

MODELO DE CRESCIMENTO DE GOMPERTZ NA PRESENÇA DE ERROS NORMAIS HETEROCEDÁSTICOS: UM ESTUDO DE CASO

Josmar MAZUCHELI¹
Roberto Molina de SOUZA²
Adriana Strieder PHILIPPSEN¹

- RESUMO: Neste artigo, utilizando dados de ganho de peso de codornas, provenientes de um estudo longitudinal, é conduzida uma análise de regressão não linear com o modelo de crescimento Gompertz sob as suposições de homocedasticidade e heterocedasticidade multiplicativa das variâncias. Em análise de regressão, linear ou não linear, uma suposição geralmente considerada é a de homocedasticidade dos erros, ou seja, assume-se que os erros do modelo adotado possuem variâncias estatisticamente idênticas. Os dados considerados neste artigo se referem ao peso, em gramas, de $N = 152(262)$ codornas machos(fêmeas), avaliadas na 1^a, 7^a, 14^a, 21^a, 28^a e 35^a semanas após o nascimento. As estimativas dos parâmetros dos modelos adotados (homocedástico e heterocedástico) são obtidas maximizando-se o logaritmo da função log-verossimilhança e via métodos MCMC, sob o enfoque Bayesiano. Sob o ponto de vista clássico, as inferências a respeito dos parâmetros de interesse são conduzidas com base na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. O modelo ajustado, via máxima verossimilhança e via métodos MCMC, sob a suposição de homogeneidade de variâncias parece superestimar o verdadeiro peso médio assintótico das aves o que não ocorrer quando se considera o modelo com erros heterocedásticos.
- PALAVRAS-CHAVE: Regressão não linear; modelo de crescimento; heterocedasticidade; estimadores de máxima verossimilhança; métodos MCMC.

¹Universidade Estadual de Maringá – UEM, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Estatística, CEP: 87020-900, Maringá, PR, Brasil. E-mail: jmazucheli@uem.br

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, COMAT, CEP: 86300-000, Cornélio Procópio, PR, Brasil. E-mail: rmolinasouza@utfpr.edu.br

1 Introdução

No ajuste de um modelo de regressão, linear ou não linear, para dados observados ao longo do tempo, em que y_{ij} denota a i -ésima resposta observada na ocasião j ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n_i$) é comum assumir que os erros do modelo adotado são não correlacionados e que suas variâncias são constantes em todo j (Montgomery *et al.*, 2001). Esta suposição é conhecida na literatura como homocedasticidade de variâncias. É prática comum após o ajuste do modelo, a avaliação desta suposição por meio de testes formais de qualidade/validade do ajuste/suposições (Belsley *et al.*, 1980; Cook e Weisberg, 1983).

Em muitas situações práticas, em que a variável resposta é o ganho de peso ao longo do tempo, a suposição de homocedasticidade pode não ser razoável. Como exemplo real, considere os dados obtidos de um estudo longitudinal em que $N = 152(262)$ codornas machos(fêmeas) tiveram seus pesos corporais avaliados na 1^a, 7^a, 14^a, 21^a, 28^a e 35^a semanas após o nascimento. Este experimento, planejado, foi conduzido na Fazenda Experimental da Universidade Estadual de Maringá e o objetivo é estimar o verdadeiro peso médio assintótico das aves como também a taxa de ganho de peso, conhecida como taxa de maturação.

A Figura 1 apresenta, para cada sexo, o comportamento do ganho de peso ao longo das 7 avaliações enquanto que a Tabela 1 mostra as médias e os desvios-padrão dos pesos, também em cada uma das 7 avaliações. Como era de se esperar, observa-se, para ambos os sexos, que os pesos médios aumentam com o decorrer das semanas com tendências a estabilizações. As porcentagens de mudanças de pesos entre semanas subjacentes, para os machos(fêmeas) são: 231,99(223, 80%), 164,29(170, 87%), 79,38(78, 52%), 43,21(43, 51%) e 29,38(44, 13%). Com relação aos desvios-padrão, para os machos os mesmos são crescentes até a 21^a semana enquanto que para as fêmeas estes são estritamente crescentes (Tabela 1).

Claramente observa-se na Figura 1 um comportamento não linear para o peso médio como também variâncias não constantes, fato este que evidencia a quebra da usual suposição de homocedasticidade. Para ambos os sexos, os testes de Bartlett e Fligner-Killeen (Conover *et al.*, 1981) rejeitaram fortemente a hipótese de homogeneidade das variâncias (p -valor $< 0,0001$). Nestas condições, as inferências – previsões, intervalos de confiança (ou credibilidade) e testes de hipóteses – podem produzir resultados imprecisos, principalmente em situações em que o tamanho da amostra disponível for pequeno (Deaton *et al.*, 1983).

Geralmente, na presença de heterocedasticidade, a literatura sugere que se busque alguma transformação apropriada da variável resposta, e/ou da covariável, para a estabilização das variâncias (Box e Cox, 1964; Atkinson, 1985; Carroll e Ruppert, 1988; Bobko e Russell, 1990). Como alternativa a transformação, em situações em que há réplicas nos níveis da(s) covariável(eis), é comum considerar o método dos mínimos quadrados ponderado (Carroll e Cline, 1988; Vonesh e Chinchilli, 1997).

Tabela 1 - Média e desvio-padrão dos pesos, em gramas, ao longo das semanas

Idade	Machos		Fêmeas	
	Média	Desvio-Padrão	Média	Desvio-Padrão
1	9,461	1,009	9,542	1,113
7	31,408	6,548	30,897	6,140
14	83,007	8,091	83,691	7,579
21	148,895	15,529	149,408	14,151
28	213,237	14,116	214,416	14,901
35	275,882	12,630	309,034	15,064

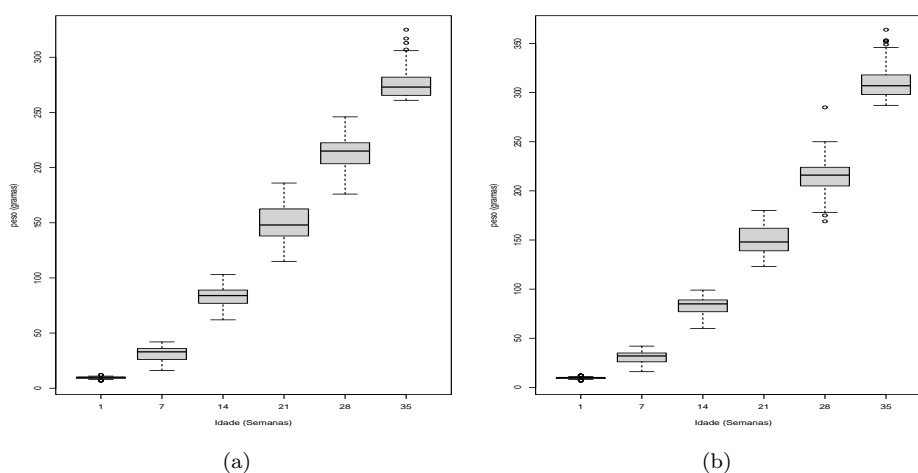


Figura 1 - (a): Comportamento do peso para os machos. (b): Comportamento do peso para as fêmeas.

Neste artigo, usando as idéias descritas em Harvey (1976), considera-se, na análise dos dados acima descritos, o ajuste de um modelo de regressão não linear em que a variância é função multiplicativa dos níveis da covariável idade. Esta proposta baseia-se nas evidências apontadas pelos resultados apresentados na Tabela 1. Na Seção 2 é apresentado o modelo adotado considerando-se erros heterocedásticos. A metodologia adotada é ilustrada na Seção 3 em que são apresentadas as estimativas clássicas e Bayesianas. Algumas conclusões são discutidas na Seção 3. Os códigos SAS e WinBugs usados no ajuste do modelo considerado são apresentando no apêndice.

2 Ajuste do modelo

Muitos modelos de regressão não lineares para a modelagem de dados de crescimento estão propostos na literatura estatística e os mesmos são utilizados nas mais variadas áreas do conhecimento científico (Ratkowski, 1983; Seber e Wild, 1989). Na maioria das vezes, dado N pares de observações (y_{ij}, x_i) , ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n_i$), com os y_{ij} independentes e identicamente distribuídos, busca-se na classe dos modelos não lineares àquele que melhor explique o fenômeno de crescimento sob investigação. É importante ressaltar que, na maioria das vezes ao contrário do caso de regressão linear, os modelos não lineares são formulados a partir de considerações teóricas inerentes ao fenômeno em estudo. Os modelos formulados sob estas considerações são chamados de modelos mecanísticos e quase sempre são soluções de equações diferenciais (Khuri e Cornell, 1996).

Para os dados descritos na Seção 1, seja y_{ij} o peso observado (variável resposta) da i -ésima ave na j -ésima semana; x_j (variável independente) e que a verdadeira relação funcional y_{ij} versus x_j é adequadamente descrita pelo modelo de regressão não linear proposto por Gompertz, parametrizado na forma:

$$y_{ij} = \alpha \exp[-\exp(\beta - \gamma x_j)] + \epsilon_{ij}, \quad (1)$$

em que $i = 1, \dots, 152(262)$, $j = 1, 7, 14, 21, 28, 35$ e (α, β, γ) são os parâmetros que descrevem, respectivamente, o peso assintótico, o fator de integração e a taxa de maturação.

Sob a suposição de heterocedasticidade de variâncias, considera-se que $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2)$ em que $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$ é o parâmetro que caracteriza a variância dos pesos na j -ésima semana. Para $\lambda = 0$ tem-se o modelo homocedástico como caso particular. É importante ressaltar que desde que seja garantida a positividade, qualquer outra forma funcional para σ_i^2 , como alternativa $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$, pode ser adotada (Bellio *et al.*, 2000). Um estudo considerando o peso corporal de frangos e os modelos Gompertz e Richards foi considerando por Buzolin (2005). Neste trabalho o autor considera, também, erros homocedásticos e heterocedásticos.

Considerando as formas funcionais $\alpha \exp[-\exp(\beta - \gamma x_j)]$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$ para a média e variâncias, respectivamente, a função de verossimilhança é escrita forma:

$$L(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{x}) \propto \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x_j^\lambda}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 x_j^\lambda} (y_{ij} - \alpha \exp[-\exp(\beta - \gamma x_j)])^2 \right], \quad (2)$$

em que $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \sigma)$, $N = 152(262)$ para aves machos(fêmeas) e $n_i = 7$ semanas para todo i .

Aplicando a função logarítmica em (2), derivando com relação aos parâmetros α , β , γ , λ e σ e igualando a zero tem-se um sistema de equações não lineares que deve ser resolvido por meio de algum método numérico como Newton-Raphson ou alguns de seus variantes. Neste artigo, a maximização da função log-verossimilhança foi realizada no procedimento *SAS/NLMIXED* (Littell *et al.*, 1996) considerando o algoritmo *Trust Region* (Dennis *et al.*, 1981; Gay, 1983; Moré e Sorensen, 1983). Os

valores iniciais dos parâmetros utilizados no procedimento iterativo foram obtidos de acordo com as sugestões apresentadas em Ratkowsky (1983). Uma alternativa a maximização via *SAS/NLMIXED* é disponível na biblioteca *nlreg* do software *R* (Thaka e Gentleman, 1996).

Sob o ponto de vista Bayesiano, considera-se as seguintes distribuições a priori: $\alpha \sim IG(a_\alpha, b_\alpha)$, $\beta \sim IG(a_\beta, b_\beta)$, $\gamma \sim IG(a_\gamma, b_\gamma)$, $\lambda \sim IG(a_\lambda, b_\lambda)$ e $\sigma^2 \sim IG(a_{\sigma^2}, b_{\sigma^2})$. Em que a e b são hiperparâmetros e $IG(a, b)$ denota a distribuição gama inversa com média $\frac{b}{a-1}$ e variância $\frac{b^2}{[(a-1)^2(a-2)]}$. Assumindo independência a priori, a distribuição a posteriori conjunta é dada pelo produto das distribuições a priori pela função de verossimilhança. No exemplo numérico as estimativas Bayesianas foram obtidas no software *WinBugs* (Spiegelhalter *et al.*, 2003).

3 Aplicação

Considerando os dados de ganho de peso, em gramas, de $N = 152(262)$ codornas machos(fêmeas), as Tabelas 2 e 3 apresentam as estimativas de máxima verossimilhança e os erros padrão assintóticos do vetor de parâmetros $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \sigma)$. As Tabelas 4 e 5 apresentam as estimativas Bayesianas considerando-se prioris não-informativas. Os valores dos hiperparâmetros foram tomados como sendo: $a_\alpha = b_\alpha = 0,1$ e $a_\beta = b_\beta = a_\gamma = b_\gamma = a_\lambda = b_\lambda = a_{\sigma^2} = b_{\sigma^2} = 1$. As primeiras 50000 amostras geradas foram descartadas para eliminar o possível efeito dos valores iniciais. A partir deste descarte foram geradas 500000 amostras tomadas de 50 em 50, totalizando uma amostra final de tamanho 10000. A convergência foi avaliada a partir dos métodos usuais de convergência.

As Tabelas 2 e 3 apresentam ainda os valores das funções log-verossimilhanças, localmente nas estimativas dos parâmetros, enquanto as Tabelas 4 e 5 trazem os valores do *DIC* (*Deviance Information Criterion*) (Spiegelhalter *et al.*, 2002).

Sob o enfoque clássico, a partir do teste da razão das verossimilhanças (Schervish, 1995) a hipótese de que $\lambda = 0$ é fortemente rejeitada, evidenciando que o modelo Gompertz heterocedástico é mais apropriado que o homocedástico. Sob o enfoque Bayesiano, a partir dos valores do *DIC*, chega-se a mesma conclusão. É importante observar que mesmo com prioris não informativas as estimativas Bayesianas são bastante próximas das estimativas clássica. Das tabelas com as estimativas dos parâmetros observa-se claramente uma grande diferença entre $\hat{\alpha}$ do modelo homocedástico e $\hat{\alpha}$ do modelo heterocedástico.

Na Figura 2 são apresentadas as curvas ajustadas segundo os modelos 1 (homocedástico) e 2 (heterocedástico). Devido as escalas dos gráficos tem-se a impressão de que as curvas ajustadas se sobrepõem.

Tabela 2 - Estimativas de máxima verossimilhança (erros-padrão assintóticos) – Machos

Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
1	424.2200 (7.6082)	1.3862 (0.0100)	0.0635 (0.0013)	10.9227 (0.2558)	
2	414.3400 (5.8652)	1.3954 (0.0035)	0.0651 (0.0007)	1.1772 (0.0693)	1.5442 (0.0446)

$\hat{l}_1 = -3474.5, \hat{l}_2 = -2308.7$; modelo 1: $\sigma_i^2 = \sigma^2$, modelo 2: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$.

Tabela 3 - Estimativas de máxima verossimilhança (erros-padrão assintóticos) – Fêmeas

Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
1	700.7900 (19.5718)	1.4242 (0.0009)	0.0460 (0.0049)	12.2582 (0.2186)	
2	529.9100 (7.7247)	1.4457 (0.0031)	0.0575 (0.0005)	1.1547 (0.0480)	1.6188 (0.0310)

$\hat{l}_1 = -6170.5, \hat{l}_2 = -4090.7$; modelo 1: $\sigma_i^2 = \sigma^2$, modelo 2: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$.

Tabela 4 - Estimativas Bayesianas (desvio padrão) – Machos

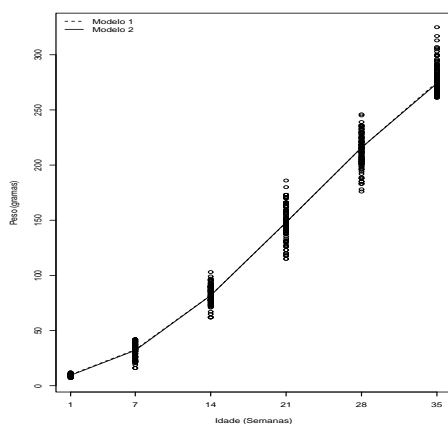
Modelo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
1	423.7000 (7.4840)	1.3870 (0.0099)	0.0636 (0.0012)	10.9300 (0.2569)	
2	414.1000 (5.8750)	1.3950 (0.0035)	0.0652 (0.0007)	1.4090 (0.1664)	1.5420 (0.0443)

$DIC_1 = 6956.9, DIC_2 = 6303.0$; modelo 1: $\sigma_i^2 = \sigma^2$, modelo 2: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$.

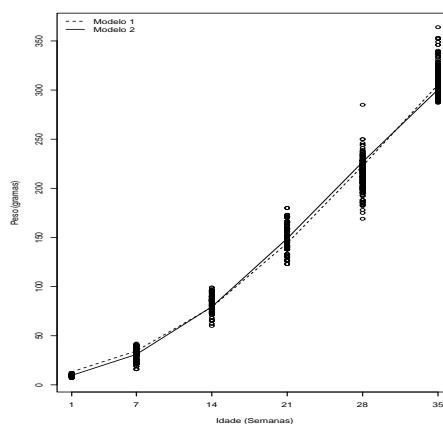
Tabela 5 - Estimativas Bayesianas (desvio padrão) – Fêmeas

Modelo	α	β	γ	σ	λ
1	697.1000 (19.1800)	1.4240 (0.0049)	0.0462 (0.0009)	12.2700 (0.2180)	
2	529.4000 (7.7680)	1.4460 (0.0031)	0.0575 (0.0005)	1.3430 (0.1118)	1.6180 (0.0309)

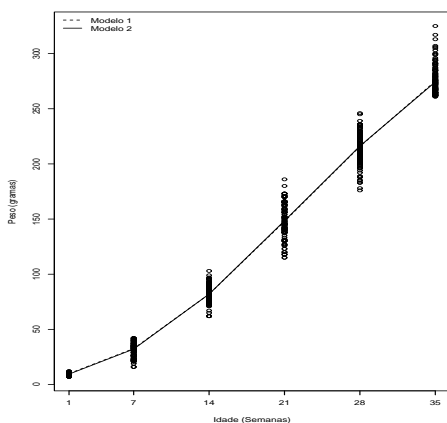
$DIC_1 = 12348.4, DIC_2 = 11080.5$; modelo 1: $\sigma_i^2 = \sigma^2$, modelo 2: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$.



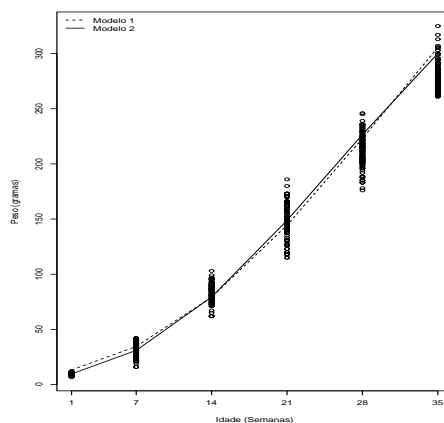
(a) Machos – Enfoque Clássico



(b) Fêmeas – Enfoque Clássico



(c) Machos – Enfoque Bayesiano



(d) Fêmeas – Enfoque Bayesiano

Figura 2 - Curvas ajustadas segundo os modelos 1: $\sigma_i^2 = \sigma^2$ e 2: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_j^\lambda$.

Conclusões

Os modelos de crescimento utilizados na modelagem de dados de crescimento animal tem na maioria das vezes o papel de auxiliar a maximização dos sistemas de produção. Neste sentido, é importante que se tenha disponível métodos estatísticos de estimação que produzam estimativas com grande precisão. A qualidade das estimativas, principalmente em análise de regressão, dependem da não violação de várias suposições. Em análise de regressão, seja linear ou não linear, uma violação muito comum é a falta de homocedasticidade de variâncias presente,

principalmente, em estudos longitudinais em que se observa como resposta o ganho de peso. Como discutido na Seção 1, muitas vezes, é possível contornar este problema por meio de alguma transformação apropriada. Entretanto, de acordo com a transformação utilizada, pode-se perder as interpretações intrínsecas aos parâmetros do(s) modelo(s) adotado(s). Neste artigo, dado um modelo da forma $y_{ij} = f(x_j, \theta) + \epsilon_{ij}$, em $f(x_j, \theta)$ é a função não linear de Gompertz e motivado por um conjunto de dados reais, considerou-se o ajuste assumindo-se que $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 x_j^\lambda)$. Esta forma de modelagem, além de incorporar a possível presença de heterogeneidade de variâncias, tem o modelo homocedástico como caso particular. Apesar desta forma de modelagem acrescentar uma equação adicional no sistema de equações normais, para o conjunto de dados utilizados, este acréscimo não trouxe problemas na maximização da função de log-verossimilhança e resultou em estimativas mais realísticas que o modelo ajustado considerando-se $\lambda = 0$.

Vale relatar que além do modelo com a função de Gompertz, também foram ajustados os modelos não lineares Richards e von Bertalanffy. Estes modelos não exibiram ajustes iguais ou superiores ao ajuste do modelo de Gompertz e seus resultados não foram apresentados. Os modelos Richards e von Bertalanffy superestimaram, de maneira significativa, o peso médio assintótico dos machos e fêmeas.

Para o exemplo real considerado neste artigo a metodologia adotada mostrou ser uma alternativa importante de modelagem e pode ser facilmente implementada nos softwares *SAS/NLMIXED*, *R* (Ihaka e Gentleman, 1996), biblioteca *nlreg* e *WinBugs* (Spiegelhalter *et al.*, 2003). Como alternativa aos enfoques utilizados – Clássico e Bayesiano – tem-se, por exemplo, a metodologia baseada em simulação *Bootstrap* (Efron e Tibshirani, 1993).

No Apêndice 1 são apresentadas as linhas de código utilizadas na obtenção das estimativas de máxima verossimilhança e das médias a posteriori.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Dr. Elias Nunes Martins, pelo fornecimento dos dados e aos revisores pelos comentários.

MAZUCHELI, J.; SOUZA, R. M.; PHILIPPSEN, A. S. Gompertz growth model in the presence of normal heteroscedastic errors: A case study. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.1, p.91-101, 2011.

- **ABSTRACT:** *This paper refers to weight in grams for 152(262) male(female) quails, measured at 1^a, 7^a, 14^a, 21^a, 28^a and 35^a weeks after birth. The estimates for the parameters of the models (with homoscedasticity or not) are obtained by maximization of the logarithm of the likelihood function assuming normal errors and by MCMC methods. The inferences on the parameters of interest are based on asymptotical normality of the maximum likelihood estimators. The fitted model under the assumption of homogeneity of variances seems to superestimate the true mean weight of the quails which does not occur with the model with different variances for the errors.*

- **KEYWORDS:** *Nonlinear regression; growth model; heteroscedasticity; maximum likelihood estimation.*

Referências

- ATKINSON, A. C. *Plots, transformations, and regression*. Oxford: Oxford University Press, 1985. 296p.
- BELLIO, R.; JENSEN, J. E.; SEIDEN, P. Applications of likelihood asymptotics for nonlinear regression in herbicide bioassays. *Biometrics*, Arlington, v.56, n.4, p.1204-1212, 2000.
- BELSLEY, D. A.; KUH, E.; WELSCH, R. E. *Regression diagnostics: identifying influential data and sources of collinearity*. New York: John Wiley & Sons, Chichester-Brisbane, 1980. 292p.
- BOBKO, P.; RUSSELL, C. Variance homogeneity in interactive regression: a clarifying note about data transformations. *J. Appl. Psychol.*, Washington, v.75, n.1, p.95-99, 1990.
- BOX, G. E. P.; COX, D. R. An analysis of transformations. *J. Royal Stat. Assoc., B*, Hoboken, v.26, n.2, p.211-246, 1964.
- BUZOLIN, P. G. C. *Uma abordagem clássica e Bayesiana para os modelos de Gompertz e de Richards heterocedásticos*. 2005. 128f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.
- CARROLL, R. J.; CLINE, D. B. H. An asymptotic theory for weighted least-squares with weights estimated by replication. *Biometrika*, New York, v.75, n.1, p.35-43, 1988.
- CARROLL, R. J.; RUPPERT, D. *Transformation and weighting in regression*. New York: Chapman and Hall, 1988. 249p.
- CONOVER, W. J.; JOHNSON, M. E.; JOHNSON, M. M. A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data. *Technometrics*, Alexandria, v.23, n.4, p.351-361, 1981.
- COOK, R. D.; WEISBERG, S. Diagnostics for heteroscedasticity in regression. *Biometrika*, New York, v.70, n.1, p.1-10, 1983.
- DEATON, M. L.; REYNOLDS, M. R.; MYERS, R. H. Estimators and hypothesis testing in regression in the presence of nonhomogenous error variances. *Communications in Statistics. Simul. Comput.*, Philadelphia, v.12, p.45-66, 1983.
- DENNIS, J. E.; GAY, D. M.; WELSCH, R. E. An adaptive nonlinear least-squares algorithm. *ACM Trans. Math. Software*, Canterbury, v.7, n.3, p.348-368, 1981.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman and Hall, 1993. 436p.
- GAY, D. M. Subroutines for unconstrained minimization. *ACM Trans. Math. Software*, Canterbury, v.9, n.4, p.503-524, 1983.

- HARVEY, A. C. Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity. *Econometrica*, Hoboken, v.44, n.3, p.461-465, 1976.
- IHAKA, R.; GENTLEMAN, R. R. A language for data analysis and graphics. *J. Comput. Graph. Stat.*, Alexandria, v.5, n.3, p.299-314, 1996.
- KHURI, A. I.; CORNELL, J. A. *Response surfaces: designs and analyses*. 2.ed. New York: Marcel Dekker, 1996. 510p.
- LITTELL, R. C.; MILLIKEN, G. A.; STROUP, W. W.; WOLFINGER, R. D. *SAS System for Mixed Models*. Cary, NC: SAS Institute, 1996.
- MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. *Introduction to linear regression analysis*. New York: Wiley-Interscience, 2001.
- MORÉ, J. J.; SORENSEN, D. C. Computing a trust-region Step. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Philadelphia, v.4, n.3, p.533-572, 1983.
- RATKOWSKY, D. A. *Nonlinear regression modeling*. New York: Marcel Dekker, 1983. 276p.
- SCHERVISH, M. *Theory of statistics*. New York: Springer-Verlag, 1995. 702p.
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. *Nonlinear regression*. New York: John Wiley & Sons, 1989. 768p.
- SPIEGELHALTER, D. J.; THOMAS, A.; BEST, N. G.; LUNN, D. *Winbugs version 1.4 user manual*. Mrc biostatistics unit, Institute of Public Health and Department of Epidemiology & Public Health, Imperial College School of Medicine. Disponível em < <http://www.mrcbsu.com.ac.uk/bugs> > Acesso em: 20 nov. 2003.
- SPIEGELHALTER, D. J.; BEST, N. G.; CARLIN, B. P.; VAN DER LINDE, A. Bayesian measures of model complexity and fit. *J. Royal Stat. Soc., B*, Hoboken, v.64, n.4, p.583-639, 2002.
- VONESH, E. F.; CHINCHILLI, V. M. *Linear and nonlinear models for the analysis of repeated measurements*. New York: Marcel Dekker, 1997.

Recebido em 16.09.2010.

Aprovado após revisão em 18.05.2011.

Apêndice 1

Neste apêndice são apresentadas as linhas de comandos utilizadas na obtenção das estimativas de máxima verossimilhança e das médias a posteriori do modelo Gompertz heterocedástico.

Neste apêndice são apresentadas as linhas de comandos utilizadas na obtenção das estimativas de máxima verossimilhança do modelo Gompertz heterocedástico. Assume-se a existência de um *sas-data-set* peso contendo as variáveis: sexo (variável identificadora do sexo), x (variável independente,) e y (variável dependente).

```
[frame=tblr,firstline=1,caption= Linhas de Código SAS/NLMIXED. ,label=code2] proc nlmixed data = pesos vardef=n cov tech=tr; parms alpha = 700, gamma = 1.0, beta = 1.0, sigma = 0.5, lambda = 1.0; bounds alpha<0,gamma<0,beta<0,sigma<0; sigmax = sigma * sqrt(x * lambda); F = alpha * exp(-exp(beta - gamma * x)); L = -log(sigmax) - 0.5/sigmax **2 * (y - F) **2; model L general(L); by sexo; run;
```

Apêndice 2

Neste apêndice são apresentadas as linhas de comandos utilizadas no software software Winbugs para obtenção das quantidades aleatórias do modelo Gompertz heterocedástico. Assume-se a existência de um banco de dados contendo as variáveis: sexo (variável identificadora do sexo), x (variável independente,) e y (variável dependente).

```
[frame=tblr,firstline=1,caption= Linhas de Código Winbugs. ,label=code3] model for(j in 1:T) for(i in 1:N) y[i,j] dnorm(mu[j], tau[j]) mu[j] i- alfa*exp(-exp(beta-gama*x[j])) tau[j] i- 1/(sigma2*pow(x[j],lambda)) alfa dgamma(0.01,0.01) beta dgamma(1,1) gama dgamma(1,1) sigma2 dgamma(1,1) lambda dgamma(1,1)
```