

GRAFOS QUASE-HOMEOMORFOS

Walter Julio Cortez MORALES¹

- RESUMO: Neste trabalho definimos *grafos extensão* e *quase-inversa* de um *grafo* arbitrário G , pela transformação de *extensão* de *divisão-vértice* que associa a cada *vértice* de G uma *clique-2*. O conceito de *grafo extensão* generaliza a noção de *divisão* de *vértice* em *grafos simples* de Tutte. A transformação utilizada na construção dos novos *grafos* é uma classe de inversa para a operação *contração aresta* e, via os conceitos de *grafos* mencionados acima, introduzimos a noção de *quase-homeomorfismo* em *grafos* arbitrários. O resultado principal deste artigo é a prova de que os *grafos roda* e *buquê* são *quase-homeomorfos*, além disso, damos a condição para que o *grafo extensão* seja uma *quase-inversa* de G .
- PALAVRAS-CHAVE: Grafo; clique-2; quase-inversa; quase-homeomorfo; extensão.

1 Introdução e motivação

Tutte (1961) mostrou que cada *grafo 3-conexo* contém um *grafo completo* K_4 como um *menor*, o mesmo autor (1984, p.75) introduziu o conceito de *divisão de vértice* em *grafos* simples, maiores detalhes sobre os variantes de *divisão de vértice* podem ver-se em Saito (2003, pp.227-235) e Zhang (1996, pp.206-216). Por outro lado, Jørgensen (1989) determinou num *grafo* com n *vértices*, o número máximo de *arestas* não contractíveis a um *grafo completo* K_m , onde $2 \leq m \leq n$.

Neste trabalho, motivado pelo trabalho de Tutte (1984, p.75), definimos os *grafos extensão* e *quase-inversa* de um *grafo* G , pela transformação de *extensão* de *divisão-vértice* que associa a cada *vértice* de G uma *clique-2*.

Usaremos a notação *ex:* para referirmos a transformação de *extensão* de *divisão-vértice*.

O *grafo extensão* generaliza a noção de *divisão* de *vértice* em *grafos simples* de Tutte. Via estes novos conceitos de *grafos*, introduzimos o conceito central deste

¹Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Universidade Estadual Paulista – UNESP, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil. E-mail: walter@ibilce.unesp.br

artigo, o *quase-homeomorfismo* em *grafos* arbitrários e provamos que os *grafos roda* e *buquê* são *quase-homeomorfos* e uma condição para um *grafo extensão* seja *quase-inversa* de G .

O artigo está organizado como segue. Na seção 2, definições preliminares e resultados, seção 3, introduzimos os novos grafos *extensão* e *quase-inversa*. Uma condição necessária para que um *grafo extensão* seja *quase-inversa*. As Figuras 1 e 2, ilustram os *grafos contração* e *extensão*, respectivamente, além das observações. Na seção 4, apresentamos a noção central do artigo o que é, a noção de *quase-homeomorfismo* em *grafos* e, finalmente o nosso resultado principal que mostra o *quase-homeomorfismos* dos *grafos roda* e *buquê*.

2 Preliminares sobre os grafos

Nesta seção mencionaremos algumas definições e notações sobre a teoria dos *grafos*, para o bom entendimento do presente trabalho. Outras definições e resultados usados no texto mas não mencionados nesta seção podem ser encontrados em (Diestel, 2000), (Gross e Yellen, 1999) e (West, 2001).

Todos os *grafos* considerados são finitos, *conexos*, não direcionados e podem admitir *arestas paralelas* e *laços*.

Consideremos um conjunto V não vazio finito, seja $[V]^2$ uma coleção de dois elementos distintos ou iguais de V e denotemos o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ por $[n]$.

Definição 2.1. Um grafo é um par (V, E) ordenado de conjuntos V e E , sendo $E \subseteq [V]^2$. Para um grafo G com os conjuntos de vértices $V(G) = V$ e arestas $E(G) = E$ denotamos por $G = (V(G), E(G))$.

A *ordem* e o *tamanho* de $G = (V(G), E(G))$ vêm a ser dados pelas cardinalidades dos conjuntos de *vértices* e *arestas*, isto é, $|V(G)|$ e $|E(G)|$.

Definição 2.2. Definimos a *aresta* e de $G = (V(G), E(G))$ com os extremos x e y , como sendo o interior (x, y) do intervalo fechado $[x, y]$, ou seja, como a imagem homeomorfa do intervalo aberto $(0, 1)$ pelo homeomorfismo $f : (0, 1) \rightarrow (x, y)$ dado por $f(t) = (1 - t)x + ty$ com $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Qualquer *aresta* e com extremos x e y no grafo G , denotamos por $e = (x, y)$ (ou simplesmente xy) e $V_e = \{x, y\}$ o conjunto formado pelos extremos de e . Um ponto qualquer $u \in e$ tal que $u \notin V_e$ é chamado *ponto-aresta* de e .

Escrevemos $v \in G$ para indicar que o *vértice* $v \in V(G)$ e $e \in E(G)$ significa que a *aresta* $e \in G$, e um *laço* é uma *aresta* cujos extremos coincidem.

Os *vértices* x e y são *vizinhos* (ou *adjacentes*) em G se e somente se $xy \in E(G)$.

Uma coleção de *arestas* com os mesmos extremos x e y em G é chamada *arestas paralelas* (ou *múltiplas*) e denotada por $m_G[x, y]$.

Denotamos por $N_G(v)$ (ou simplesmente $N(v)$, se não houver confusão) o conjunto de *vizinhos* de v em G , e por $E_G(v) = \{vy/vy \in E(G) \text{ e } y \in G\}$ a coleção de *arestas* que incidem com v em G .

Um *grafo* G é dito *simples* se G não possui *arestas paralelas* nem *laços*.

Daqui em diante diremos simplesmente grafo G para dizer que é um grafo simples com arestas paralelas e/ou laços, salvo alguma especificação explícita.

Definição 2.3. O grau de $v \in G$ é dado pelo número de arestas e duas vezes o número de laços incidentes em v . Denotamos por $d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$).

Se denotamos por l_v o número de laços incidentes em v , então $d_G(v) = n + 2l_v$, onde $n = |N(v)|$.

Quando G é simples, tem-se $d(v) = |E_G(v)|$.

Um grafo G é cúbico, se $d_G(v) = 3$ para todo $v \in G$.

Um vértice é chamado *pendente* (ou *folha*) se seu grau é um, e uma aresta é *pendente*, se um de seus extremos é de grau um.

Definição 2.4. Dizemos que os grafos G e H são isomorfos, se existem bijeções $\varphi_V : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\varphi_E : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que a função φ_V associa os extremos de cada aresta $e = (x, y) \in E(G)$ com os extremos da aresta $\varphi_E(e) = (\varphi_V(x), \varphi_V(y)) \in E(H)$, e neste caso denotamos por $G \cong H$. O par de funções $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ é denominada um isomorfismo de G sobre H .

Um grafo $F = (V(F), E(F))$ é um subgrafo de $G = (V(G), E(G))$ se $V(F) \subseteq V(G)$ e $E(F) \subseteq E(G)$ e denotamos por $F \subseteq G$. Em particular, G é um subgrafo de si mesmo. Usaremos a notação $F \subset G$ para indicar que F é um subgrafo próprio de G .

Definição 2.5. Seja $X \subset V(G)$. O subgrafo de G cujos vértices e arestas são dados por X e $\{e \in E(G); V_e \subseteq X\}$ é chamado grafo induzido por X e denotamos por $G[X]$.

O subgrafo completo $\Gamma_A (= G[A])$ induzido por $A \subseteq V(G)$ é chamado uma clique, onde A é seu conjunto de vértices. Se $|A| = m$, dizemos que Γ_A é uma m -clique.

Definição 2.6. Uma seqüência $(v_0, v_0v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n)$ alternada de vértices e arestas tal que os extremos de cada aresta e_i são v_{i-1} e v_i , $0 \leq i \leq n-1$, é denominada um (v_0, v_n) -caminho P (ou simplesmente o caminho $P_{[v_0, v_n]}$) de comprimento n em G .

Os vértices v_0 e v_n são chamados extremos de P e os outros vértices distintos de v_0 e v_n são os interiores. O caminho com extremos x e y denota-se por $P_{[x, y]}$ e observa-se $P_{[x, y]} = P_{[y, x]}$.

Um caminho $P_{[x, y]}$ de comprimento m cujos extremos x e y coincidem é chamado um ciclo e denota-se por C_m , sendo m o seu comprimento e tendo $x = y$ o único vértice repetido.

Para $m = 1$, C_1 é um laço, $m = 2$, C_2 é um grafo com dois vértices ligados por duas arestas paralelas e para $m = 3$, C_3 é um triângulo. G é um triângulo-livre se não contém C_3 como um subgrafo induzido.

Definição 2.7. Um ciclo C_m ($m \geq 4$) é chamado puro em G , quaisquer dois vértices não consecutivos em C_m são não adjacentes em G e cujos conjuntos de vértices e arestas são $V(C_m) = \{y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m\}$ e $E(C_m) = \{e_1 = y_1y_2, e_2 = y_2y_3, \dots, e_{m-1} = y_{m-1}y_m, e_m = y_mv_1\}$, respectivamente.

Um ciclo puro é também conhecido como ciclo sem cordas ou ciclo induzido.

Duas arestas são disjuntas em G , se elas não compartilham nenhum vértice.

Definição 2.8. Um subconjunto $M \subseteq E(G)$ é chamado um emparelhamento se as arestas de M são mutuamente disjuntas.

Uma coleção $\{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_t y_t\}$ de t arestas disjuntas duas a duas é chamada um E_t -emparelhamento (ou simplesmente E_t).

Definição 2.9. A aresta $w = xy$ (não laço) em G é chamada uma contração-via- w , se seu interior (x, y) é removido e o conjunto V_w de extremos de w é identificado com o único vértice v_w . O grafo resultante é chamado o grafo contração-aresta (ou simplesmente grafo contração) e denotamos por G/w (ou G/xy) (provavelmente munido de novos laços e arestas paralelas)

Para um subconjunto $S \subset E(G)$, o grafo contração G/S é obtido pela contração de cada aresta de S .

Consideremos C_m e C'_m os ciclos puros com seus conjuntos de vértices $V(C_m) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ e $V(C'_m) = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_m\}$, respectivamente, e a função $f : V(C_m) \rightarrow V(C'_m)$ dada por $f(y_i) = y'_i, i \in [m]$ a qual preserva a adjacência das arestas, logo os grafos C_m e C'_m são isomorfismo.

Definição 2.10. O grafo formado C_m, C'_m e o E_m -emparelhamento é chamado grafo Q_m -cilindro.

O grafo Q_m -cilindro é o esqueleto da superfície de um cilindro sem as duas tampas, e isto generaliza o grafo prisma de Dirac (1963).

O Q_m -cilindro é um grafo 3-conexo, pois, contém dois ciclos disjuntos.

Definição 2.11. Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G é contractível a H , se H é obtido a partir de G por uma seqüência de contração-aresta.

Se H é um subgrafo conexo de G , o grafo contração $G/E(H)$ é obtido pela identificação de $V(H)$ com um único vértice $v_H \in H$. Denotamos por G/H ao invés de $G/E(H)$.

Definição 2.12. Seja J um grafo, dizemos que o grafo G possui um J -menor, se G tem um subgrafo K o qual é contractível sobre J .

Mais detalhes sobre menor podem ser vistos em (Daven et al. 2002, pp.50-66), Hilton e Rodger (1986, 63-78) e Kilakos e Shepherd (1993 pp.449-467).

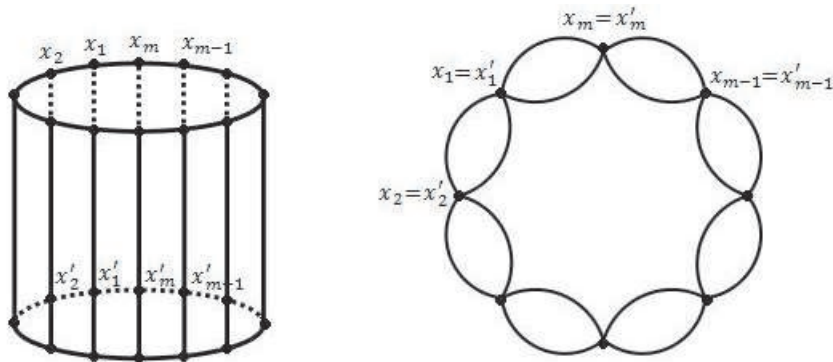


Figure 1 - Q_m -cilindro e Q_m/E_m o grafo contração-via- E_m .

Definição 2.13. Um grafo H é chamado uma subdivisão de um grafo G , se a inserção de um número finito de pontos-arestas sobre algumas arestas de G , tornam-se novos vértices como as novas arestas que se originarem, além dos vértices e arestas de G .

Um grafo simples F é conexo se cada par de vértices é ligado por um caminho. O grafo vazio é considerado conexo. O subconjunto $X \subset V(F)$ é conexo se o subgrafo $F[X]$ é conexo.

Seja F conexo, dizemos que $X \subseteq V(F)$ é um conjunto vértice-corte (ou conjunto separação) se o grafo $F \setminus X$ é desconexo.

Definição 2.14. Dizemos que F é k -conexo, se a ordem de F é pelo menos 4 e não possui conjunto vértice-corte X com $|X| \leq k - 1$. Dizemos que v é um vértice-corte se o grafo $F \setminus \{v\}$ é desconexo.

Definição 2.15. Seja K um grafo com arestas paralelas e/ou laços, o vértice $v \in K$ é chamado um vértice-corte, se o conjunto de arestas $E(K)$ decompõe-se em dois subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tal que $V(E_1) \cap V(E_2) = \{v\}$.

Maiores detalhes podem ser vistos em (Frank, 1995, p.117).

Definição 2.16. Um grafo é planar (ou encaixável sobre uma 2-esfera) se suas arestas não se interceptam, salvo nos extremos.

Teorema 2.1 (Teorema de Kuratowski). Um grafo G é planar se e somente se, G não contém K_3 -menor ou $K_{3,3}$ -menor.

Maiores detalhes podem ser vistos em Bondy-Murty (2007, p.208) e Gross-Tucker (1987, p.28).

2.1 O conceito dos grafos roda e buquê

Apresentamos o conceito dos grafos roda (*Wheel*), *buquê* e algumas notações.

Definição 2.17. Uma *m*-estrela é um grafo bipartido completo cuja primeira classe é constituída pelo único vértice v e a segunda pelos m vértices pendentos. Denotamos uma *m*-estrela por $Y_{1,m}$, assim $Y_{1,m} = (V(Y_{1,m}), E(Y_{1,m}))$ com $V(Y_{1,m}) = \{v\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, sendo, $d(v) = m$, $d(x_i) = 1, i \in [m]$ e $E(Y_{1,m}) = \{vx_1, vx_2, \dots, vx_m\}$.

A ordem de $Y_{1,m}$ é $m + 1$ e seu tamanho é m .

Para $m = 3$, a 3-estrela $Y_{1,3}$ é denominada um *3-claw*, ou o grafo com quatro vértices v, x, y, z e vx, vy, vz as arestas pendentas

A partir das noções de *ciclo puro* e *m*-estrela obtemos conceito do grafo roda.

Consideremos a função $\varphi : \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \rightarrow V(C_m)$ dada por $\varphi(x_i) = y_i, i \in [m]$, assim, os conjuntos $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ e $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ identificam-se pela bijecção φ .

Definição 2.18. O grafo que tem por vértices o conjunto $\{v\} \cup C_m$ e por arestas o conjunto $\{vy_1, vy_2, \dots, vy_m\} \cup \{y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{m-1}y_m, y_my_1\}$ é chamado grafo roda (*Wheel*) e denotamos por W_m .

O grafo W_m tem por ordem e tamanho $m + 1$ e $2m$, respectivamente.

Tutte (1961) provou que o grafo roda é 3-conexo.

Teorema 2.2 (Tutte (1961), Teorema 2.4). O grafo roda é simples e 3-conexo.

Definição 2.19. O grafo formado por um único vértice v e m ($m \geq 2$) laços incidindo em v é chamado *m*-buquê e denotamos por B^m .

O grafo buquê é também conhecido como o buquê com m círculos.

Definição 2.20. A conectividade de vértices $\kappa(G)$ de um grafo G é o número de vértices cuja remoção desconecta, ou um grafo trivial ou um buquê.

A conectividade-vértice de B^m é 1 e é dado pelo vértice v .

Maiores detalhes podem ser vistos em Gross-Tucker(1986, p.15-40) e Frank (1995, p.117).

Denotamos por $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{k \leq 3}^n$ a coleção de grafos de ordem n e k -conexo, $k \in [3]$, isto é, $\mathcal{F} = \{G/n = |V(G)| \text{ e } G \text{ é } k\text{-conexo}\}$. Os grafo roda W_m e o grafo buquê B^m são elementos de \mathcal{F} .

Consideremos $v_k \in G \in \mathcal{F}$ com $d(v_k) \geq 2$. Seja v_k^i a i -ésima cópia de v_k e a nova aresta $y_i v_k^i$ digamos que é associada à aresta $y_i v_k$, enquanto o laço e_j é correspondido pelas arestas paralelas $w_j w_j'$ e e_j' , sendo w_j' uma duplicação de um novo vértice w_j .

Definição 2.21. Seja F_{A_v} uma clique sobre o conjunto $A_v = \{v_k^i, w_j, w_j'\}$. O grafo formado a partir de F_{A_v} e a aresta e_j' é chamado uma clique-2 e denotamos por $F_{A_v}^2$.

Em particular a aresta $y_i v_k^i$ é um 1-emparelhamento incidindo em v_k^i .

Estendemos a definição acima como segue, seja $v \in G$ com $d(v) = n + 2l_v$. A vizinhança $N_G(v) = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ de v é associada pela n -cópia $W_v = \{v^1, v^2, \dots, v^i, \dots, v^n\}$ de v e a família $\{e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_{l_v}\}$ de l_v laços incidentes com v é associada pela coleção de arestas paralelas $\{w_1 w'_1, w_2 w'_2, \dots, w_{l_v} w'_{l_v}\} \cup \{e'_1, e'_2, \dots, e'_{l_v}\}$, cujos extremos pertencem ao conjunto $C_{2l_v} = \{w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_{l_v}\} \cup \{w'_1, w'_2, \dots, w'_j, \dots, w'_{l_v}\}$, sendo $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_j, \dots, w'_{l_v}\}$ uma l_v -duplicação dos l_v novos vértices $\{w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_{l_v}\}$.

Definição 2.22. Seja Γ_{A_v} uma clique sobre o conjunto $A_v = W_v \cup C_{2l_v}$. Chamamos a clique-2 ao grafo que tem por o conjunto de vértices A_v e seu conjunto de arestas é dado por $E(\Gamma_{A_v}) \cup \{e'_1, e'_2, \dots, e'_j, \dots, e'_{l_v}\}$ e denotamos por $\Gamma_{A_v}^2$.

3 Grafos extensão e quase-inversa

Nesta seção introduzimos dois novos conceitos de grafos e damos uma condição para que um grafo extensão seja quase-inversa, além das observações, que serão usadas na demonstração do resultado principal.

Consideremos o grafo $G \in \mathcal{F}$, o vértice $v \in G$ com $d(v) = n + 2l_v$ e a transformação ex : de G em \mathcal{F} conforme a seguinte definição.

Definição 3.1. A transformação ex : associa v com $\Gamma_{A_v}^2$ e os vértices x distintos de v , aplicados neles mesmos, em outras palavras,

$$ex : y = \begin{cases} \Gamma_{A_v}^2 & \text{se, } y = v \\ y & \text{se, } y \neq v \end{cases}$$

A imagem do grafo G por ex : é chamado grafo extensão e denotamos por $G_{ex:v}$.

A transformação ex : é uma classe de inversa para a operação de contração aresta.

Dado o subconjunto $X \subset V(G)$, o grafo $G_{ex:X}$ obtido pela aplicação da transformação ex : em cada $v \in X$, é chamado X -extensão de G .

A Figura 2, apresenta uma ilustração de $G_{ex:v}$. Dado o grafo G com $d_G(v) = 5$ e cujos conjuntos de vértices e arestas são $\{x, y, z, v\}$ e $\{vx, vy, vz\}$, respectivamente, além do laço e que incide em v . O grafo extensão tem por vértices o conjunto $\{x, y, z\} \cup \{v^1, v^2, v^3\} \cup \{w_1, w'_1\}$, enquanto seu conjunto de arestas é dado pelas arestas da clique $\Gamma_{A_v}^2$ sobre $A_v = \{v^1, v^2, v^3\} \cup \{w_1, w'_1\}$, além do 3-emparelhamento $\{xv^1, yv^2, zv^3\}$.

Observação 3.1. (1) Se existe o grafo extensão $G_{ex:v}$ de $G \in \mathcal{F}$, então, $G_{ex:v}$ possui pelo menos um vértice e uma aresta a mais do que G .

(2) O grafo extensão $G_{ex:v}$ de G reduz-se à clássica divisão de vértice de Tutte [1984], para $\Gamma_{A_v}^2 = K_2$ e G um grafo simples.

- (3) A transformação ex : preserva a k -conexidade para os membros de \mathcal{F} .
- (4) Se G possui o vértice cúbico v , então, temos recursivamente a seqüência $G^0 = G, G^1 = G_{ex:v_1}^0, G^2 = G_{ex:v_2}^1, G^3 = G_{ex:v_3}^2, \dots$. Em particular, G^k é uma extensão de $G^{k-1}, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.
- (5) Seja G um grafo simples. Se G é cúbico, então, para cada $v \in G$, o grafo extensão $G_{ex:v}$ é também cúbico.
- (6) Se G é um grafo simples e cúbico planar, então o grafo extensão $G_{ex:v}$ é também planar. Análogo ao teorema de Kuratowski, um grafo cúbico H é planar se e somente se H não contém $K_{3,3}$ (um grafo cúbico bipartido completo é denotado por $K_{3,3}$).

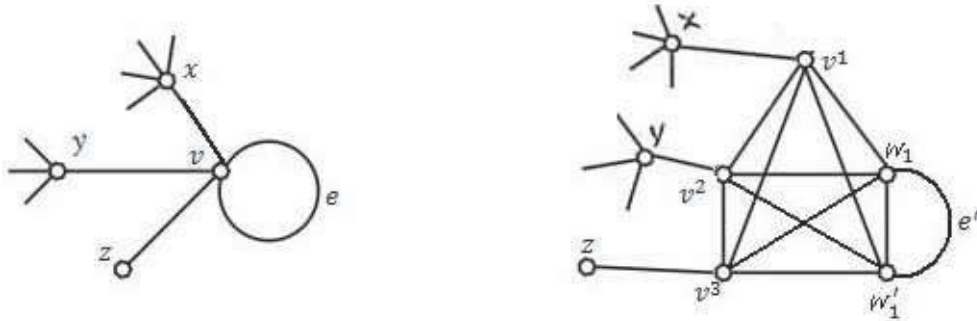


Figure 2 - Grafo G e o grafo extensão $G_{ex:v}$.

Exemplo 3.1. Seja $Y_{1,3}$ o grafo estrela *claw* e pondo $Y^0 = Y_{1,3}$, obtemos os grafos extensão Y^k de Y^{k-1} para $k = 1, 2, 3, \dots$, além disso, Y^k possui 3^{k-1} triângulos e 3^{k-2} hexágonos.

Exemplo 3.2. Se o grafo H é uma subdivisão de $G \in \mathcal{F}$, então H é uma extensão de G .

A seguir introduzimos a noção de *grafo quase-inversa* e uma condição para que um grafo extensão de G seja o *quase-inversa* de G .

Definição 3.2. Sejam $G, H \in \mathcal{F}$, dizemos que H é *quase-inversa* de G se:

- i) H possui um G -menor, ou
- ii) se para algum subconjunto conexo $X \subset V(G)$ o grafo $G_{ex:X}$ isomorfo a H contém um subgrafo induzido F tal que $F \cong G$ ou senão, $F/Y \cong G$ para $Y \subset E(F)$.

Exemplo 3.3. Seja H isomorfo a uma subdivisão de G , se o conjunto de pontos-arestas (da subdivisão) é conexo, então H é uma *quase-inversa* de G .

Exemplo 3.4. Seja G o grafo formado pelos laços e_1, e_2, e_3 incidentes no vértice $v \in G$, além das arestas vx, vy . Os conjuntos de vértices e arestas do grafo extensão $G_{ex:v}$ são, respectivamente, $V(G_{ex:v}) = W_v \cup C_{2l_v} = \{v^1, v^2\} \cup \{v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3, v'_3\} \cup \{x, y\}$ e $E(G_{ex:v}) = E(\Gamma_{A_v}) \cup \{e'_1, e'_2, e'_3\} \cup \{v^1x, v^2y\}$. O grafo $G_{ex:v}$ possui G -menor, logo, $G_{ex:v}$ é quase-inversa de G .

Contra-exemplo. Consideremos os grafos theta Θ_1 e Θ_2 com os conjuntos de vértices são $\{x, y\}$ e $\{u, v\}$, respectivamente. Seja o grafo H formado por Θ_1, Θ_2 e o caminho $P_{[y,u]} = \{y, yt, t, tu, u\}$ que os liga, onde $d_H(t) = 2$ e $d_H(x) = 5$ (há um laço incidindo no vértice x) enquanto, $d_H(y) = d_H(u) = 4$ e $d_H(v) = 3$. Tomemos o subconjunto $X = \{x, v\}$ de $V(H)$ que não é conexo, logo, o grafo extensão $H_{ex:X}$, não é quase-inversa de H .

O teorema seguinte demonstra que se G contém um subconjunto $X \subseteq V(G)$ conexo, então, o grafo $G_{ex:X}$ é uma quase-inversa de G .

Teorema 3.1. Sejam G e o subconjunto $X \subseteq V(G)$. Se X é conexo, então, o grafo X -extensão $G_{ex:X}$ é quase-inversa de G .

Demonstração

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ o subconjunto conexo de $V(G)$, sem perda da generalidade, admitamos que o subgrafo $G[X]$ não admite laços, logo, $G[X]$ contém pelo menos $t - 1$ arestas e seja $d_{G[X]}(x_i) = h_i \geq 1, i \in [1, t]$.

Usando a transformação ex : associamos a cada $x_s \in X$ com a clique-2 $\Gamma_{W_{x_s}}$, em outras palavras, $ex : x_s = \Gamma_{W_{x_s}}$ e $ex : v = v$ para $v \neq x_s$, sendo a coleção $W_{x_s} = \{x_s^1, x_s^2, \dots, x_s^{h_s}\}, s \in [1, t]$ formada pelas cópias de x_s em $G_{ex:X}$.

Provemos que a união $\cup_{x \in X} \Gamma_{W_x}$ das cliques é conexa.

Basta provarmos para os vértices adjacentes x_i e $x_j, i \neq j; i, j \in [1, t]$ que, a união Γ_{W_i} e Γ_{W_j} das cliques é conexa.

Consideremos as vizinhanças de x_i e x_j , respectivamente, $N(x_i) = \{y_1, y_2, \dots, y_a, \dots, y_{h_i}\}$ e $N(x_j) = \{z_1, z_2, \dots, z_a, \dots, z_{h_j}\}$ e, as coleções $W_{x_i} = \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^a, \dots, x_i^{h_i}\}$ e $W_{x_j} = \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^a, \dots, x_j^{h_j}\}$ formadas pelas h_i -cópias e h_j -cópias de x_i e x_j , respectivamente.

Tomemos os vértices $x_i^a \in \Gamma_{W_i}$ e $x_j^a \in \Gamma_{W_j}$ e provemos que existe um caminho $P_{[x_i^a, x_j^a]}$ com os extremos x_i^a e x_j^a em $G_{ex:X}$.

Seja $P_{[x_i, x_j]} : x_i, x_i y_a, y_a u_2, \dots, u_k, u_k z_a, z_a, z_a x_j, x_j$ um caminho em $G[X]$.

A aresta $e_i = x_i y_a$ de $P_{[x_i, x_j]}$, implica que $x_i \in N_G(y_a)$ e $y_a \in N_G(x_i)$ e, daí $W_{x_i} = \{x_i^1, x_i^2, \dots\}$ e $W_{y_a} = \{y_a^1, y_a^2, \dots\}$ formadas pelas cópias de $\{x_i^1, \dots\}$ e $\{y_a^1, \dots\}$ geram, os h_i - e h_j -emparelhamentos $\{y_1 x_i^1, y_2 x_i^2, \dots, y_a x_i^a, \dots, y_{h_i} x_i^{h_i}\}$ e $\{z_1 x_j^1, z_2 x_j^2, \dots, z_a x_j^a, \dots, z_{h_j} x_j^{h_j}\}$, respectivamente, o caminho $x_i^1, x_i^1 y_a, y_a, y_a x_i, x_i, x_i y_a^1, y_a^1$ está contido em $W_{x_i} \cup W_{y_a}$. Por conseguinte, $\Gamma_{W_i} \cup \Gamma_{W_j}$ é conexo.

Pelo processo análogo, a aresta $y_a u_2$ acarreta que a união das cliques $\Gamma_{W_{y_a}}$ e $\Gamma_{W_{u_2}}$ é também conexa. Assim, sucessivamente, até que união de cliques $\cup_{x \in X} \Gamma_{W_x}$ contém o caminho

$$P_{[x_i^a, x_j^a]} = \{x_i^a, x_i y_a, y_a, y_a u_2, u_2, \dots, u_s, u_s z_a, z_a, z_a x_j^a, x_j^a\}.$$

Sendo os vértices x_i e x_j arbitrários de $G[X]$, concluímos que $\cup_{x \in X} \Gamma_{W_x}$ é conexo. Logo, o grafo $G_{ex:X}$ possui G -menor, ou seja que, o grafo contração $G_{ex:X} / \cup_{x \in X} E(\Gamma_{W_x})$ é isomorfo a G , e o teorema está demonstrado ■

A recíproca do teorema não é necessariamente verdadeira.

Observação 3.2. *Seja $\nu(H) = \max\{|M|/M \text{ emparelhamento em } H\}$ o número de arestas em um emparelhamento máximo de $H \in \mathcal{F}$. Se H é um grafo simples e $X \subseteq V(H)$ conexo, então verifica-se que $\nu(H_{ex:X}) \geq \nu(H)$ se e somente se $|X| \geq |V(H) \setminus X|$. Formulamos a questão seguinte: dado o grafo imersível H com o conjunto antefactor completo S conexo, então grafo S -extensão $H_{ex:S}$ é imersível? Os grafos imersíveis foram introduzidos por Cortez-Morales (2005).*

4 Grafos quase-homeomorfos

O quase-homeomorfo em grafos é o novo conceito principal deste artigo, e como aplicação provamos que os grafos *wheel* e *buquê* são quase-homeomorfos

Usaremos as abreviações $ex :$ e $contr$ para significar, respectivamente, a transformação extensão de divisão vértice e a contração aresta, também consideramos as duas bi-operações $1 = \{ex :, contr\}$ e $1' = \{contr, ex :\}$.

Definição 4.1. *Sejam G e H os membros de \mathcal{F} , dizemos que H é quase-homeomorfo a G , se*

- i) o grafo G admite um grafo X -extensão $G_{ex:X}$ com $X \subseteq V(G)$ conexo é isomorfo a H , ou
- ii) G é transformado pela operação 1 a um grafo F isomorfo a H tal que $F/D \cong G$, sendo D um subgrafo de F , dizemos que o grafo G é quase-homeomorfo de H ,
 - a) se H é transformado via operação $1'$ a um grafo K isomorfo a G , ou
 - b) K possui um subgrafo J tal que $J/A \cong G$, sendo $A \subset E(J)$, ou $(J/A)_{extenY} \cong G$, onde $Y \subseteq V(J/A)$.

Definição 4.2. *Dizemos que G e H são quase-homeomorfos, se H é quase-homeomorfo a G e, G quase-homeomorfo de H e denotamos por $G \cong_{q-h} H$.*

Seja que na construção de H ou de G não necessariamente se possam usar ambas operações 1 ou $1'$, mas sua ordem é considerada importante.

Exemplo 4.1. *Consideremos a estrela $Y_{1,3} = F$ com o conjunto de vértices v, x, y, z e as arestas pendentes vx, vy, vz . Então, o grafo extensão $F_{ex:v}$ é quase-homeomorfo a F , pois, $F_{ex:v}$ admite um F -menor. O grafo contração $F_{ex:v} / \Delta_{v^1v^2v^3}$ (sendo $\Delta_{v^1v^2v^3}$ o subgrafo triângulo, com o conjunto de vértices*

$\{v^1, v^2, v^3\}$ é isomorfo a F . Portanto, $F \cong_{q-h} H$, sendo H um grafo isomorfo a $F_{ex:v}$.

Exemplo 4.2. O grafo buquê com 6 círculos, B^6 e o grafo roda, W_6 são quase-homeomorfos, $B^6 \cong_{q-h} W_6$. Ilustração Figura 4.

Observação 4.1. O grafo buquê não necessariamente é obtido a partir do grafo roda pela contração. Por exemplo na Figura 3, consideremos o grafo 2-conexo C_m^2 constituído por um ciclo puro C_m munido de m laços, então o grafo contração C_m^2/C_m é isomorfo a B^m .

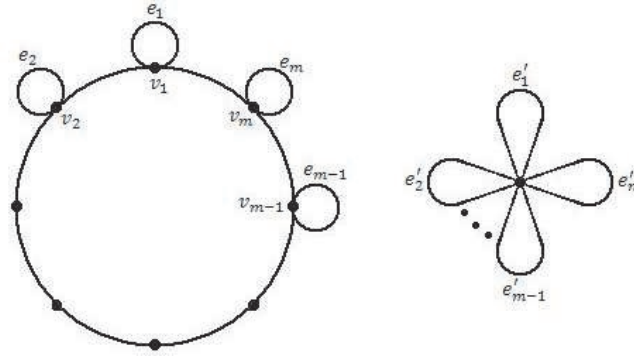


Figure 3 - O grafo C_m^2 e contração C_m^2/C_m .

Sejam os grafos K_m^2 e D_m^2 obtidos de K_m pela adição de m laços e a substituição de cada aresta não diagonal, respectivamente. Em particular para $m = 4$, K_4^2 e D_4^2 não são isomorfos, porém $K_4^2/K_4 \cong B^4 \cong D_4^2/K_4$.

Definição 4.3. Seja T uma árvore geradora de $G \in \mathcal{F}$. A aresta $w \in E(G)$ é uma rama de G se $w \notin T$ e o inteiro não negativo $r_T = |E(G) \setminus E(T)|$ é o número de ramos de G com respeito a T .

Nosso resultado principal está baseado sobre os dois teoremas seguintes.

Teorema 4.1. Seja $m \in \mathbb{N}$, então, o grafo roda W_m é quase-homeomorfo ao grafo buquê B^m .

Demonstração

Pondo $H = B^m$ por comodidade e, transformemos H usando a operação 1 a um grafo isomorfo a W_m .

Seja o vértice $v \in H$ com os m laços incidindo em v . Aplicando a transformação ex : sobre o único vértice v resulta a clique-2 $\Gamma_{A_v}^2$ com o conjunto de vértices $A_v = C_{2m} = \{v_j, v'_j, j \in [1, m]\}$.

Os ciclos puros $C_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ e $C'_m = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ são

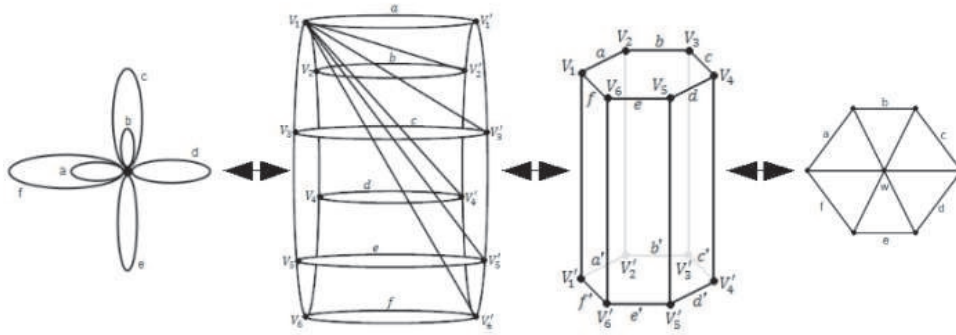


Figure 4 - Os grafos B^6 e W_6 são quase-homeomorfos.

emparelhados por $\{v_1v'_1, v_2v'_2, \dots, v_mv'_m\}$ e $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ no grafo extensão $H_{ex:v}$.

Consideremos o subgrafo F definido pelos ciclos puros C_m e C'_m conjuntamente com o m -emparelhamento $\{v_1v'_1, v_2v'_2, \dots, v_mv'_m\}$.

Portanto, o subgrafo F isomorfo é ao grafo prisma e, assim, F é 3-conexo.

O grafo extensão $H_{ex:v}$ contém um subgrafo 3-conexo F . De onde, o grafo contração F/C'_m é isomorfo a W_m , e o teorema está demonstrado. ■

Teorema 4.2. *Seja $G \in \mathcal{F}$ 3-conexo com a árvore geradora T e $m = r_T$, então, B^{m+l} é quase-homeomorfo de G , sendo $l \geq 0$ é o número de laços em G .*

Demonstração

Se G é isomorfo a um grafo roda W_m e, tendo como árvore T isomorfo a $Y_{1,m}$, então, $G/T \cong B^m$.

Seja G não isomorfo a grafo roda, transformemos o G , a um grafo isomorfo a B^{m+l} .

Provemos este fato pela indução sobre o número de ramas $r_T = m$ de G com respeito à árvore geradora T .

Se G é simples com $m = 0$, então $E(G) = E(T)$, daí, G/T é um grafo trivial.

Se G é simples e 3-conexo, então o grafo completo K_4 , é um menor de G . Logo, $K_4/S \cong B^3$, onde S é uma árvore geradora de K_4 .

Se G admite l laço com $E(G) = E(T)$, então $G/T \cong B^l$.

Suponhamos que, G não possui laços e admite a única rama $xy = e \notin E(T)$, com respeito a T .

Daí a rama e não pode ser uma aresta pendente, logo, em seus extremos x e y incidem pelo menos uma aresta de T , digamos $e_i = xu$ e $e_j = yv$ e os vértices u e v não necessariamente serão distintos.

Usando a operação contração aresta sobre e_i e e_j , obtemos o grafo contração $G/\{e_i, e_j\}$ tendo o laço e , por conseguinte, $G/\{e_i, e_j\} \cong B^1$.

Suponhamos que para os grafos 3-conexos H com $r_T \leq m$ o teorema vale.

Seja F um grafo 3-conexo com $r_T = m + 1$, provemos que $F/T \cong B^{m+1}$.

Consideremos T a *árvore geradora* de F e $w = uv$ uma *rama* de F com respeito a T e sejam e_i, e_j as *arestas* de T que incidem, respectivamente, em u e em v , isto é, $e_i = xu$ e $e_j = yv$.

O *grafo contração* $G' = F/\{e_i, e_j\}$ possui o *laço* w , além disso, a *árvore geradora* de F é *isomorfa* a T e o *grafo* G' tendo m *ramas*. Logo, obtemos $G'/T \cong B^{m+1}$.

Se F possuir s *laços*, pelo mesmo raciocínio concluímos que $G'/T \cong B^{m+s+1}$.

Pelo princípio de indução para todo natural m , verifica-se que $G/T \cong B^m$ e o teorema está demonstrado.

Este teorema é uma extensão da proposição 7.5.1 de (Gross e Yellen, 1999, p.264)

Corolário 4.1. *Para todo inteiro positivo m , o grafo buquê B^m é quase-homeomorfo de W_m .*

W_m segue que $Y_{1,m}$ é uma *árvore geradora* de W_m .

Logo, o *grafo contração* $W_m/Y_{1,m}$ é *isomorfo* a B^m , isto é, $W_m/Y_{1,m} \cong B^m$, e está completa a demonstração do corolário.

Do teoremas 0.3.1 e o corolário 0.3.1 do teorema 0.3.2, concluímos que os *grafos roda* W_m e o *buquê* B^m são *quase-homeomorfos* para todo natural m .

Conclusão

Foi introduzida a noção de *quase-homeomorfismo* em *grafos* arbitrários, iniciando com as definições de *grafos extensão* e quase-se inversa de um *grafo* G , sendo que o *grafo extensão* vem a ser uma generalização de *divisão de vértice* em *grafo simples* de Tutte e o *grafo quase-inversa* possui G -menor ao *grafo* G e, foram incluídos exemplos de ilustração, como as observações.

Transformamos um *grafo 3-conexo* em um *grafo* com único *vértice-corte* e, reciprocamente. Em outras palavras, para um inteiro positivo m provamos que o *grafo roda 3-conexo* W_m transforma-se no *grafo buquê* $B^m = G$ com o único *vértice-corte* v , e reciprocamente, no sentido seguinte, que o *grafo extensão* $G_{ex:v}$ de G , contém um *subgrafo* F o qual é *isomorfo* ao *grafo prisma* e, finalmente, o *grafo contração* F/S é *isomorfo* a W_m , onde $S \subset E(F)$. Por conseguinte, W_m e B^m são *quase-homeomorfos*. Apesar do resultado principal provado neste artigo, a questão formulada na observação B levanta um possível relacionamento entre os *grafos extensão* e *imersível*, o qual será o próximo assunto a ser abordado.

CORTEZ-MORALES, W. J., Quasi-homeomorphism. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.26, n.3, p.133-147, 2008.

- **ABSTRACT:** In this paper we define the extension and quasi-inverse graphs of the arbitrary G , which associate to each vertex of G with a clique-2. The extension graph generalizes a useful vertex-splitting notion of Tutte for simple graphs. This transformation is a kind of inverse of edge contraction. From two new graphs above mentioned, we introduce the notion of quasi-homeomorphism in arbitrary graphs. The main result of this work is to prove that wheel and bouquet graphs are quasi-homeomorphisms. Moreover, we give a condition for an extension graph to be quasi-inverse of G .
- **KEYWORDS:** Graph; clique-2; quasi-inverse; quasi-homeomorphism; extension.

References

- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*. In: BOARD, S. A.; Ribet K. A. (Ed.) Graduate texts in mathematics. New York: Springer-Verlag, 2007. 244p.
- DAVEN, M.; MACDOUGALL, J. A.; RODGER, C. A. Maximal sets of Hamilton cycles in complete multipartite graphs, *J. Graph Theory*, Chichester, v.43, p.50-66, 2002.
- DIESTEL, R. *Graph theory*, 2. ed. Graduate Texts, in Mathemaotics vol. 173, Springer-Verlag New York, 2000.
- DIRAC, G. A. Some results concerning the structure of graphs *Canad. Math. Bull.*, Toronto, v.6, n.2, p.183-210, 1963.
- CORTEZ-MORALES, W. J., Uma caracterização de grafos imersíveis, *Rev. Pesq. Oper.*, Rio de Janeiro, v.25, n.1, p.1-9, 2005.
- FRANK, A. Connectivity and Network Flows. In: GRAHAM, R. L.; GRÖSTCHEL, M.; LOVÁSZ, L. (Ed.) *Handbook of combinatorics*, New York: Elsevier Sciences, 1995. p.111-177.
- GROSS, J. L.; TUCKER, T. W. Topological graph theory. New York: John Wiley & Sons, 1987. 351p.
- GROSS, J.; YELLEN, J. *Graph theory and its applications*. New York: The CRC Press, 1999. 678p. (Series on Discrete Mathematics and its Applications).
- HILTON, A. J. W.; RODGER, C. A. Hamiltonian decompositions of complete regular s -partite graphs, *Discrete Math.*, Amsterdam, v.58, p.63-78, 1986.
- JØRGENSEN, L. K. Contractions to complete Graphs, *Ann. Discrete Math.*, Amsterdam, v.41, p.307-310, 1989.
- KILAKOS, K.; SHEPHERD, B. Minors and the chromatic index of r -graphs. New Brunswick: DIMACS, echnical Report, 1993. p.449-467. (DIMACS Technical Report 93-62).
- SAITO, A. Splitting and contractible edges in 4-connected graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, Duluth, v.88, p.227-235, 2003.

TUTTE, W. T. A theory of 3-connected graphs *Proc. K. Ned. Akad. Wet., Ser A*, Amsterdam, v.64, n.23, p.441-455, 1961.

TUTTE, W. T., *Graph theory*. In: ENCYCLOPEDIA of mathematics and its applications. California: Addison-Wesley Publishing company, 1984. v.21.

WEST, D. B. *Introduction to graph theory*, 2. ed., New Jersey: Prentice Hall. 2001. 588p.

ZHANG, C. Q. Vertice splitting, parity subgraphs and circuit covers. *J. Combin. Math. Combin Comput.*, Winnipeg, v.20, p.206-216, 1996.

Recebido em 09.05.2008.

Aprovado após revisão em 23.10.2008.