,1	0,734	193,959
		0,5	0,483	915,668
		0,9	0,806	1416,602
	0,5	0,0	1,000	5,930
		0,1	0,738	93,626
		0,5	0,480	631,553
		0,9	0,805	862,959

Tabela 2 - Probabilidades de cobertura e amplitude média intervalar proveniente do intervalo de 95% de confiança para o parâmetro λ sobre diferentes valores paramétricos, correções de continuidade e grau de correlação entre as unidades amostrais

λ	Correção (c)	ρ	Prob. Cobertura	Amplitude média
0,05	0,375	0,0	0,953	0,178
		0,1	0,875	22,189
		0,5	0,759	80,127
		0,9	0,909	290,928
	0,5	0,0	0,943	0,178
		0,1	0,874	11,599
		0,5	0,745	74,379
		0,9	0,899	147,508
0,1	0,375	0,0	0,920	0,968
		0,1	0,878	36,873
		0,5	0,754	116,731
		0,9	0,899	567,968
	0,5	0,0	0,903	0,976
		0,1	0,876	18,002
		0,5	0,738	94,014
		0,9	0,911	151,926
0,6	0,375	0,0	0,951	0,575
		0,1	0,778	252,489
		0,5	0,480	918,196
		0,9	0,801	1884,434
	0,5	0,0	0,957	0,577
		0,1	0,789	118,055
		0,5	0,471	678,726
		0,9	0,810	793,156
1	0,375	0,0	1,000	9,158
		0,1	0,783	292,719
		0,5	0,483	1431,979
		0,9	0,796	3067,107
	0,5	0,0	1,000	8,353
		0,1	0,787	137,436
		0,5	0,483	666,873
		0,9	0,801	1432,809

Nesta situação, notou-se que para todos os valores paramétricos (λ) simulados, as probabilidades de cobertura apresentaram valores condizentes com o nível nominal especificado em 90%, pois mediante a essa superdispersão, ocasionada pelo número excessivo de zero, o intervalo de confiança resultou em uma máxima diferença de 0,10 nas probabilidades de cobertura, quando comparada com situação ideal ($\rho = 0$) para se aplicar o intervalo para λ.

Esse resultado verificado em relação ao desempenho do intervalo de confiança construído sobre o argumento de modelos log-lineares, torna-se mais atrativo, se compararmos com outros intervalos utilizados para estimar a razão de taxas de duas Poissons. Desta forma, podemos citar alguns resultados obtidos por Price e Bonett 2000, os quais, destacam-se os intervalos de confiança bayesiano com priori não informativa (Berger, 1985); Binomial (Agresti e Coull, 1998) em algumas situações revelaram a menor probabilidade de cobertura aproximadamente 0,80. Importante ressaltar que os intervalos mencionados foram construídos sobre a suposição de que as unidades amostrais fossem independentes.

Um resultado de maior interesse prático, que mereceu ser enfatizado referiu-se a situação de homogeneidade entre as taxas médias, ou seja, ($\lambda = 1$). Para essa situação, observou-se que o intervalo construído sobre premissas do modelo log-linear, manteve-se como o mesmo desempenho, quando analisado o valor da correção de continuidade, assumindo os valores c=0,5 e 0,375. Este fato é facilmente detectado em função das probabilidades empíricas obtidas terem sido aproximadas ao valor de confiança nominal especificado, com exceção do caso em que a correção assumida foi de c=0,5 e λ =0,1. Portanto, há indícios que dependendo da proporção entre as taxas médias, o intervalo de confiança poderá apresentar deficiências em relação a probabilidade de cobertura, assim torna-se factível melhores estudos sobre quais valores serão mais adequados a serem considerados na aplicação desse intervalo.

Em relação à precisão do intervalo, notoriamente nas situações onde as amostras foram geradas, considerando a superdispersão ocasionada pelos valores de $\rho \neq 0$, observou-se que o intervalo de confiança não foi preciso, o que de certa forma, torna-se inviável seu uso para amostras com a presença da superdispersão. Em se tratando da situação ideal ($\rho = 0$) para aplicação do intervalo observou-se uma melhor precisão e que o valor da correção de continuidade assumida não surtiu diferenças expressivas.

Os resultados encontrados na Tabela 2 corresponderam às mesmas situações avaliadas anteriormente diferenciando apenas no nível nominal de confiança, fixado em 95%. De um modo geral, constatou-se que a mudança deste nível proporcionou resultados similares, quando comparado com o nível de confiança pré-estabelecido em 90%. Entretanto, alguns resultados mereceram destaque, assim tem-se a seguinte discussão.

Os resultados encontrados na Tabela 2 que mereceram destaque referiram-se ao desempenho do intervalo de confiança baseado nas premissas de um modelo log-linear sob o valor paramétrico λ. Neste caso, notou-se que para os valores inferiores de $\lambda = 0{,}05$ e 0,1 todas as probabilidades empíricas de cobertura, incluindo os casos com diferentes correções de continuidade (c) foram abaixo do nível de confiança nominal. Evidentemente, observou-se uma exceção na situação configurada por ($\lambda = 0{,}05$; $c = 0{,}375$ e $\rho = 0$), no entanto, nada se pode concluir sobre o desempenho do referido intervalo, uma que vez que trata-se de um estudo empírico, na qual, proporcionou um resultado apenas para essa configuração, além do mais, presente o erro de Monte Carlo.

Um outro importante resultado verificado foi dado em função do desempenho do intervalo, mediante a situação em que a amostra apresentava o efeito da superdispersão ocasionada pelo excesso valores zeros ($\rho = 0,9$). Diante desta situação, observou-se que o referido intervalo de confiança proporcionou resultados similares, quando comparado com as amostras livres desse efeito ($\rho = 0,0$).

Especificamente para valores referentes à razão de taxas, iguais ou superiores a 0,6. Na situação favorável para realizar estimação intervalar referente à λ, isto é, ($\rho = 0,0$) verificou-se que para os dois valores de correção de continuidade assumidos, o intervalo resultou em probabilidades de cobertura condizentes com o nível nominal especificado. Em se tratando das amostras com dispersão, verificou-se que o intervalo proposto apresentou probabilidades bem inferiores a 95%. Com isso, confrontando estes resultados, com os resultados encontrados na Tabela 1, há evidências estatísticas para afirmar que o intervalo de confiança baseado na aproximação log-linear não é robusto em relação ao efeito da superdispersão, dado a sua imprecisão verificada por meio da amplitude média intervalar em conjunto com a probabilidade de cobertura.

Para ilustrar o uso do intervalo de confiança para a razão de duas taxa Poisson, considera-se o seguinte exemplo didático (Ferreira, 2005). Um pesquisador da área de zootecnia conseguiu uma série de dados dos últimos 120 anos, com o registro do número de uma doença rara em eqüinos de duas raças (Mangalarga e Quarto-de-Milha). Considerando que a distribuição de Poisson é caracterizada pelo número de ocorrências de um evento de interesse em um intervalo de tempo, podemos assumir que o número de doenças da raça Mangalarga e Quarto-de-Milha, respectivamente identificada pelas variáveis aleatórias X_1~Poisson (λ_1) e X_2~Poisson (λ_2), assim, em uma situação hipotética, pode-se representar x_1=10 e x_2=20. Com base nas observações amostrais e mantendo o propósito de verificar a homogeneidade das taxas medias, pode-se formular a hipóteses H_0: $\mu_1 = \mu_2$, assim sendo, tem-se como valor paramétrico 1, o qual é confrontado com os intervalos estimados (Tabela 3).

Tabela 3 - Resultados de intervalos de confiança utilizando o método log-linear.

Correção	α	Intervalo
0,375	0,05	(0,2411;1,0753)
0,5		(0,2434; 1,0776)
0,375	0,10	(0,2719; 0,9535)
0,5		(0,2743; 0,9561)

Pelos resultados encontrados na Tabela 3, verifica-se que, para todas as situações, há evidências estatísticas de que ambas as populações apresentam taxas médias similares, pois o valor unitário encontra-se contido no intervalo estimado. Importante ressaltar que a conclusão final dessa aplicação não foi afetada pelo valor da correção de continuidade assumida.

Conclusões

Os resultados obtidos neste trabalho evidenciaram que o intervalo de confiança para a razão de taxas de duas Poissons originado de um modelo log-linear, apresentou resultados similares em relação ao valor da correção de continuidade assumido. Em se tratando do seu desempenho, mediante ao efeito da superdispersão, verificou-se que o excesso de valores zero ocasionou uma perda de precisão, porém, as probabilidades empíricas referentes a cobertura foi menos afetado, resultando em valores inferiores, contudo próximo ao nível de confiança nominal.

SANTOS, E. N. F.; CIRILLO, M. A. Robustness assessment of Poisson rate confidence interval from a log-linear model. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.26, n.3, p.81-90, 2008.

- *ABSTRACT: Rate estimation from two Poisson populations (alfa i) with (i = 1,2,) independents was proposed by Gart and Zweifel (1967) regarding an interval method, built form premises of a log-linear model. With this purpose, the present study aims to evaluate this method robustness, through, samples generated in the presence and absence of overdispersal effect, considering different parameter values and correction of the continuity. For that reason, a Monte Carlo simulation was used, in which, results empiricaly concerning a covering probability and interval average scope. Through the overdispersal effect, it has been concluded that the present method showed more discrepant results related to the accuracy, when compared with a favorable situation for its aplication, represented by the free samples of overdispersal effect.*

- *KEY-WORDS: Monte Carlo; covering probability; overdispersal; log-linear.*

Referências

AGRESTI, A.; COULL, B. A. Approximate is better than “exact” for interval estimation of Binomial proportions. *American Statistician*, Washington, v.52, n.2, p.119 –126, 1998.

BERGER, J. O. *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. 2.ed. New York: Springer, 1985. 617 p.

DEAN, C. B. Testing for overdispersion in Poisson and binomial regression models. *J. Am. Stat.l Assoc.,* New York, v.87, n.4, p.451-457, 1992.

DOBSON, A. J.; KUULASMAA, K.; EBERLE, E.; SCHERER, J. Confidence intervals for weighted sums of Poisson parameters. *Stat. Med.*, Hoboken, v.10, n.3, p.457–462, 1991.

GART, J. J.; ZWEIFEL, J. R. On the bias of various estimators of the logits and its variance with applications to quantal bioassay. *Biometrika*, London, v.54, n.2, p.181-187, 1967.

HINDE, J. P.; DEMÉTRIO, C. G. B. Overdispersion: models and estimation. *Comput. Stat. Data Anal.*, Amsterdam, v.27, n.2, p.151-170, 1998.

LUCEÑO, A. A family of partially correlated poisson models for oversdispersion. *Comput. Stat. Data Anal.*, Amsterdam, v.20, n.4, p.511-520, 1995.

PRICE, M. R.; BONETT, G. D. Estimating the ratio of two Poisson rates. *Comput. Stat. Data Anal.*, Amsterdam, v.34, n.3, p.345-356, 2000.

SAHAI, H.; MISRA, S. C. Comparing means of two Poisson distributions. *Math. Sci.*, Milbourne, v.17, n.1, p.60-67, 1992.

TUTIA, M. H.; DINIZ, C. A. R.; LEITE, J. G. Bayesian inference for the parameter p of the correlated binomial distribution. *Rev. Mat. Estat.*, São Paulo, v.21, n.2, p.85-94, 2003.

WANG, P.; PUTERMAN, M. L.; COCKBURN, I.; LE, N. Mixed Poisson regression models with covariate dependent rates. *Biometrics*.Washington, v.52, n.3, p.381–400, 1996.

Recebido em 22.04.2008.

Aprovado após revisão 11.09.2008.