

VERIFICAÇÃO DA VALIDADE SOBRE A HIPÓTESE DE PEQUENOS DESLOCAMENTOS EM VIGAS DE MADEIRA DO GÊNERO EUCALYPTUS

André Luis CHRISTOFORO¹
Anderson Renato Vobornik WOLENSKI²
Túlio Hallak PANZERA¹
Paulo César Monteiro LAMIM FILHO¹
Fabiano Bianchini BATISTA¹

- RESUMO: Vigas de madeira são elementos estruturais comumente empregados na construção civil. O dimensionamento destes além de outros elementos estruturais requer a verificação do estado limite último e do estado limite de utilização. Em condições gerais, o projeto de vigas é desenvolvido partindo-se da premissa que a estrutura esteja restrita a pequenos deslocamentos e que o material seja solicitado dentro do regime elástico linear. A hipótese de pequenos deslocamentos implica em uma simplificação e, mais especificamente, em uma linearização da equação diferencial da elástica, cuja natureza é não-linear. Esta hipótese permite determinar a função dos deslocamentos em vigas por intermédio de procedimentos analíticos do cálculo diferencial e integral. Em se tratando da verificação do estado limite de utilização, a norma Brasileira NBR 7190-1997 prediz que o maior valor do deslocamento entre os apoios de uma viga não deva ultrapassar a razão $L/200$, sendo L o comprimento do vão definido entre os apoios, expresso em centímetros. Este trabalho tem como objetivo, verificar a validade da hipótese de pequenos deslocamentos em vigas de madeira do gênero *Eucalyptus*. Esta análise é efetuada segundo os fundamentos do Método das Diferenças Finitas e do Método de Newton Raphson.
- PALAVRAS-CHAVE: Vigas de madeira; método das diferenças finitas; método de Newton-Raphson.

1 Introdução

Vigas são elementos presentes na maioria dos sistemas estruturais. O projeto de vigas requer a verificação do estado limite último e do estado de utilização.

Como premissa de projeto, a viga, assim como outros elementos estruturais deve estar restrita a pequenos deslocamentos (hipótese de cálculo) e os materiais empregados na sua confecção devem comportar-se em regime elástico-linear.

¹ Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ, Campus Santo Antônio, Departamento de Engenharia Mecânica, CEP: 36307-352, São João Del-Rei, MG, Brasil. E-mail: achristo@ufsj.edu.br / panzera@ufsj.edu.br / lamim@ufsj.edu.br / fabianchini@civil.cefetmg.br

² Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, CEP: 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. E-mail: anderson@dees.ufmg.br

Partindo-se de um modelo diferencial, os deslocamentos em pontos de interesse na viga podem ser obtidos mediante a resolução de uma equação diferencial ordinária. Esta equação é não-linear por natureza, porém, pela hipótese de pequenos deslocamentos, a mesma é transformada em uma equação linear, permitindo a sua resolução via métodos analíticos do cálculo integral e diferencial.

Em se tratando do projeto de vigas de madeira, a norma Brasileira NBR 7190/1997 define que o maior valor de deslocamento entre dois apoios não deva ultrapassar a razão $L/200$, sendo L o comprimento do vão entre os apoios, expresso em centímetros. Obedecida esta relação, a equação diferencial originalmente não linear pode ser tratada como linear, tendo-se garantia da validade do emprego das equações de equilíbrio utilizadas na condição indesejada. Este trabalho tem como objetivo verificar a validade da hipótese de pequenos deslocamentos em projetos envolvendo vigas de madeira. Este estudo é desenvolvido segundo a aplicação do Método das Diferenças Finitas e do Método de Newton-Raphson na resolução de um problema de viga com solução analítica conhecida, permitindo-se desta forma verificar as diferenças entre os valores dos deslocamentos obtidos por ambas as equações diferenciais, linear e não-linear.

2 Equação diferencial da elástica

A Figura 1 ilustra geometricamente a forma deslocada de uma viga de comprimento L carregada com uma força uniformemente distribuída q , enfatizando as funções deslocamento transversal $v(x)$ e rotação $\theta(x)$, sendo a rotação expressa pela derivada

primeira da função deslocamento $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$.

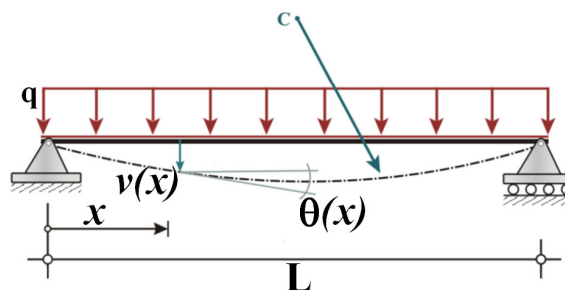


Figura 1 - Forma deslocada da viga.

A equação diferencial do modelo de vigas de Bernoulli é desenvolvida segundo o conceito de curvatura de funções, assim como expressa a Equação 1,

$$\frac{I}{r} = \frac{\frac{d^2v(x)}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}}, \quad (1)$$

sendo r o raio de curvatura e I/r a curvatura da função $v(x)$.

Partindo-se da hipótese de pequenos deslocamentos, o que implica em pequenas rotações, a equação 1 pode ser reescrita assim como expressa a Equação 2.

$$\frac{I}{r} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2}. \quad (2)$$

Para elementos de barra, como é o caso de estruturas do tipo viga, a lei de Hooke fica expressa pela Equação 3,

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3)$$

em que:

E – módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young);

ε – deformação longitudinal ou específica, também expressa por $\varepsilon = \frac{y}{r}$, sendo y a distância entre a fibra longitudinal escolhida ao longo da seção transversal da peça em relação à linha neutra (lugar geométrico cuja tensão normal é nula);

σ – tensão normal, descrita por $\sigma = \frac{m(x)}{I_z} \cdot y$, sendo $m(x)$ o esforço momento fletor e I_z o momento de inércia à flexão.

Com as devidas manipulações algébricas, as Equações 1 e 2 são adequadas ao problema de vigas, transformadas respectivamente nas Equações 4 e 5, sendo $m(x)$ expressa pela Equação 6.

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{m(x)}{E \cdot I_z}, \quad (4)$$

$$\frac{\frac{d^2 v(x)}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2\right)^3}} = -\frac{m(x)}{E \cdot I_z}, \quad (5)$$

$$m(x) = \frac{q}{2} \cdot (-x^2 + L \cdot x). \quad (6)$$

As Equações 4 e 5 são as equações diferenciais que permitem determinar os deslocamentos para uma dada viga. A Equação 4 é a simplificada pela hipótese de pequenos deslocamentos enquanto que a Equação 5 é a não-linear, devendo ser resolvida por métodos aproximados. O sinal negativo que aparece nestas equações faz-se necessário para compatibilizar os sinais da derivada segunda da função deslocamentos com o da função momento fletor. Maiores informações sobre deflexão de vigas podem ser encontrados em textos especializados na área de mecânica dos materiais, tais como nas obras de CRANDALL *et al.* (1978), POPOV (1978), HIGDON *et al.* (1981), BEER e JOHNSTON JR. (1995), GERE (2003), HIBBELER (2010) entre outros.

3 Problema modelo

O problema modelo aqui utilizado para verificação da validade da hipótese de pequenos deslocamentos constitui-se de uma viga bi-apoiada de comprimento L sujeita a um carregamento q uniformemente distribuído, assim como ilustra a Figura 2.

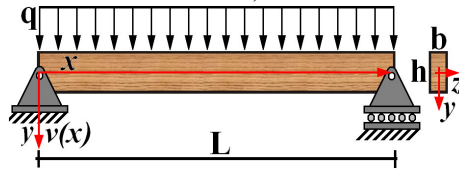


Figura 2 - Problema modelo.

Pela imposição da hipótese simplificadora de cálculo, a função deslocamento é obtida mediante duas integrações sucessivas da Equação 4 juntamente com duas condições de contorno essenciais, sendo definidas sobre os vínculos da mesma, implicando em nulidade dos deslocamentos transversais nestes pontos. Tomando-se a origem do sistema de coordenadas sobre o apoio fixo da Figura 2, as condições de contorno ficam escritas matematicamente por $v(x=0)=0$ e $v(x=L)=0$. A função de deslocamentos é expressa pela Equação 7.

$$v(x) = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I_z} \cdot (x^4 - 2 \cdot L \cdot x^3 + L^3 \cdot x). \quad (7)$$

Adotando-se o valor do módulo de elasticidade da madeira *Eucalyptus grandis* $E=1.281 \text{ kN/cm}^2$ (ver NBR 7190-1997), com dimensões da seção transversal $b=5 \text{ cm}$ e $h=9 \text{ cm}$, de momento de inércia igual a $I_z = 303,75 \text{ cm}^4$ e comprimento $L = 200 \text{ cm}$, foram testados valores para a força uniformemente distribuída responsável por provocar um deslocamento de 1 cm no ponto médio da viga (Equação 7), sendo este igual a $q=19 \text{ N/cm}$, respeitando a relação $L/200$ (medida de pequenos deslocamentos definida pela norma NBR 7190-1997). Vale ressaltar que o comprimento da peça adotado é maior que vinte e uma vezes o valor da altura da seção transversal, respeitando a relação encontrada no trabalho de LAHR (1983), validando-se o emprego das Equações 4 e 5 (Teoria de Vigas de Bernoulli), medida esta a partir da qual os efeitos das forças cisalhantes podem ser desprezados no cálculo dos deslocamentos.

A Figura 3 apresenta a forma deslocada para a viga do problema modelo segundo a Equação 7.

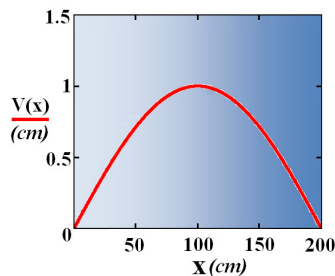


Figura 3 - Forma deslocada para a viga do problema modelo.

4 Método das diferenças finitas (MDF)

Segundo BENETTI e CHRISTOFORO (2009), o Método das Diferenças Finitas (MDF) permite a resolução de quaisquer equações diferenciais. Basicamente, o operador de diferenças finitas, diferentemente da derivada, não leva ao limite a razão incremental, mostrando-se como uma aproximação para a derivada.

O Método das Diferenças Finitas consiste em subdividir o domínio de interesse em um conjunto de subdomínios igualmente espaçados, malha de diferenças finitas, cuja solução fica atrelada à disposição da malha e mais especificamente, dos nós que a compõem.

Da definição dos operadores de diferenças finitas percebe-se que quanto maior for o número de nós utilizados na discretização do problema mais precisos são os resultados obtidos. Vale ressaltar que a solução de um problema por este método requer a resolução de sistemas de equações. Dessa forma, quanto maior o número de pontos contidos na malha, maior será a ordem do sistema a ser resolvido. Assim, além da disposição da malha e quantidade de nós utilizados, os resultados aproximados do método são afetados também pela estratégia de resolução do sistema de equações.

Os operadores de diferenças finitas são usualmente obtidos através de manipulações da série de Taylor, cuja aproximação de interesse para a derivada fica atrelada ao truncamento da mesma, dando origem aos erros de aproximação.

De forma alternativa, os operadores de diferenças finitas são aqui desenvolvidos partindo-se do conceito de interpolação polinomial, sendo utilizada a metodologia para obtenção dos operadores de diferenças centrais.

Como a equação diferencial da elástica completa requer o conhecimento da derivada primeira e segunda da função deslocamentos ($v(x)$), torna-se necessário o desenvolvimento de operadores de diferenças finitas que aproximem a derivada primeira e segunda. Dessa forma, adotou-se um polinômio interpolante de grau dois, expresso pela Equação 8.

$$v(x) \cong v(\bar{x}) = a_0 + a_1 \cdot \bar{x} + a_2 \cdot \bar{x}^2. \quad (8)$$

A Figura 4 ilustra geometricamente a interpolação da função $v(x)$ pela função $v(\bar{x})$ em pontos do domínio igualmente espaçados.

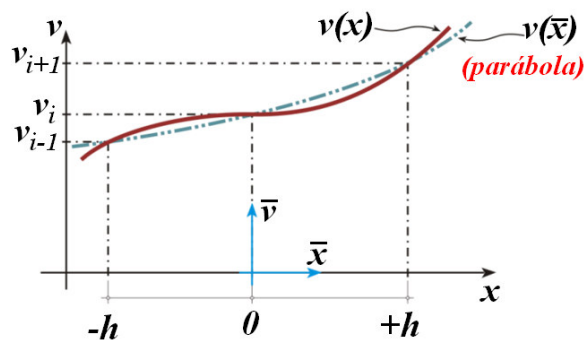


Figura 4 - Interpolação quadrática.

Extraindo as três condições de contorno implícitas na Figura 4 e construindo e resolvendo o sistema linear de três equações a três incógnitas chega-se à função interpolativa, expressa pela Equação 9.

$$v(x) \cong v(\bar{x}) = v_i + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2 \cdot h} \cdot \bar{x} + \frac{v_{i+1} - 2 \cdot v_i + v_{i-1}}{2 \cdot h^2} \cdot \bar{x}^2. \quad (9)$$

Logo, derivando a Equação 9 e igualando $\bar{x} = 0$, tem-se o operador de diferenças finitas que aproxima a derivada primeira de f , dada pela Equação 10.

$$v'(\bar{x}) = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2 \cdot h}. \quad (10)$$

Igualmente, derivando-se duas vezes a Equação 9 e igualando $\bar{x} = 0$, obtém-se o operador de diferenças finitas que aproxima a derivada segunda de f , assim como expressa a Equação 11.

$$v''(\bar{x}) = \frac{v_{i+1} - 2 \cdot v_i + v_{i-1}}{h^2}. \quad (11)$$

Vale ressaltar que o operador de derivada primeira requer o conhecimento da função em dois pontos distintos, enquanto que o da derivada segunda requer o conhecimento de três. Ambos os operadores apresentam o mesmo grau de precisão, em decorrência do grau de aproximação do polinômio interpolador expresso na Equação 8, cujo resto ou erro é da ordem do espaçamento (h) ao quadrado (Oh^2).

Definidos os operadores de diferenças finitas de interesse, pode-se agora obter a expressão geral que transforma o domínio inicialmente contínuo em discreto, dando origem à montagem e resolução dos sistemas de equações, cuja solução fornece a aproximação para os deslocamentos em pontos de interesse.

Com relação ao emprego do Método das Diferenças Finitas na análise de estruturas, alguns trabalhos podem ser citados como os de VERMA e DEY (1991), FIELDING *et al.* (1997), GRAÇA (2000), MANSUR *et al.* (2000), MITTELBACH (2002), KOCATÜRK e ALTITAS (2003) entre outros.

5 Método de Newton-Raphson (MNR)

O Método de Newton-Raphson é aqui empregado na resolução de sistemas de equações não-lineares, como é o caso da resolução por diferenças finitas da Equação 5. A metodologia, ver RODRIGUES *et al.* (2008), consiste em reescrever as equações do sistema na forma de funções vetoriais f , sendo $f_i : R^n \rightarrow R$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, dando origem ao vetor $F(X)$, sendo $F : R^n \rightarrow R^n$, cujas raízes ($F(X)=0$) são soluções do sistema. Assim como no Método de Newton-Raphson aplicado na determinação das raízes de funções reais de uma variável, em que as aproximações são feitas utilizando-se o conceito de reta tangente a um ponto, para funções $F : R^n \rightarrow R^n$, as aproximações são realizadas com base em hiperplanos tangentes. É importante lembrar que este pertence à classe dos métodos iterativos, necessitando de uma estimativa inicial ($X^{(0)}$), de uma

equação de recorrência e de um critério de parada. A equação de recorrência do MNR para a resolução de sistemas de equações é expressa por:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (12)$$

em que:

$\mathbf{X}^{(k)}$ - vetor estimativa do passo atual;

$\mathbf{X}^{(k+1)}$ - vetor estimativa para o passo posterior;

$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$ - matriz Jacobiana (contém as derivadas primeiras de \mathbf{F});

$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$ - vetor cujas componentes são imagens das funções f_i .

6 Resolução aproximada do problema modelo

A resolução aproximada da Equação 5 pelo Método das Diferenças Finitas requer a definição da malha de diferenças finitas, a montagem do sistema de equações, sendo este não-linear, e uma estratégia numérica para a sua solução. Para tanto, aqui são utilizadas duas malhas distintas, uma contendo cinco e a outra contendo nove nós denominadas, respectivamente, por malhas *A* e *B*.

Como discutido anteriormente, o sistema não-linear de equações é aqui resolvido com o auxílio do MNR, sendo implementado no aplicativo *Mathcad 2000*[®]. Como é sabido do MDF, a ordem do sistema de equações depende diretamente do número de nós da malha juntamente com o número condições de contorno do problema. Conhecendo-se os valores dos deslocamentos nodais sobre os vínculos (deslocamentos transversais nulos nos apoios), a ordem dos sistemas de equações para as malhas *A* e *B* são 3×3 e 7×7 respectivamente. Como o MNR necessita de uma estimativa inicial, e mais especificamente, de um vetor estimativa inicial, as suas componentes são definidas como sendo o valor da função $v(x)$ (Equação 7) avaliada com x coincidindo com a localização dos nós das malhas *A* e *B*.

Substituindo os operadores das Equações 10 e 11 na Equação 5 chega-se à equação discreta do MDF para o problema modelo, assim como expressa a Equação 13.

$$v_{i-1} - 2 \cdot v_i + v_{i+1} = - \frac{q}{16 \cdot E \cdot I_z \cdot h^3} \cdot \sqrt{(4 \cdot h^2 + (v_{i+1} - v_{i-1})^2)^3} \cdot (x^2 - L \cdot x). \quad (13)$$

A Equação 13 é utilizada para a montagem do sistema de equações. Para ambas as malhas, a tolerância (ε) adotada para a resolução do problema é igual a $1 \cdot 10^{-1}$.

Os erros encontrados nas aproximações são calculados utilizando a Equação 14, confrontando-se os resultados do modelo simplificado com os do modelo completo, sendo v_s o deslocamento encontrado com o uso da equação 7 e v_c o deslocamento encontrado pelo MDF.

$$Erro (\%) = 100 \cdot \frac{|v_s - v_c|}{|v_c|}, \quad |v_c| \neq 0. \quad (14)$$

6.1 Malha A

A Figura 5 ilustra a malha A.

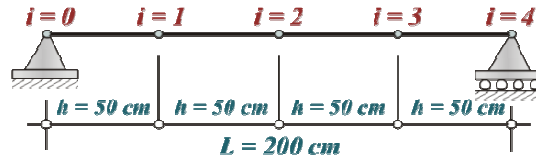


Figura 5 - Malha A.

O vetor Estimativa inicial para este problema é apresentado na Equação 15, tomando-se $h=L/4$ (cm).

$$\mathbf{X}^{(0)T} = \{v(x=L/4) \quad v(x=L/2) \quad v(x=3L/4)\} \text{ cm.} \quad (15)$$

O sistema de equações não-lineares resultantes para esta malha é apresentado pela Equação 16.

$$\begin{cases} \frac{q}{v_0} - 2 \cdot v_1 + v_2 = -\frac{3 \cdot q}{32 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot (v_2 - v_0)^2)^3} \\ v_1 - 2 \cdot v_2 + v_3 = -\frac{q}{8 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot (v_3 - v_1)^2)^3} \\ v_2 - 2 \cdot v_3 + \frac{v_4}{0} = -\frac{3 \cdot q}{32 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot (v_4 - v_2)^2)^3} \end{cases} \quad (16)$$

Aplicando-se as condições de contorno essenciais $v_0=0$ cm e $v_4=0$ cm na Equação 16 chega-se ao sistema de equações não-lineares composto por três equações e três incógnitas, sendo estas v_1 , v_2 e v_3 .

A matriz Jacobiana é apresentada na Equação 17,

$$\mathbf{J}(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 2 & j_{12} & 0 \\ j_{21} & 2 & j_{23} \\ 0 & j_{32} & 2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

em que:

$$j_{12} = \frac{3 \cdot q \cdot v_2 \cdot (L^2 + 4 \cdot v_2^2)^2}{8 \cdot L \cdot E \cdot I_z \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot v_2^2)^3}} - 1 ; \quad j_{21} = \frac{3 \cdot q \cdot (L^2 + 4 \cdot (v_1 - v_3)^2)^2 \cdot (v_1 - v_3)}{2 \cdot L \cdot E \cdot I_z \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot (v_1 - v_3)^2)^3}} - 1 ;$$

$$j_{23} = \frac{-3 \cdot q \cdot (L^2 + 4 \cdot (v_1 - v_3)^2)^2 \cdot (v_1 - v_3)}{2 \cdot L \cdot E \cdot I_z \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot (v_1 - v_3)^2)^3}} - 1 ; \quad j_{32} = j_{12}$$

A função vetorial a ser resolvida com o MNR é expressa pela Equação 18.

$$F(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3 \cdot q}{32 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot v_2^2)^3} + 2 \cdot v_1 - v_2 \\ \frac{q}{8 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot (v_3 - v_1)^2)^3} - v_1 + 2 \cdot v_2 - v_3 \\ \frac{3 \cdot q}{32 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 4 \cdot v_2^2)^3} - v_2 + 2 \cdot v_3 \end{array} \right\}. \quad (18)$$

A Tabela 1 apresenta os valores dos deslocamentos nodais encontrados segundo o MDF juntamente com os deslocamentos determinados por $v(x)$ e os erros da aproximação.

Tabela 1 - Erros cometidos na aproximação para a malha A

	nó 1	nó 2	nó 3
Deslocamento - modelo simplificado (cm)	0,73	1,02	0,73
Deslocamento - modelo completo (cm)	0,75	1,04	0,75
Erro (%)	2,67	1,92	2,67

A Figura 6 ilustra os deslocamentos obtidos para o modelo simplificado juntamente com os valores numéricos da malha A (modelo completo).

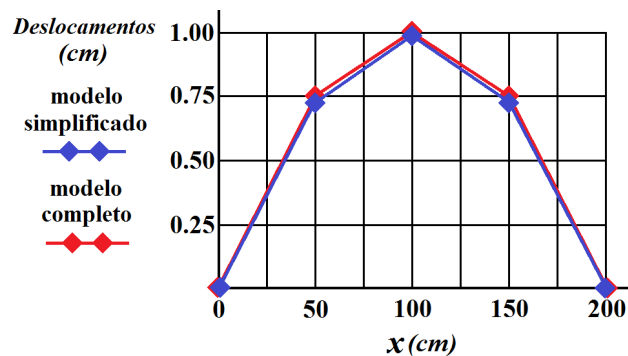


Figura 6 - Aproximações para os deslocamentos: modelo simplificado e malha A.

Foram necessárias onze iterações para a determinação dos deslocamentos definidos para esta malha segundo a exigência requerida pela tolerância estipulada.

6.2 Malha B

A Figura 7 ilustra a malha B.

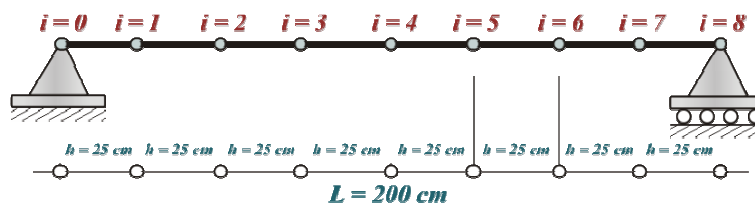


Figura 7 - Malha B.

O vetor Estimativa inicial para este problema é apresentado na Equação 17, tomando $h=L/8$ (cm).

$$\mathbf{x}^{(0)T} = \{v(x=L/8) \ v(x=L/4) \ v(x=3L/8) \ v(x=L/2) \ v(x=5L/8) \ v(x=3L/4) \ v(x=7L/8)\} \quad (19)$$

O sistema de equações não-lineares resultantes para esta malha é apresentado pela Equação 20.

$$\begin{cases} \frac{q}{v_0} - 2 \cdot v_1 + v_2 = -\frac{7 \cdot q}{128 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_2 - v_0)^2)^3} \\ v_1 - 2 \cdot v_2 + v_3 = -\frac{3 \cdot q}{32 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_3 - v_1)^2)^3} \\ v_2 - 2 \cdot v_3 + v_4 = -\frac{15 \cdot q}{128 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_4 - v_2)^2)^3} \\ v_3 - 2 \cdot v_4 + v_5 = -\frac{q}{8 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_5 - v_3)^2)^3} \\ v_4 - 2 \cdot v_5 + v_6 = -\frac{15 \cdot q}{128 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_6 - v_4)^2)^3} \\ v_5 - 2 \cdot v_6 + v_7 = -\frac{3 \cdot q}{32 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_7 - v_5)^2)^3} \\ v_6 - 2 \cdot v_7 + \frac{v_8}{\theta} = -\frac{7 \cdot q}{128 \cdot L \cdot E \cdot I_z} \cdot \sqrt{(L^2 + 16 \cdot (v_8 - v_6)^2)^3} \end{cases} \quad (20)$$

A Tabela 2 apresenta os valores dos deslocamentos nodais encontrados segundo o MDF juntamente com os deslocamentos determinados por $v(x)$ e os erros da aproximação.

Tabela 2 - Erros cometidos na aproximação para a malha *B*

	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6	nó 7
Deslocamento-modelo simplificado (cm)	0,40	0,73	0,94	1,02	0,94	0,73	0,40
Deslocamento-modelo completo (cm)	0,40	0,73	0,94	1,02	0,94	0,73	0,40
Erro (%)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

A Figura 8 ilustra os deslocamentos obtidos para o modelo simplificado juntamente com os valores numéricos da malha *B* (modelo completo).

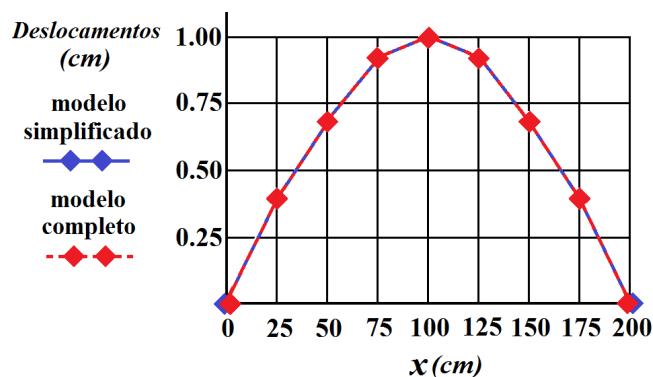


Figura 8 - Aproximações para os deslocamentos: modelo simplificado e malha *B*.

Foram necessárias cinco iterações para a determinação dos deslocamentos definidos para esta malha segundo a exigência requerida pela tolerância estipulada. Os resultados encontrados na Tabela 2 indicam precisão de duas casas decimais, sendo requerida para tanto, apenas uma casa decimal, implicando na melhoria significativa dos resultados pelo emprego de uma malha com menor espaçamento entre nós.

Conclusões

A estratégia para o cálculo dos deslocamentos, abordagem numérica, partindo-se de uma boa estimativa inicial como no caso, dos valores conhecidos da função de deslocamentos obtida segundo a equação diferencial não completa, mostrou-se de fundamental importância, visto a solução aproximada estar fortemente atrelada à escolha da estimativa inicial.

Pela tolerância estipulada, em função do número de iterações e erros encontrados para a solução numérica de ambas as malhas, lembrando ser as estimativas iniciais obtidas da solução da equação diferencial incompleta da curvatura, a malha *B* apresentou ser mais eficiente do que a malha *A*. Este resultado justifica-se pela própria essência do método das diferenças finitas, objetivando-se melhores resultados com o emprego de malhas cada vez mais refinadas.

Em virtude dos pequenos erros encontrados entre os deslocamentos obtidos pelo do MDF aplicado sobre a equação diferencial completa (não-linear) do modelo de vigas com os resultados dos deslocamentos obtidos segundo a resolução analítica da equação diferencial da elástica (simplificada), constata-se aqui a validade da hipótese de pequenos deslocamentos definida pela norma Brasileira NBR 7190-1997 para o caso de vigas bi-apoiadas sujeitas a ação de carregamentos uniformemente distribuídos.

Cabe ressaltar que a determinação dos deslocamentos neste trabalho foi puramente teórica e, dessa forma, pelos resultados encontrados entre ambos os modelos, para condições de projeto cuja intensidade da força assim como da espécie de madeira utilizada confira deslocamentos da ordem de $L/200$ entre apoios, fica garantida, assim como esperado, a validade da hipótese de pequenos deslocamentos. Verificado o estado limite último, esta relação além de implicar em proximidade entre a estrutura indeformada e sua deformada, garante comportamento linear entre forças e deslocamentos (linearidade geométrica) e proporcionalidade entre tensão e deformação (linearidade física), sendo estas premissas de cálculo.

Assim como esperado, o método das diferenças finitas apresentou-se como estratégia numérica eficiente na resolução do problema modelo. Mesmo tendo o seu maior emprego na resolução de equações diferenciais parciais, ainda sim, para equações diferenciais ordinárias, o seu uso justifica-se mediante a grande gama de problemas modelados com soluções analíticas desconhecidas, como é o caso da resolução da equação diferencial da curvatura associada ao cálculo dos deslocamentos em vigas.

Este estudo permitiu verificar a validade da hipótese de pequenos deslocamentos em estruturas de madeira, revelando um resultado esperado pelas premissas de cálculo envolvidas, entretanto, não sendo foco de estudos específicos de pesquisas por ser resultado fundamental utilizado desde sempre no desenvolvimento de várias outras.

CHRISTOFORO, A. L.; WOLENSKI, A. R. V.; PANZERA, T. H.; LAMIM FILHO, P. C. M.; BATISTA, F. B. Checking the validity of the hypothesis of small displacements in the wooden beams of the genus *Eucalyptus*. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.1, p.60-73, 2011.

- **ABSTRACT:** *Wooden beams are structural elements commonly used in construction. The design of these and other structural elements requires the verification of ultimate limit state and limit state use. In general terms, the design of beams is developed starting from the premise that the structures are restricted to small displacements and the material is required within the linear elastic regime. The hypothesis of small displacements implies a simplification and, more specifically, in a linearization of the equation, nature of which is non-linear. This assumption allows to determine the function of displacement in beam through analytical procedures of differential and integral calculus. When it comes to checking the limit state use, the Brazilian standard NBR 7190-1997 predicts that the greatest value of the offset between the supports of a beam should not exceed the ratio $L/200$, where L is the length of the aperture defined between the supports, expressed in centimeters. This work aims to verify the validity of the hypothesis of small displacements in wooden beams of *Eucalyptus* genus. This analysis is performed with the aid of the Finite Differences Method allied to the Newton-Raphson Method.*
- **KEYWORDS:** *Wooden beams; finite differences method; Newton-Raphson method.*

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. *NBR-7190*: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997. 107p.
- BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. *Resistência dos materiais*. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 1995. 1255p.
- BENETTI, D.; CHRISTOFORO A. L. Aplicação do método das diferenças finitas na resolução de equações diferenciais parciais elípticas referente à determinação das temperaturas em pontos interiores de uma chapa. In: CNMAC – CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 32., 2009, Cuiabá. *Anais...* Cuiabá: SBMAC, 2009. v.2, p.664-665.
- CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C.; LARDNER, T. J. *An introduction to the mechanics of solids*. 2.ed. New York: McGraw-Hill, 1978. 628p.
- FIELDING, L. M.; VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. Energetic finite difference with arbitrary meshes to plate-bending problems. *Appl. Math. Model.*, New York, v.21, n.11, p.691-698, 1997.
- GERE, J. M. *Mecânica dos materiais*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 698p.
- GRAÇA, M. S. B. A. *Método das diferenças finitas energéticas na análise estática e dinâmica de placas delgadas e espessas*. 2000. 178f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. 7.ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2010. 637p.
- HIGDON, A.; OHLSEN, E. H.; STILES, W.; WEESE, J. A.; RILEY, W. F. *Mecânica dos materiais*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. 550p.
- KOCATÜRK, T., ALTITAS, G. Determination of the steady state response of viscoelastically point-supported rectangular specially orthotropic plate by an energy-based finite difference method. *J. Sound Vibration*, v.267, p.1143-1156, 2003.
- LAHR, F. A. R. *Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira*. 1983, 216f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1983.
- MANSUR, W. J.; LOUREIRO, F. S.; SOARES JR., D.; DORS, C. Explicit time-domain approaches based on numerical Green's functions computed by finite differences - The ExGA family Source. *J. Comput. Phys.*, San Diego, v.227, n.1, p.851-870. 2000.
- MITTELBAACH, F. R. *Método das diferenças finitas energéticas na análise de reservatórios cilíndricos*. 2002. 96f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- POPOV, E. P. *Introdução à mecânica dos sólidos*. New Jersey: Prentice-Hall, 1978. 534p.

RODRIGUES, R. F.; NICOLI, A. V.; BENETTI, D.; CHRISTOFORO, A. L. Aplicação do método de Newton-Raphson na resolução de sistemas de equações não-lineares. In: ENCONTRO ESTADUAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 4., 2008, Sinop. *Anais...* Sinop: UNEMAT, 2008.

VERMA, A. K.; DEY, S. S. Integrated analysis of curved bridge superstructures by variational finite difference method. *Computers & Structures*, Oxford, v.38, n.5-6, p.597-603, 1991.

Recebido em 09.02.2011.

Aprovado após revisão 17.04.2011.