VALORES CRÍTICOS AJUSTADOS PARA INFERÊNCIA EM MODELOS LINEARES DE REGRESSÃO SOB HETEROSCEDASTICIDADE DE FORMA DESCONHECIDA

Antonio Carlos Ricardo BRAGA JUNIOR[1]
Francisco CRIBARI NETO[2]
Tatiene Correia de SOUZA[3]

▪ RESUMO: Inferência em modelos lineares de regressão na presença de heteroscedasticidade de forma desconhecida é usualmente realizada através do uso do estimador de mínimos quadrados ordinários do vetor de parâmetros de regressão juntamente com um estimador consistente de sua matriz de covariâncias. O estimador mais comumente usado é o HC0, que foi proposto por Halbert White (White, 1980). Algumas formas alternativas deste estimador foram propostas na literatura, dentre as quais destacam-se HC2, HC3 e HC4. Tais estimadores são rotineiramente usados em testes quasi-t, que são realizados com base em valores críticos assintóticos obtidos da distribuição normal padrão. O objetivo do presente artigo é, através do uso de métodos numéricos, obter valores críticos ajustados para esses testes. O uso de tais valores críticos conduz a inferências mais precisas em amostras finitas.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Modelos heteroscedásticos; regressão linear; testes quasi-t.

1 Introdução

O modelo de regressão linear é bastante empregado quando desejamos analisar a relação entre variáveis explicativas com uma variável resposta. Neste contexto, o método de estimação conhecido como mínimos quadrados ordinários (MQO) é o

[1]Universidade Federal da Bahia – UFBA, Instituto Multidisciplinar em Saúde – IMS, Núcleo de Tecnologia em Saúde – NTS, CEP: 45031-000, Vitória da Conquista, BA, Brasil. E-mail: *acjr@ufba.br*
[2]Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Departamento de Estatística, Recife, CEP: 50740-540, PE, Brasil. E-mail: *cribari@de.ufpe.br*
[3]Universidade Federal da Bahia – UFBA, Departamento de Estatística, Ondina, CEP: 40170-110, BA, Brasil. E-mail: *tatiene@ufba.br*

mais utilizado por pesquisadores e estatísticos aplicados. A utilização em grande escala deste método pode ser explicada por possuir propriedades atraentes, tais como não-viciosidade, consistência e eficiência, além da facilidade de seus cálculos e implementação computacional.

Comumente o estimador de mínimos quadrados ordinários é utilizado na estimação dos parâmetros do modelo de regressão linear. Em particular, ao se utilizar o modelo de regressão clássico é usual assumir que os erros têm variância constante, caso em que se diz haver homoscedasticidade. Contudo, tal suposição não é verificada em muitas situações práticas. Na presença de heteroscedasticidade a estimativa de MQO da matriz de covariâncias dos estimadores dos parâmetros de regressão torna-se imprecisa, podendo conduzir a conclusões incorretas a respeito da relação entre a variável dependente e as variáveis explicativas. Isso ocorre já que os testes t associados requerem estimativas confiáveis das variâncias dos estimadores dos parâmetros. Uma possível solução é usar estimadores consistentes da matriz de covariâncias, HC's, que funcionam bem tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade (Long & Ervin, 2000).

Na realização de testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear do tipo $\mathcal{H}_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_i \neq \beta_i^{(0)}$, em que $\beta_i^{(0)}$ é uma dada constante e β_i é o i-ésimo parâmetro de regressão, tem-se que, sob $\mathcal{H}_0$,

$$\tau = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\mathrm{var}}(\widehat{\beta}_i)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

em que $\widehat{\mathrm{var}}(\widehat{\beta}_i)$ é um estimador consistente para $\mathrm{var}(\widehat{\beta}_i)$ e $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denota convergência em distribuição. Mesmo em amostras de tamanho reduzido a moderado são utilizados valores críticos assintóticos obtidos da distribuição limite normal padrão. Este fato pode comprometer o bom desempenho desses testes.

Outro fator que pode prejudicar a qualidade da aproximação da distribuição nula da estatística τ pela distribuição limite $\mathcal{N}(0, 1)$ é o grau máximo de alavancagem. Conjecturamos que quanto maior o grau máximo de alavancagem, $h_{\max}$, maior será a distorção de tamanho do teste para um dado número de observações.

O objetivo do presente artigo é propor novos valores críticos que levem em consideração o tamanho amostral, o grau máximo de alavancagem e o número de regressores a fim de proporcionar testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo de regressão linear com taxas de rejeição sob a hipótese nula mais próximas dos correspondentes níveis nominais. A obtenção destes novos valores críticos será feita de forma numérica, a partir de um grande número de simulações estocásticas.

2 O modelo, estimadores e testes

O modelo de interesse é o modelo de regressão linear, definido como

$$y = X\beta + e, \tag{1}$$

em que y é um vetor $n \times 1$ de observações de uma variável dependente, X é uma matriz $n \times k$ de regressores fixos com posto$(X) = k$, β é um vetor $k \times 1$ de parâmetros desconhecidos e e é um vetor $n \times 1$ de erros aleatórios não-correlacionados, cada um tendo média zero e variância σ_t^2, $t = 1, \ldots, n$. A matriz de covariâncias de e é dada por $\Psi = \mathrm{diag}\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$.

O estimador de mínimos quadrados ordinários do coeficiente do modelo de regressão em (1) é denotado por $\widehat{\beta}$. É fácil mostrar que $\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$. Sob homoscedasticidade, tem-se que $\sigma_t^2 = \sigma^2 > 0$, i.e., $\Psi = \sigma^2 I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n. Então, a matriz de covariâncias do estimador de mínimos quadrados ordinários é dada por $\sigma^2(X'X)^{-1}$ e pode ser facilmente estimada por $\widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, em que $\widehat{\sigma}^2 = \widehat{e}'\widehat{e}/(n-k)$, $\widehat{e} = [I - X(X'X)^{-1}X']y = My$.

Na presença de heteroscedasticidade, o estimador $\widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ não é mais consistente nem não-viesado para a matriz de covariâncias de $\widehat{\beta}$. Dado que em muitas aplicações os erros são heteroscedásticos, é importante considerar estimadores mais confiáveis para a variância de $\widehat{\beta}$. Um estimador consistente da matriz de covariâncias de $\widehat{\beta}$ muito utilizado foi proposto por Halbert White (1980), sendo aqui denotado por HC0. O estimador de White é obtido substituindo-se o t-ésimo elemento diagonal de Ψ pelo t-ésimo resíduo ao quadrado, resultando em $\mathrm{HC0} = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Psi}_0 X(X'X)^{-1}$, em que $\widehat{\Psi}_0 = \mathrm{diag}\{\widehat{e}_1^2, \ldots, \widehat{e}_n^2\}$.

Apesar de ser um estimador consistente da matriz de covariâncias de $\widehat{\beta}$ tanto sob heteroscedasticidade como sob homoscedasticidade, o estimador HC0 tende a subestimar, em amostras finitas, a variância do estimador de MQO, sendo tipicamente bastante viesado quando o tamanho da amostra é pequeno. Através de simulações de Monte Carlo, Long & Ervin (2000) constataram que este estimador não é confiável quando o tamanho da amostra é menor ou igual a 250.

Assim como o tamanho amostral, o desenho da regressão, ou seja, a estrutura da matriz de regressores X, é outro fator que também interfere no desempenho do estimador de White em amostras finitas. Quando a matriz de regressores X contém observações de alta alavancagem, isto é, observações que possuem potencial para exercer grande influência sobre os valores a serem preditos, o estimador HC0 tende a ser muito viesado. Dessa maneira, o uso de estimativas obtidas a partir de HC0 pode levar a inferências errôneas.

A partir dos resultados apresentados em Horn, Horn & Duncan (1975), MacKinnon & White (1985) propuseram um estimador consistente para a matriz de covariâncias, denotado por HC2 que leva em consideração os elementos da matriz $H = X(X'X)^{-1}X'$. O estimador HC2 é dado por $\mathrm{HC2} = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Psi}_2 X(X'X)^{-1}$, em que $\widehat{\Psi}_2 = \mathrm{diag}\left\{\frac{\widehat{e}_1^2}{1-h_1}, \ldots, \frac{\widehat{e}_n^2}{1-h_n}\right\}$, h_t denotando o t-ésimo elemento diagonal da matriz $H = X(X'X)^{-1}X'$.

Davidson & MacKinnon (1993) definiram um estimador, denotado por HC3, que é uma modificação do estimador de White, cujo comportamento é similar ao do estimador 'jackknife' (MacKinnon & White, 1985). O estimador HC3 é dado por $\mathrm{HC3} = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Psi}_3 X(X'X)^{-1}$, em que $\widehat{\Psi}_3 = \mathrm{diag}\left\{\frac{\widehat{e}_1^2}{(1-h_1)^2}, \ldots, \frac{\widehat{e}_n^2}{(1-h_n)^2}\right\}$.

Cribari–Neto (2004) propôs uma modificação do estimador HC3, denominada

HC4, que leva em consideração o impacto de observações com alta alavancagem em amostras finitas incorporando fatores de desconto definidos pela razão entre os graus individuais de alavancagem e o grau médio de alavancagem. O estimador HC4 é dado por $\mathrm{HC4} = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Psi}_4 X(X'X)^{-1}$, em que $\widehat{\Psi}_4 = \mathrm{diag}\left\{\frac{\widehat{e}_1^2}{(1-h_1)^{\delta_1}}, \ldots, \frac{\widehat{e}_n^2}{(1-h_n)^{\delta_n}}\right\}$ e $\delta_t = \min\left\{4, \frac{h_t}{\overline{h}}\right\} = \min\left\{4, \frac{nh_t}{\sum_{j=1}^n h_j}\right\}$, com $\overline{h} = n^{-1}\sum_{j=1}^n h_j$, i.e., $\overline{h}$ é a média dos h_t's. Ou seja, $\delta_t = \min\left\{4, \frac{nh_t}{k}\right\}$.

O expoente controla o nível de desconto do t-ésimo resíduo ao quadrado e é determinado pela razão entre h_i e a média dos h_t's, $\overline{h}$. Como $0 < 1 - h_t < 1$ e $\delta_t > 0$, segue que $0 < (1-h_t)^{\delta_t} < 1$. O t-ésimo resíduo ao quadrado deverá ser tanto mais fortemente inflacionado quanto maior for h_t relativamente a $\overline{h}$. Este desconto linear é truncado em 4, que equivale a duas vezes o grau de desconto usado pelo estimador HC3. Ou seja, usa-se $\delta_t = 4$ quando $h_t > 4\overline{h} = 4k/n$. Os resultados numéricos apresentados em Cribari–Neto (2004) mostram que este estimador tem comportamento superior ao do estimador HC3 em amostras finitas no que diz respeito a testes quasi-t associados.

Os estimadores consistentes da matriz de covariâncias apresentados nesta seção estão implementados na plataforma `R` da função `hccm` do pacote `car`. Para detalhes sobre esse pacote, ver Fox (2002).

Aqui, o interesse reside em testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \beta_i = \beta_i^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_i \neq \beta_i^{(0)}$, ou ainda, mais geralmente, $\mathcal{H}_0 : c'\beta = a$ contra $\mathcal{H}_1 : c'\beta \neq a$, onde c é um dado vetor $p \times 1$, a é uma dada constante, β_i é o i-ésimo elemento do vetor de parâmetros β e $\beta_i^{(0)}$ é uma dada constante. A estatística

$$t = \frac{c'\widehat{\beta} - a}{\sqrt{\widehat{\mathrm{var}}(c'\widehat{\beta})}}, \tag{2}$$

em que $\mathrm{var}(c'\widehat{\beta}) = c'\mathrm{var}(\widehat{\beta})c = c'(X'X)^{-1}X'\mathrm{diag}\{\widehat{\sigma}_1^2, \ldots, \widehat{\sigma}_n^2\}X(X'X)^{-1}c$, sob certas suposições e sob a suposição adicional de normalidade dos erros, i.e., $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, tem, sob a hipótese nula, distribuição t de Student com $n-k$ graus de liberdade. A estimativa da variância usada no denominador é a usual de MQO. Além de ter distribuição nula t_{n-k}, a estatística de teste em (2) possui, ainda sob $\mathcal{H}_0$, distribuição limite $\mathcal{N}(0,1)$.

Sob heteroscedasticidade e/ou não-normalidade, a estatística (2) não mais possui, sob a hipótese nula, distribuição exata t_{n-p}. Neste caso utiliza-se uma estatística de teste denominada 'quasi-t' definida como

$$\frac{c'\widehat{\beta} - a}{\sqrt{\widehat{\mathrm{var}}(c'\widehat{\beta})}} \quad \xrightarrow{\mathcal{D}} \quad \mathcal{N}(0,1),$$

em que $\widehat{\mathrm{var}}(c'\widehat{\beta})$ é um estimador consistente para $\mathrm{var}(c'\widehat{\beta})$ tanto sob homoscedasticidade quanto sob heteroscedasticidade de forma desconhecida. Testes são realizados com valores críticos aproximados (assintóticos). Na próxima seção, valores críticos mais confiáveis para tais testes são obtidos.

3 Valores críticos ajustados e evidência numérica

Os resultados apresentados e discutidos a seguir foram baseados em quatro modelos de regressão linear, são eles:

1. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + e_t, \quad t = 1, \ldots, n,$
2. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + e_t, \quad t = 1, \ldots, n,$
3. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + e_t, \quad t = 1, \ldots, n,$
4. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + \beta_5 x_{5t} + e_t, \quad t = 1, \ldots, n,$

em que $e_1, \ldots, e_n$ são não-correlacionados e cada e_t tem média zero e variância $\sigma_t^2 = \exp(\gamma x_{1t} + \gamma x_{2t})$. Para cada modelo apresentado acima, foram utilizados alguns valores para estes parâmetros a fim de se obter diferentes graus de heteroscedasticidade, $\lambda = \sigma^2_{\max}/\sigma^2_{\min}$, iguais a 1 (homoscedasticidade), 10 (heteroscedasticidade moderada) e 100 (heteroscedasticidade muito forte). Vale salientar que quando $\gamma = 0$ há homoscedasticidade. Para cada um dos quatro modelos apresentados acima, foram considerados seis tamanhos amostrais, sendo eles $n = 20$, 40, 60, 100, 200 e 500. Os valores das variáveis regressoras foram selecionados para $n = 20$ e geradas aleatoriamente da distribuição $\mathcal{U}(0, 1)$ de forma a conduzir a diferentes valores de $r = h_{\max}/\bar{h}$ que é definido pela razão entre o grau máximo de alavancagem e a alavancagem média, sendo h_t é o t-ésimo elemento diagonal da matriz $H = X(X'X)^{-1}X'$. Os valores de r dependem apenas de H e, assim, de X. Os demais tamanhos amostrais foram obtidos simplesmente replicando-se as vinte primeiras observações tantas vezes quanto necessário. Este procedimento faz com que o grau de heteroscedasticidade e r se mantenham constantes em todos os tamanhos amostrais considerados. Com isso é possível avaliar os efeitos isolados do grau de heteroscedasticidade e do tamanho amostral sobre o comportamento dos testes.

As simulações de Monte Carlo foram baseadas em 100,000 (cem mil) réplicas com os coeficientes $(\beta_0, \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ dos regressores iguais a 1 e $\beta_2 = 0$ (já que desejamos testar $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ contra $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$) e $e_t \sim \mathcal{N}(0, \exp(\gamma x_{1t} + \gamma x_{2t}))$, $t = 1, \ldots, n$. Todas as simulações foram realizadas usando a linguagem matricial de programação `Ox` (Doornik, 2006). Para cada modelo, foram realizadas 360 simulações que combinaram 6 tamanhos amostrais, 3 graus de heteroscedasticidade e 20 razões de alavancagem.

Após a realização de todas as simulações, foram realizadas as modelagens estatísticas onde as variáveis respostas de interesse são os valores críticos empíricos correspondentes aos testes que utilizam HC0, HC2, HC3 e HC4, considerando três níveis nominais (10%, 5% e 1%).

Portanto, há doze variáveis resposta a serem modeladas. Considerando a dependência destes valores críticos exatos sobre o tamanho amostral (n), o grau máximo de alavancagem ($h_{\max}$) e o número de regressores (k). Nesta etapa foram feitas várias tentativas de modelagem que levaram em consideração as mais variadas especificações, não só das variáveis explicativas como também da variável resposta. Dentre os modelos que foram considerados estão:

1. $c_t = \beta_0 + \beta_1 m_t + \beta_2 m_t^2 + \beta_3 f_t + \beta_4 f_t^2 + \beta_5 d_t + \beta_6 f_t^2 d_t + e_t$,
2. $c_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + \beta_3 f_t^2 + \beta_4 d_t + \beta_5 f_t^2 d_t + e_t$,
3. $c_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + \beta_3 f_t + \beta_4 d_t + \beta_5 f_t^2 d_t + e_t$,
4. $c_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + \beta_3 f_t + \beta_4 f_t^2 d_t + e_t$,
5. $c_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^2 + \beta_2 f_t + \beta_3 f_t^2 + \beta_4 d_t + \beta_5 f_t^2 d_t + e_t$,
6. $c_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 f_t + \beta_3 f_t^2 + \beta_4 m_t f_t + e_t$,

em que c denota o valor crítico (quantil) apropriado, $x = r/n$ sendo $r = h_{\max}/\bar{h}$, d é uma variável $d$ummy que assume valor 1 quando $r > n/10$ e valor 0 caso contrário, $f = k/n$ sendo $k = 2, 3, 4, 5$ (número de regressores) e e_t é um erro aleatório com média zero, variância $0 < \sigma_t^2 < \infty$ e não-correlacionado com e_s $\forall t \neq s$. Cada um dos modelos acima foi aplicado a cada uma das oito variáveis resposta.

A escolha do modelo a ser utilizado foi baseada na proximidade dos valores críticos preditos pelo modelo relativamente aos valores críticos empíricos. Boas aproximações devem conduzir a taxas de rejeição sob a hipótese nula mais próximas dos níveis nominais especificados. Após a realização de diversos exercícios numéricos, foi constatado que o quarto modelo foi aquele que forneceu, no agregado, as melhores aproximações. Este será o modelo utilizado no que se segue.

3.1 Resultados numéricos com valores críticos assintóticos

Nas Tabelas 1 e 2 são apresentadas as taxas de rejeição obtidas via simulação de Monte Carlo com valores críticos assintóticos. Nesta investigação inicial são considerados modelos com 2, 3, 4 e 5 regressores, e são consideradas quatro razões de alavancagem, a saber: 3,45; 3,21; 3,42 e 3,33, respectivamente, cada tabela correspondendo a determinado número de regressores (k) e uma razão de alavancagem (r). Os resultados apresentados nestas tabelas correspondem aos testes baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4. São considerados todos os tamanhos amostrais utilizados e os níveis nominais de 10%, 5% e 1%. Apresentamos apenas o cenário de homoscedasticidade ($\lambda = 1$) e heteroscedasticidade forte ($\lambda = 100$).

3.2 Valores críticos ajustados

Após a realização das modelagens estatísticas em que as variáveis respostas de interesse foram os valores críticos empíricos correspondentes aos testes baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4, considerando três níveis nominais (10%, 5% e 1%), tem-se, então, aos seguintes modelos estimados:

1. $\widehat{c}_{\alpha=10\%,\mathrm{HC0}} = 1,645 - 0,311 x_t + 37,304 x_t^2 + 1,931 f_t - 4,802 f_t^2 d_t$,

2. $\widehat{c}_{\alpha=10\%,\text{HC2}} = 1,645 + 1,842x_t + 9,230x_t^2 + 0,076f_t - 2,484f_t^2 d_t,$

3. $\widehat{c}_{\alpha=10\%,\text{HC3}} = 1,645 + 3,016x_t - 11,648x_t^2 - 1,357f_t - 1,773f_t^2 d_t,$

4. $\widehat{c}_{\alpha=10\%,\text{HC4}} = 1,645 - 0,9614x_t - 12,2161x_t^2 + 2,0951f_t - 7,4593f_t^2 d_t,$

5. $\widehat{c}_{\alpha=5\%,\text{HC0}} = 1,960 + 1,270x_t + 41,674x_t^2 + 1,965f_t - 5,985f_t^2 d_t,$

6. $\widehat{c}_{\alpha=5\%,\text{HC2}} = 1,960 + 3,291x_t + 12,059x_t^2 - 0,129f_t - 3,786f_t^2 d_t,$

7. $\widehat{c}_{\alpha=5\%,\text{HC3}} = 1,960 + 4,792x_t - 13,963x_t^2 - 1,872f_t - 2,670f_t^2 d_t,$

8. $\widehat{c}_{\alpha=5\%,\text{HC4}} = 1,960 + 1,180x_t - 18,768x_t^2 + 1,026f_t - 7,438f_t^2 d_t,$

9. $\widehat{c}_{\alpha=1\%,\text{HC0}} = 2,576 + 5,493x_t + 51,226x_t^2 + 2,065f_t - 8,613f_t^2 d_t,$

10. $\widehat{c}_{\alpha=1\%,\text{HC2}} = 2,576 + 7,340x_t + 18,250x_t^2 - 0,570f_t - 6,905f_t^2 d_t,$

11. $\widehat{c}_{\alpha=1\%,\text{HC3}} = 2,576 + 9,174x_t - 14,637x_t^2 - 2,923f_t - 5,632f_t^2 d_t,$

12. $\widehat{c}_{\alpha=1\%,\text{HC4}} = 2,576 + 6,189x_t - 34,140x_t^2 + 0,620f_t - 8,010f_t^2 d_t,$

em que $x = r/n$ sendo $r = h_{\max}/\bar{h}$, $f = k/n$ sendo $k = 2,3,4,5$ (número de regressores) e d é uma variável *dummy* que assume valor 1 quando $r > n/10$ e valor 0 caso contrário. Os modelos 1 a 4 correspondem a valores críticos para testes com níveis de significância $\alpha = 10\%$ baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4, respectivamente. Seguindo a mesma lógica, os modelos de 5 a 8 podem ser usados para predizer valores críticos considerando $\alpha = 5\%$, por fim, os modelos de 9 a 12 para predizer valores críticos considerando $\alpha = 1\%$. Estes modelos foram estimados com restrição ao parâmetro de intercepto, β_0. Essa é uma restrição natural a ser adotada, já que é intuitivo admitirmos que assintoticamente x tende a ser nulo, situação em que se deve obter valores críticos assintóticos como predição dos modelos. Neste sentido, no processo de estimação foi imposta a restrição de que o intercepto deveria ser igual ao correspondente valor crítico assintótico.

Na Tabela 3 são apresentados os valores críticos ajustados considerando alguns casos onde combinamos tamanho amostral, n, número de regressores, k, e razão de alavancagem, r, para cada um dos HC's e para cada nível de significância. Em um dos exemplos, que será mostrado a seguir, que considera $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 3,42$, $\alpha = 10\%$, $k = 4$ e em que o estimador HC0 é considerado, o teste baseado neste estimador foi corrigido, fazendo sua taxa de rejeição de 44,58% (Tabela 5) para 18,75% (Tabela 5). Isso foi feito utilizando o valor crítico ajustado pelo modelo proposto ao invés do valor crítico assintótico. Neste caso, o valor crítico ajustado igual a 2,87 (Tabela 6) foi utilizado no lugar do correspondente valor crítico assintótico (1,64).

Nestas mesmas tabelas percebe-se que, ao considerar tamanhos amostrais cada vez maiores, os valores críticos ajustados se aproximam dos valores críticos assintóticos, independentemente da razão de alavancagem e do número de regressores. Isto justifica os desempenhos semelhantes entre os testes baseados nos valores críticos ajustados e assintóticos quando o tamanho amostral suficientemente grande.

Tabela 1 - Porcentagens de rejeição de testes quasi-t baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3, HC4 obtidas utilizando valores críticos assintóticos, $r = 3,45$; $k = 2$ e $r = 3,45$; $k = 3$, respectivamente

λ	teste	α	$r = 3,45$; $k = 2$						$r = 3,21$; $k = 3$					
			n						n					
			20	40	60	100	200	500	20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	24,40	16,88	14,66	12,60	11,22	10,56	22,52	16,35	13,84	12,22	11,53	10,64
		5	17,66	10,92	8,84	7,23	5,97	5,45	15,60	9,99	7,78	7,26	6,00	5,14
		1	9,23	4,40	3,06	2,12	1,43	1,21	7,04	3,71	2,46	2,03	1,48	1,07
	HC2	10	17,93	13,98	12,76	11,53	10,63	10,33	14,36	12,60	11,35	10,96	10,96	10,37
		5	12,28	8,59	7,44	6,45	5,56	5,31	8,88	7,41	6,18	6,19	5,54	5,02
		1	5,73	3,23	2,45	1,76	1,30	1,16	3,33	2,34	1,90	1,63	1,30	1,04
	HC3	10	12,21	11,29	10,94	10,48	10,11	10,11	7,23	9,35	9,21	9,77	10,24	10,02
		5	7,81	6,63	6,13	5,70	5,21	5,16	4,16	5,26	4,84	5,39	5,14	4,85
		1	3,35	2,28	1,85	1,46	1,18	1,12	1,24	1,44	1,33	1,28	1,09	1,00
	HC4	10	9,22	10,05	10,11	10,00	9,84	10,04	4,44	7,90	8,23	9,31	9,94	9,93
		5	5,70	5,78	5,55	5,39	5,03	5,10	2,60	4,23	4,17	4,95	4,99	4,73
		1	2,36	1,94	1,63	1,36	1,12	1,09	0,72	1,22	1,17	1,18	1,03	0,97
100	HC0	10	22,87	16,28	14,11	12,47	11,04	10,47	29,68	20,58	17,40	14,85	12,93	11,00
		5	15,16	9,82	8,16	6,77	5,73	5,34	21,34	13,17	10,89	8,79	7,31	5,81
		1	6,38	3,26	2,39	1,69	1,28	1,12	10,25	5,22	3,47	2,52	1,81	1,48
	HC2	10	14,11	12,77	11,95	11,18	10,42	10,22	18,29	15,84	14,66	13,22	12,24	10,72
		5	8,33	7,15	6,52	5,84	5,32	5,15	11,51	9,62	8,59	7,61	6,82	5,65
		1	2,96	2,07	1,70	1,35	1,13	1,07	4,61	3,22	2,48	2,07	1,62	1,41
	HC3	10	7,33	9,50	9,85	9,96	9,82	9,99	9,02	11,91	12,10	11,72	11,54	10,50
		5	3,88	4,94	5,09	5,04	4,92	4,99	5,15	6,72	6,36	6,49	6,27	5,43
		1	1,17	1,23	1,52	1,09	1,02	1,02	1,83	1,78	1,60	1,63	1,34	1,34
	HC4	10	3,82	7,30	8,34	9,07	9,34	9,81	5,49	10,49	11,41	11,43	11,42	10,48
		5	2,03	3,49	4,13	4,42	4,62	4,87	3,00	5,69	5,93	6,24	6,15	5,38
		1	0,61	0,79	0,84	0,87	0,94	0,97	1,20	1,52	1,39	1,54	1,31	1,31

Tabela 2 - Porcentagens de rejeição de testes quasi-t baseados nos estimadores $\mathrm{HC0}, \mathrm{HC2}, \mathrm{HC3}, \mathrm{HC4}$ obtidas utilizando valores críticos assintóticos, $r = 3,42$; $k = 4$ e $r = 3,33$; $k = 5$, respectivamente

λ	teste	α	$r = 3,42$; $k = 4$						$r = 3,33$; $k = 5$					
			n						n					
			20	40	60	100	200	500	20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	22,82	15,49	13,98	11,58	11,08	10,53	26,13	17,90	15,40	13,44	11,89	11,16
		5	15,88	9,67	8,29	6,10	5,69	5,25	18,91	11,41	9,33	7,50	6,52	5,87
		1	7,70	3,42	2,67	1,86	2,69	2,67	10,05	4,43	3,18	2,38	1,73	1,14
	HC2	10	14,35	12,29	11,80	10,18	10,27	10,33	17,58	14,07	12,83	11,82	11,18	10,90
		5	9,19	7,01	6,72	5,27	5,21	5,14	11,76	8,41	7,43	6,51	6,14	5,65
		1	3,81	2,18	1,84	1,46	2,64	2,65	5,24	3,02	2,33	2,00	1,53	1,11
	HC3	10	6,40	8,87	9,49	8,87	9,68	10,02	9,30	10,43	10,53	10,42	10,52	10,62
		5	3,53	4,72	5,17	4,54	4,77	4,99	5,52	5,79	5,88	5,59	5,67	5,45
		1	1,07	1,30	1,27	1,13	2,60	2,63	1,97	2,01	1,67	1,56	1,34	1,03
	HC4	10	2,28	7,98	9,16	8,64	9,60	10,01	0,20	11,94	11,47	11,05	10,85	10,72
		5	1,32	4,15	4,75	4,47	4,72	5,02	0,08	6,89	6,50	5,99	5,88	5,51
		1	0,52	1,10	1,16	1,08	2,60	2,63	0,01	2,42	1,99	1,76	1,47	1,07
100	HC0	10	44,58	24,65	19,97	15,11	12,70	10,76	17,19	12,26	11,39	10,69	10,82	10,37
		5	36,22	17,53	13,03	9,18	7,14	5,84	9,20	5,93	5,53	5,23	5,18	4,93
		1	23,51	8,54	5,75	3,14	2,05	1,43	2,81	1,11	0,86	0,87	1,03	0,93
	HC2	10	30,41	18,27	15,45	12,76	11,46	10,35	6,48	7,65	8,53	9,08	9,98	10,01
		5	22,08	12,41	9,93	7,41	6,35	5,51	2,93	3,00	3,62	4,25	4,58	4,70
		1	10,90	5,33	3,80	2,32	1,63	1,28	0,83	0,39	0,40	0,59	0,87	0,84
	HC3	10	10,93	12,89	11,94	10,52	10,36	9,89	1,58	4,00	5,95	7,51	9,22	9,73
		5	6,10	8,06	7,28	6,01	5,55	5,16	0,72	1,39	2,05	3,23	4,02	4,56
		1	2,43	3,09	2,44	1,62	1,29	1,15	0,15	0,11	0,16	0,36	0,76	0,80
	HC4	10	2,80	9,06	9,08	8,88	9,44	9,45	0,05	4,85	6,58	7,93	9,48	9,80
		5	1,58	5,46	5,22	4,79	5,01	4,96	0,04	1,77	2,50	3,47	4,19	4,59
		1	0,60	2,07	1,75	1,19	1,02	1,11	0,02	0,14	0,26	0,39	0,78	0,83

Tabela 3 - Valores críticos ajustados para $n = 20, 40, 60, 100, 500$

n		$n = 20$			$n = 40$			$n = 60$			$n = 100$			$n = 500$		
	α	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
$r = 3,45$	HC0	2,85	3,56	5,17	1,98	2,46	3,51	1,81	2,23	3,12	1,72	2,09	2,86	1,65	1,98	2,62
$k = 2$	HC2	2,22	2,84	4,26	1,87	2,32	3,29	1,78	2,18	3,03	1,72	2,08	2,84	1,66	1,98	2,63
	HC3	1,66	2,15	3,37	1,75	2,17	3,09	1,73	2,12	2,95	1,71	2,07	2,81	1,66	1,98	2,63
	HC4	1,25	1,63	2,61	1,56	1,95	2,87	1,61	1,99	2,83	1,64	2,00	2,76	1,65	1,97	2,62
$r = 3,21$	HC0	2,74	3,39	4,89	1,98	2,44	3,45	1,82	2,23	3,10	1,73	2,10	2,86	1,66	1,98	2,63
$k = 3$	HC2	2,14	2,69	4,89	1,84	2,27	3,45	1,77	2,54	3,10	1,71	2,07	2,86	1,66	1,98	2,63
	HC3	1,58	2,03	3,11	1,70	2,10	2,97	1,70	2,08	2,86	1,69	2,04	2,76	1,66	1,98	2,62
	HC4	1,32	1,65	2,60	1,60	1,97	2,85	1,65	2,00	2,82	1,66	2,00	2,75	1,65	1,97	2,62
$r = 3,42$	HC0	2,87	3,55	5,09	2,08	2,57	3,54	1,98	2,41	3,15	1,75	2,13	2,72	1,66	1,98	2,63
$k = 4$	HC2	2,14	2,69	3,97	1,87	2,32	3,21	1,81	2,22	2,98	1,72	2,08	2,69	1,66	1,98	2,62
	HC3	1,48	1,89	2,91	1,68	2,08	2,90	1,66	2,05	2,83	1,68	2,03	2,75	1,65	1,98	2,61
	HC4	1,90	1,52	2,44	1,82	2,02	2,84	1,57	1,94	2,82	1,69	2,02	2,76	1,65	1,97	2,62
$r = 3,33$	HC0	2,81	3,44	4,89	2,12	2,60	3,51	1,80	2,14	3,15	1,77	2,15	2,90	1,66	1,99	2,63
$k = 5$	HC2	2,07	2,57	3,73	1,87	2,30	3,13	1,68	2,00	2,94	1,72	2,08	2,79	1,66	1,98	2,62
	HC3	1,37	1,74	2,61	1,65	2,03	2,78	1,57	1,86	2,76	1,66	2,01	2,70	1,65	1,97	2,61
	HC4	1,43	1,78	2,31	1,84	2,06	2,81	1,62	1,92	2,81	1,70	2,03	2,76	1,65	1,98	2,62

3.3 Resultados numéricos com valores críticos ajustados

A seguir será apresentada uma comparação entre as taxas de rejeição obtidas com valores críticos assintóticos, apresentado anteriormente, e as taxas de rejeição obtidas através do uso de valores críticos ajustados. Para os resultados apresentados a seguir, considerou-se quatro razões de alavancagem (r), são elas: 3,45; 3,21; 3,42 e 3,33; considerando dois, três, quatro e cinco regressores no modelo de regressão, respectivamente. São apresentados os valores críticos ajustados utilizados nesses casos, objetivando uma comparação com os valores críticos assintóticos, que são comumente usados na prática.

Vários aspectos chamam atenção nas Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados das novas simulações. Pode-se observar que os testes que utilizam valores críticos ajustados tendem a melhorar de desempenho com o aumento do tamanho amostral. Isso é visto pela aproximação gradual das taxas de rejeição dos correspondentes níveis nominais à medida que os tamanhos amostrais considerados são cada vez maiores. Esses testes têm desempenhos semelhantes aos que utilizam o valor crítico assintótico quando o tamanho amostral é grande. Este segundo fato já era esperado, visto que quando n é grande os novos valores críticos são aproximadamente iguais aos valores críticos assintóticos correspondentes.

Nota-se que apesar dos testes baseados nos estimadores HC0 e HC2 com base nos valores críticos ajustados serem muitas vezes conservadores, os mesmos conduzem a taxas de rejeição mais próximas dos respectivos níveis nominais do que aqueles baseados em valores críticos assintóticos. Por exemplo, o caso onde $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 3,21$, $\alpha = 10\%$, $k = 3$ e estimador HC0. Neste caso o teste baseado o estimador HC0 rejeitou a hipótese nula 29,98% das vezes (Tabela 1) ao utilizar o valor crítico assintótico; ao utilizar o valor crítico ajustado, essa taxa de rejeição reduziu para 8,37%, que está bem mais próxima do nível nominal especificado do que a obtida com o uso do valor crítico assintótico (Tabela 4). Considerando um outro cenário: $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 3,42$, $\alpha = 5\%$, $k = 4$ e estimador HC2. A taxa de rejeição que era de 22,08% (Tabela 5) foi reduzida para 9,47% (Tabela 5), que é bem mais próxima do nível nominal (5%). Ainda para esse mesmo exemplo, só que considerando o teste baseado no estimador HC0, a taxa de rejeição foi reduzida de 36,22% (Tabela 2) para 10,71% (Tabela 5), que está muito mais próxima de 5%.

Sob homoscedasticidade, tem-se que os testes baseados nos estimadores HC0 e HC2 considerando valores críticos ajustados conduzem a taxas de rejeição mais próximas dos respectivos níveis nominais do que aqueles baseados em valores críticos assintóticos. Por exemplo, para $n = 40$, $r = 3,33$, $\alpha = 1\%$ e $k = 5$, o teste baseado no estimador HC2 utilizando valores críticos assintóticos rejeita a hipótese nula 3,02% das vezes (Tabela 2), enquanto que, ao considerar os valores críticos ajustados, a rejeição é de apenas 1,44% das vezes (Tabela 5). Considerando o mesmo cenário, mas considerando agora o teste baseado no estimador HC0, tem-se que a taxa de rejeição era de 4,43% (Tabela 2) passou a ser apenas 1,30% (Tabela 5), utilizando os valores críticos ajustados.

No que diz respeito ao teste baseado no estimador HC3, sob heteroscedasticidade, nota-se que, de forma geral, as taxas de rejeição ficaram mais próximas dos níveis nominais quando os valores críticos ajustados são utilizados em substituição aos valores críticos assintóticos. Por exemplo, para $\lambda = 100$, $n = 40$, $r = 3,33$, $k = 5$ $\alpha = 10\%$, o teste baseado no estimador HC3 apresenta taxa de rejeição de 4,00% (Tabela 2) quando os valores críticos assintóticos são utilizados, enquanto que, ao utilizar os valores críticos ajustados, esta taxa passa a ser 12,05% (Tabela 5). Observa-se, portanto, que o teste baseado no estimador HC3 apresentou melhora moderada em relação aos baseados em HC0 e HC2, já que os primeiros produziram taxas de rejeição não muito distantes dos níveis nominais quando foram utilizados valores críticos assintóticos. Considerando o cenário de homoscedasticidade, o desempenho do teste baseado no estimador HC3 é superior quando valores críticos assintóticos são utilizados ao invés de valores críticos estimados.

Em relação ao teste baseado no estimador HC4, pode-se observar que, no cenário em que o tamanho da amostra é pequeno, houve ganho significativo ao utilizar valores críticos ajustados em substituição aos valores críticos assintóticos. Para ilustrar considere o cenário em $\lambda = 100$, $n = 20$, $r = 3,45$, $k = 2$ e $\alpha = 10\%$. O teste baseado no estimador HC4 utilizando valor critico assintótico rejeita a hipótese nula 3,82% (Tabela 1) das vezes, enquanto que, ao utilizar o valor crítico ajustado, essa taxa de rejeição é 9,05% (Tabela 4). Em contrapartida, para tamanhos de amostras grandes o teste baseado no estimador HC4 apresenta melhor desempenho quando valores críticos assintóticos são utilizados.

Conclusões

Neste artigo foram apresentados resultados referentes aos tamanhos dos testes quasi-t baseados em valores críticos assintóticos e em valores críticos ajustados associados a diferentes estimadores consistentes da matriz de covariâncias sob homoscedasticidade e heteroscedasticidade. Os resultados apresentados anteriormente revelam que os testes que se baseiam no estimador HC0 apresentam as maiores discrepâncias de tamanho, principalmente em pequenas amostras quando os valores críticos assintóticos são considerados. Além disso, concluiu-se que o teste baseado no estimador HC2 é um pouco menos liberal quando comparado ao teste baseado no estimador HC0, mas ainda com distorções consideráveis, sobretudo sob condições extremas de alavancagem e heteroscedasticidade. Na maioria dos casos, os testes baseados nos estimadores HC3 e HC4, utilizando valores críticos assintóticos, foram os que proporcionaram as menores distorções de tamanho.

Os testes baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3 e HC4 que utilizam valores críticos ajustados têm desempenhos semelhantes aos que utilizam os valores críticos assintóticos quando o tamanho amostral é grande. Apesar dos testes baseados nos estimadores HC0 e HC2, utilizando valores críticos ajustados, serem muitas vezes conservadores, os mesmos proporcionam taxas de rejeição mais próximas dos respectivos níveis nominais do que aqueles baseados em valores críticos assintóticos. Os ganhos mais expressivos são obtidos para os testes baseados nos estimadores HC0 e HC2, sendo ainda mais apreciáveis em pequenas amostras. Foi visto, ainda, que o teste baseado no estimador HC3 apresenta desempenho superior àqueles baseados

Tabela 4 - Porcentagens de rejeição de testes quasi-t baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3, HC4 obtidas utilizando valores críticos ajustados, $r = 3,45$; $k = 2$ e $r = 3,21$; $k = 3$, respectivamente

λ	teste	α	$r = 3,45$; $k = 2$						$r = 3,21$; $k = 3$					
			n						n					
			20	40	60	100	200	500	20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	6,85	10,58	11,30	11,09	10,65	10,43	5,55	9,72	10,15	10,79	10,83	10,28
		5	3,21	5,18	5,62	5,66	5,35	5,22	2,39	4,65	4,77	5,52	5,30	4,96
		1	0,65	1,02	1,11	1,16	1,03	1,08	0,28	0,79	0,86	1,05	0,99	0,96
	HC2	10	8,95	9,91	10,14	11,10	9,93	10,02	6,63	9,12	9,00	9,78	10,17	9,97
		5	4,19	4,84	5,01	5,11	4,87	5,07	2,76	4,20	4,20	5,00	4,99	4,74
		1	0,82	0,95	0,97	1,00	0,94	1,00	0,37	0,71	0,67	0,93	0,90	0,95
	HC3	10	11,94	9,44	9,38	9,28	9,40	9,81	8,18	8,48	8,18	9,13	9,69	9,73
		5	5,85	4,63	4,53	4,55	4,52	4,91	3,61	3,93	3,71	4,57	4,70	4,60
		1	1,19	0,88	0,84	0,88	0,83	0,95	0,45	0,61	0,57	0,78	0,88	0,89
	HC4	10	16,91	11,66	10,77	10,09	9,95	9,90	8,39	8,73	8,35	9,07	9,63	9,83
		5	9,42	5,90	5,24	4,92	4,79	4,95	4,38	4,16	3,85	4,67	4,58	4,63
		1	2,25	1,12	0,96	0,92	0,83	0,96	0,70	0,64	0,50	0,74	0,80	0,85
100	HC0	10	4,27	9,49	10,70	10,86	10,50	10,37	8,37	12,88	13,40	13,05	12,21	10,70
		5	1,53	4,08	4,87	5,18	5,15	5,08	3,58	6,49	6,70	6,88	6,50	5,60
		1	0,15	0,49	0,69	0,84	0,93	0,99	0,51	1,04	1,13	1,47	1,28	1,27
	HC2	10	5,35	8,46	9,30	9,66	9,69	9,91	8,94	11,76	12,07	11,80	11,50	10,47
		5	1,86	3,52	4,16	4,49	4,64	4,91	3,85	5,70	5,89	6,13	6,12	5,37
		1	0,20	0,43	0,56	0,67	0,85	0,91	0,55	0,91	0,92	1,33	1,17	1,25
	HC3	10	7,21	7,70	8,32	8,74	9,11	9,69	10,01	10,83	11,04	10,91	11,12	10,20
		5	2,67	3,13	3,61	3,89	4,29	4,74	4,52	5,08	5,04	5,60	5,71	5,16
		1	0,28	0,35	0,45	0,56	0,72	0,86	0,55	0,91	0,92	1,33	1,17	1,25
	HC4	10	9,05	8,69	8,97	9,16	9,44	9,71	10,56	11,34	11,50	11,17	11,61	10,33
		5	3,94	3,58	3,86	4,01	4,43	4,37	5,47	5,56	5,50	5,78	5,74	5,24
		1	0,58	0,37	0,42	0,53	0,69	0,85	1,15	0,80	0,75	1,02	1,08	1,20

Tabela 5 - Porcentagens de rejeição de testes quasi-t baseados nos estimadores HC0, HC2, HC3, HC4 obtidas utilizando valores críticos ajustados, $r = 3,42$; $k = 4$ e $r = 3,33$; $k = 5$, respectivamente

λ	teste	α	$r = 3,42$; $k = 4$						$r = 3,33$; $k = 5$					
			n						n					
			20	40	60	100	200	500	20	40	60	100	200	500
1	HC0	10	5,54	7,87	9,43	9,41	10,01	9,67	8,27	9,00	11,09	11,72	11,40	10,69
		5	2,48	3,45	4,66	4,38	4,82	4,56	4,27	4,83	5,78	6,29	6,16	5,75
		1	0,34	0,64	0,79	0,89	0,95	1,14	1,18	1,30	1,29	1,10	1,18	1,03
	HC2	10	7,06	8,20	9,15	8,67	9,61	9,63	10,29	10,58	10,86	11,21	10,83	10,26
		5	3,28	3,63	4,46	4,19	4,53	4,52	5,53	5,32	5,67	6,07	5,85	5,69
		1	0,46	0,68	0,76	0,88	0,92	1,11	1,44	1,37	1,25	1,00	1,15	0,9
	HC3	10	8,35	8,35	8,79	8,11	9,17	9,57	12,20	10,76	10,51	10,81	10,51	10,14
		5	4,00	3,71	4,19	3,94	4,35	4,53	6,94	5,68	5,51	5,70	5,57	5,60
		1	0,64	0,66	0,69	0,77	0,90	1,07	1,77	1,39	1,20	0,96	1,09	0,95
	HC4	10	1,47	5,69	7,60	7,86	9,30	9,76	3,40	7,66	8,75	10,08	10,26	10,11
		5	2,99	3,67	4,17	3,97	4,50	4,64	1,69	5,31	5,38	5,42	5,33	5,42
		1	0,65	0,60	0,68	0,75	0,88	1,04	1,28	1,30	1,05	0,81	1,02	0,96
100	HC0	10	18,75	15,35	14,42	12,78	11,67	9,82	10,78	10,59	12,43	12,66	11,98	10,72
		5	10,71	8,58	8,42	6,90	6,30	4,99	5,77	6,41	6,79	6,96	6,25	5,75
		1	2,46	2,51	2,34	1,74	1,37	1,21	0,22	0,46	0,57	0,91	0,85	0,99
	HC2	10	18,15	13,89	12,85	11,33	10,70	9,62	12,31	12,12	11,91	11,93	11,29	10,4
		5	9,47	7,59	7,34	6,11	5,65	4,89	7,14	6,73	6,61	6,68	5,99	5,61
		1	1,95	2,21	1,90	1,47	1,23	1,14	0,24	0,40	0,52	0,80	0,83	0,98
	HC3	10	14,30	12,29	11,02	9,98	9,83	9,35	14,28	12,05	11,43	11,35	10,94	10,26
		5	7,01	6,47	6,06	5,30	5,15	4,86	8,29	6,92	6,22	6,27	5,71	5,50
		1	1,42	1,85	1,60	1,13	1,03	1,11	0,20	0,37	0,43	0,69	0,79	0,93
	HC4	10	3,40	6,90	7,77	8,18	9,04	9,22	4,21	8,57	9,44	10,61	10,64	10,25
		5	1,75	4,91	4,63	4,15	4,66	4,77	2,19	6,20	5,97	5,91	5,63	5,36
		1	0,75	1,39	1,03	0,873	0,82	1,02	0,13	0,19	0,28	0,49	0,65	0,86

em HC0 e HC2, já que os primeiros apresentaram taxas de rejeição não muito distantes dos níveis nominais quando foram utilizados valores críticos assintóticos. Na maioria dos casos, a correção do valor crítico pareceu não ter sido muito útil quando o teste baseado no estimador HC4 foi utilizado, exceto quando o tamanho da amostra é pequeno.

Por fim, recomendamos o uso de valores críticos ajustados quando da realização de testes de hipótese baseados nos estimadores HC0, HC2 e, até mesmo, HC3. Para testes baseados no estimador HC4 recomendamos a utilização dos valores críticos ajustados apenas para tamanhos pequenos de amostras.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da CAPES, CNPq e FAPESB.

BRAGA JUNIOR, A. C. R.; CRIBARI NETO, F.; SOUZA, T. C. de. Adjusted critical values for inference under heteroskedasticity of unknown form. *Rev. Bras. Biom.,* São Paulo, v.28, n.2, p.75-90, 2010.

▪ *ABSTRACT: It is common practice to perform inference in linear regression models using the ordinary least squares estimator of the regression parameter vector coupled with an estimator of its covariance matrix which is consistent both under homoskedasticity and heteroskedasticity of unknown form. The most commonly used covariance matrix estimator is known as HC0 and was proposed by Halbert White (White, 1980). Several numerical studies have shown, however, that HC0-based inference is too optmistic, in the sense that associated quasi-t tests are typically oversized (liberal). The chief goal of our paper is to obtain, through numerical methods, new critical values for tests on the parameters of linear regression models under heteroskedasticity of unknown form. The new critical values deliver tests that are more accurate in finite samples, especially when the data contain leverage points.*

▪ *KEYWORDS: Heteroskedastic models; linear regression; quasi-t test.*

Referências

CRIBARI–NETO, F. Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form. *Comp. Stat. Data Anal.*, Amsterdam, v.45, p.215–233, 2004.

DAVIDSON, R.; MACKINNON, J.G. *Estimation and inference in econometrics*. New York: Oxford University Press, 1993. 879p.

DOORNIK, J. A. *Ox*: an Object-oriented Matrix Programming Language. 4th ed. London: Timberlake Consultants and Oxford, 2006. Disponível em: <http://www.doornik.com>. 453p.

FOX, J. *A*n R and S-PLUS companion to applied regression. London: Sage, 2002. 318p.

HORN, S. D.; HORN, R. A.; DUCAN, D. B. Estimating heteroskedastic variances in linear models. *J. Am. Stat. Assoc.*, Washington, v.70, p.380-385, 1975.

LONG, J. S.; ERVIN, L. H. Using heteroskedasticity-consistent standard errors in the linear regression model. *Am. Stat.*, Amsterdam, v.54, p.217–224, 2000.

MACKINNON, J. G.; WHITE, H. Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite-sample properties. *J. Econ.*, Amsterdam, v.29, p.305–325, 1985.

WHITE, H. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, Chicago, v.48, p.817–838, 1980.

Received in 15.03.2010.

Approved after revised in 16.06.2010.