A DISTRIBUIÇÃO BETA BINOMIAL NEGATIVA

Ana Paula Coelho Madeira SILVA[1]
Lucas Monteiro CHAVES[1]

- RESUMO: Os modelos de mistura de distribuições são métodos flexíveis de modelar funções de distribuições de probabilidades complexas a partir de elementos mais simples e tratáveis. A mistura das distribuições binomial negativa e beta é obtida e denominada distribuição beta binomial negativa. A distribuição depende de três parâmetros, apresenta superdispersão e possui um número finito de momentos. Uma aproximação do logaritmo das funções de verossimilhança é determinada obtendo-se estimativas dos parâmetros do modelo. Como aplicação são realizados ajustes da distribuição beta binomial negativa a dados da literatura, analisados anteriormente pela distribuição binomial negativa.
- PALAVRAS-CHAVE: Mistura de distribuições; distribuição beta binomial negativa; distribuição beta; momentos; estimadores de máxima verossimilhança.

1 Introdução

Considere uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade p e defina X como o número de fracassos anteriores ao r-ésimo sucesso. A variável aleatória X segue o modelo binomial negativo com parâmetros r e p, com função de probabilidade

$$f(x|r,p) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \, \mathrm{I}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x), \tag{1}$$

onde: $r = 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$. A distribuição binomial negativa modelando tempo de espera possui o parâmetro r com valores inteiros positivos. No entanto, a distribuição pode ser definida de maneira mais geral considerando r real positivo (Feller, 1968).

[1] Universidade Federal de Lavras – UFLA, Departamento de Ciências Exatas – DEX, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: *apcmadeira@hotmail.com* / *lucas@dex.ufla.br*

Em algumas situações experimentais, a pressuposição de que o parâmetro p é constante em todos os ensaios de Bernoulli é violada, surgindo então a necessidade de extensões ou modificações desta distribuição. Uma modelagem possível, porém pouco estudada, é a seguinte: Seja $\{f(x|\theta);\ \theta \in \Theta\}$ uma família de funções densidade de probabilidade parametrizadas por θ em um espaço paramétrico Θ.

Se $g(\theta)$ é uma função densidade de probabilidade definida em Θ , então

$$h(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\, g(\theta)\, d\theta, \tag{2}$$

é denominada mistura das distribuições $f(x|\theta)$ e $g(\theta)$, (Mood *et al.*, 1974).

Neste contexto, diferentes distribuições de probabilidade podem ser obtidas supondo-se que o parâmetro da distribuição varia segundo uma distribuição de probabilidade, isto é, o parâmetro de interesse passa a ser considerado uma variável aleatória com sua própria distribuição.

O conceito de mistura é muito útil na modelagem de fenômenos aleatórios, permite que se faça uma hierarquia entre os parâmetros e depois toma-se o efeito médio de todos eles. As distribuições obtidas dessa forma são flexíveis no sentido de modelar fenômenos complexos a partir de pressupostos mais simples e tratáveis. Um exemplo clássico de uma distribuição obtida pelo processo de mistura é a beta binomial, resultado da mistura das distribuições binomial e beta. A própria distribuição binomial negativa pode ser obtida como mistura das distribuições Poisson e Gama (Mood *et al.*, 1974).

A idéia é modelar a variação do parâmetro p por uma distribuição beta, e então fazer a mistura com a binomial negativa. A distribuição obtida é denominada beta binomial negativa (BBN). Essa distribuição é encontrada na literatura de maneira esparsa. Uma primeira referência é Irwin (1968), onde a distribuição beta binomial negativa aparece com a denominação "generalized Waring distribution" com uma parametrização diferente da apresentada neste trabalho, sem referência ao processo de mistura. Em Jonhson e Kotz (1969) a distribuição aparece em uma ampla lista de distribuições obtidas por mistura. Como a distribuição Markov-Pólya inversa em Kemp e Kemp (1956), como caso particular de uma família mais geral em Gerstenkorn (2004) e como mistura em Hassan e Bilal (2008). Uma aproximação da distribuição beta binomial negativa pela distribuição binomial negativa pode ser encontrada em Teerapabolarn (2008).

Como aplicação, alguns ajustes a dados anteriormente analisados na literatura são realizados, no sentido de mostrar a utilidade prática desta distribuição. Deste modo é possível verificar que essa distribuição representa um modelo alternativo, mais flexível que a distribuição binomial negativa. Alguns cálculos matemáticos são desenvolvidos de forma detalhada uma vez que a teoria da mistura de distribuições não é desenvolvida na maioria dos livros textos.

2 A distribuição beta binomial negativa

Suponha para o parâmetro p em (1) uma função densidade de probabilidade Beta:

$$g(p) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \mathrm{I}_{(0,1)}(p) \ ,$$

em que, $a > 0$, $b > 0$ e $0 < p < 1$. Neste caso, obtém-se como mistura a distribuição discreta

$$\begin{aligned} h(x|a,b,r) &= \int_0^1 f(x|r,p)\, g(p)\, dp = \int_0^1 \binom{r+x-1}{x} p^r q^x \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp \\ &= \binom{r+x-1}{x} \frac{\mathrm{B}(r+a, x+b)}{\mathrm{B}(a,b)} \mathrm{I}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x) \ , \end{aligned} \quad (3)$$

denominada beta binomial negativa, (BBN).

Considere $x^{[n]} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$ em que $x^{[n]}$ representa um fatorial ascendente. Expressando a função beta em termos da função gama, $\mathrm{B}(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, e a relação $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$, tem-se:

$$h(x|a,b,r) = \binom{r+x-1}{x} \frac{\Gamma(r+a)\Gamma(x+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+r+x)\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad (4)$$

com $a > 0$, $b > 0$ e r real positivo. Para r inteiro positivo podemos reescrever (4) em termos de fatoriais ascendentes

$$h(x|a,b,r) = \frac{r^{[x]}\, a^{[r]}\, b^{[x]}}{x!\,(a+b)^{[r+x]}}. \quad (5)$$

A expressão (5) será utilizada formalmente quando r for real positivo, no lugar da expressão (4), para simplificar a manipulação algébrica das equações de verossimilhança.

2.1 Função geradora de probabilidade

Se X é uma variável aleatória discreta assumindo valores inteiros não negativos, $X \in \{0,1,2,\ldots\}$, $P[X=x] = p_x$ e $\sum_{x=0}^{\infty} p_x = 1$, a função geradora de probabilidade de X é definida por $G_X(z) = E\left[z^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} p_x z^x$. Deste modo, a função geradora de probabilidade da distribuição beta binomial negativa é :

$$G_X(z) = E\left[z^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{r^{[x]}\, a^{[r]}\, b^{[x]}}{x!\,(a+b)^{[r+x]}} z^x. \quad (6)$$

2.2 Momentos fatoriais

Se l é um inteiro pode-se definir para um número real x o l-ésimo fatorial descendente por $x^{(l)} = x(x-1)(x-2)...(x-(l-1))$. Se X é uma variável aleatória $X^{(l)} = X(X-1)(X-2)...(X-(l-1))$ define-se então o l-ésimo momento fatorial de X por $E\left[X^{(l)}\right]$.

Se X_θ é uma família de variáveis aleatórias com distribuições $f(x|\theta)$ e supondo θ com densidade $g(\theta)$, os momentos fatoriais da variável aleatória X com distribuição dada pela mistura (2) possui momentos fatoriais

$$\begin{aligned} E\left[X^{(l)}\right] &= \int_{\mathbb{R}} (x(x-1)(x-2)\dots(x-l+1))\,h(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[(x(x-1)\dots(x-l+1)) \int_{\Theta} f(x|\theta) g(\theta)\,d\theta\right] dx \\ &= \int_{\Theta} \left[\int_{\mathbb{R}} (x(x-1)\dots(x-l+1))\, f(x|\theta)\,dx\right] g(\theta)\,d\theta \\ &= \int_{\Theta} E\left[X_\theta^{(l)}\right] g(\theta)\,d\theta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Os momentos fatoriais da mistura são obtidos como uma média dos momentos fatoriais da distribuição original. Eles também podem ser obtidos pela derivação da função geradora de probabilidade. Porém, em muitas situações, a diferenciação de $G_X(z)$ requer um cálculo trabalhoso.

Os momentos fatoriais da distribuição binomial negativa são dados por $r^{[l]}\left(\frac{q}{p}\right)^l$ (Madeira, 2009) e portanto, substituindo em (7), tem-se que os momentos fatoriais da distribuição beta binomial negativa são:

$$\int_0^1 E\left[X_p^{(l)}\right] g(p)\,dp = \int_0^1 r^{[l]}\left(\frac{q}{p}\right)^l \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1}\,dp = r^{[l]}\frac{\mathrm{B}(a-l,b+l)}{\mathrm{B}(a,b)}. \tag{8}$$

Em particular, a média e a variância são:

- $E[X] = \dfrac{rb}{(a-1)}$, $a > 1$;
- $Var[X] = \dfrac{rb\left[(r+a-1)(a+b-1)\right]}{(a-1)^2(a-2)}$, $a > 2$.

Segue imediatamente de (8) que os momentos da distribuição beta binomial negativa existem até a ordem $a > l$. Esse resultado está de acordo com Johnson *et al.* (2005). Hassan e Bilal (2008) afirmam que todos os momentos fatoriais existem.

Note que, assim como a binomial negativa, a distribuição beta binomial negativa apresenta variância maior que a média.

3 Sistema de equações para o cálculo aproximado dos estimadores de máxima verossimilhança

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória da distribuição beta binomial negativa. Considere n_x = número de vezes que o inteiro x aparece na amostra, deste modo, $n = \sum n_x$.

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^{n} \frac{r^{[x_i]}\, a^{[r]}\, b^{[x_i]}}{x_i!\,(a+b)^{[r]}\,(a+b+r)^{[x_i]}} = \left[\frac{a^{[r]}}{(a+b)^{[r]}}\right]^n \prod_{i=1}^{n} \frac{r^{[x_i]}\, b^{[x_i]}}{(x_i!)\,(a+b+r)^{[x_i]}} \\ &= \left[\frac{a^{[r]}}{(a+b)^{[r]}}\right]^n \prod_{x} \left(\frac{r^{[x]}\, b^{[x]}}{(x!)\,(a+b+r)^{[x]}}\right)^{n_x}, \end{aligned}$$

em que o segundo produtório são nos valores distintos da amostra. O logaritmo da função de verossimilhança do modelo é dada por:

$$\begin{aligned} \ln(L) &= n\left[\ln a^{[r]} - \ln(a+b)^{[r]}\right] + \sum n_x \ln r^{[x]} + \sum n_x \ln b^{[x]} - \sum n_x \ln(x!) \\ &\quad - \sum n_x \ln(a+b+r)^{[x]}. \end{aligned} \tag{9}$$

Desenvolvendo-se os fatoriais em (9) obtém-se:

$$\begin{aligned} \ln(L) &= n\left[\ln(a(a+1)\ldots(a+r-1)) - \ln((a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+r-1))\right] + \\ &\quad + \sum n_x \ln(r(r+1)\ldots(r+x-1)) + \sum n_x \ln(b(b+1)\ldots(b+x-1)) - \\ &\quad - \sum n_x \ln(x!) - \sum n_x \ln((a+b+r)\ldots(a+b+r+x-1)). \end{aligned} \tag{10}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ln(L) = n&\left[\sum_{k=0}^{r-1} \ln(a+k) - \sum_{k=0}^{r-1} \ln(a+b+k)\right] - \sum n_x \left(\sum_{k=0}^{x-1} \ln(a+b+r+k)\right) - \\ &- \sum n_x \ln(x!) + \sum n_x \left(\sum_{k=0}^{x-1} \ln(b+k)\right) + \sum n_x \left(\sum_{k=0}^{x-1} \ln(r+k.)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

As equações de máxima verossimilhança em relação aos parâmetros a, b e r, são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(L)}{\partial a} &= n\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{a+k} - n\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{a+b+k} - \sum n_x\left(\sum_{k=0}^{x-1}\frac{1}{a+b+r+k}\right)\\
\frac{\partial \ln(L)}{\partial b} &= \sum n_x\left(\sum_{k=0}^{x-1}\frac{1}{b+k}\right) - n\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{a+b+k} - \sum n_x\sum_{k=0}^{x-1}\frac{1}{a+b+r+k}\\
\frac{\partial \ln(L)}{\partial r} &= n\left(\frac{\partial \ln a^{[r]}}{\partial r} - \frac{\partial \ln(a+b)^{[r]}}{\partial r}\right) + \sum n_x\frac{\partial \ln r^{[x]}}{\partial r} - \sum n_x\frac{\partial \ln(a+b+r)^{[x]}}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Convertendo (12) em termos da função gama tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(L)}{\partial r} &= n\frac{\partial \ln\Gamma(a+r)}{\partial r} - n\,\frac{\partial \ln\Gamma(a+b+r)}{\partial r} - \sum n_x\frac{\partial \ln\Gamma(a+b+r+x)}{\partial r} - \\
&- \sum n_x\frac{\partial \ln\Gamma(r)}{\partial r} + \sum n_x\frac{\partial \ln\Gamma(r+x)}{\partial r} + \sum n_x\frac{\partial \ln\Gamma(a+b+r)}{\partial r}. \quad (12)
\end{aligned}$$

A diferenciação em (12) não é direta. A derivada do logaritmo da função gama $\psi(x) = \dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ é denoninada função digama ou função psi. Em termos da função psi a equação (12) fica da forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(L)}{\partial r} &= n\psi(a+r) - n\psi(a+b+r) - \sum n_x\psi(a+b+r+x) - \sum n_x\psi(r) + \\
&+ \sum n_x\psi(r+x) + \sum n_x\psi(a+b+r). \quad (13)
\end{aligned}$$

A função psi possui a seguinte relação de recorrência

$$\psi(x+n) = \psi(x) + \sum_{j=1}^{n}(x+j-1)^{-1},\ n = 1, 2, \ldots, \quad (14)$$

e pode ser aproximada por $\psi(x) \approx \ln x - \dfrac{1}{2x}$, (Johnson *et al.*, 2005). Portanto,

$$\psi(x+n) \approx \ln x - \frac{1}{2x} + \sum_{j=1}^{n}(x+j-1)^{-1}. \quad (15)$$

Utilizando (15) obtém-se uma aproximação para a equação (13)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(L)}{\partial r} \approx\; & n\left[\left(\ln r - \frac{1}{2r} + \sum_{k=1}^{a}\frac{1}{r+k-1}\right) - \left(\ln r - \frac{1}{2r} + \sum_{k=1}^{a+b}\frac{1}{r+k-1}\right)\right] - \\
- & \sum n_x\left(\ln r - \frac{1}{2r}\right) - \sum n_x\left(\ln r - \frac{1}{2r} + \sum_{k=1}^{a+b}\frac{1}{r+k-1}\right) - \\
- & \sum n_x\left(\ln r - \frac{1}{2r} + \sum_{k=1}^{x}\frac{1}{r+k-1}\right) + \sum n_x\left(\ln r - \frac{1}{2r}\right) + \\
+ & \sum n_x\left(\sum_{k=1}^{a+b+x}\frac{1}{r+k-1}\right). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema de equações para o cálculo aproximado dos estimadores de máxima verossimilhança é dado por

$$
\begin{cases}
n\displaystyle\sum_{k=0}^{\hat{r}-1}\frac{1}{\hat{a}+k} - n\sum_{k=0}^{\hat{r}-1}\frac{1}{\hat{a}+\hat{b}+k} - \sum n_x\left(\sum_{k=0}^{x-1}\frac{1}{\hat{a}+\hat{b}+\hat{r}+k}\right) = 0 \\
\displaystyle\sum n_x\left(\sum_{k=0}^{x-1}\frac{1}{\hat{b}+k}\right) - n\sum_{k=0}^{\hat{r}-1}\frac{1}{\hat{a}+\hat{b}+k} - \sum n_x\left(\sum_{k=0}^{x-1}\frac{1}{\hat{a}+\hat{b}+\hat{r}+k}\right) = 0 \\
n\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\hat{a}}\frac{1}{\hat{r}+k-1} - \sum_{k=1}^{\hat{a}+\hat{b}}\frac{1}{\hat{r}+k-1}\right] + \sum n_x\left[\sum_{k=1}^{\hat{a}+\hat{b}}\frac{1}{\hat{r}+k-1} + \sum_{k=1}^{x}\frac{1}{\hat{r}+k-1} - \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \displaystyle\sum_{k=1}^{\hat{a}+\hat{b}+x}\frac{1}{\hat{r}+k-1}\right] = 0.
\end{cases} \qquad (17)
$$

As equações (17) diferem das equações apresentadas por Hassan e Bilal (2008).

O sistema pode ser resolvido utilizando-se um software de computação algébrica. Neste trabalho utilizou-se o software Maple, versão 13.

4 Aplicações

Nesta seção dois conjuntos de dados analisados anteriormente pela distribuição binomial negativa são analisados pela distribuição beta binomial negativa. Os dados são relativos à contagem do número de plantas *Salicornia stricta* por unidade de área e à contagem do número de acidentes por maquinista num período de três meses, analisados por Bliss e Fisher (1953).

Para verificar a qualidade do ajuste da distribuição beta binomial negativa aos dados é utilizado um teste de aderência com estatística dada por

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}, \tag{18}$$

em que as frequências amostrais Fo_i observadas na classe i são comparadas com as frequências esperadas Fe_i pelo modelo.

O valor fornecido por χ_c^2 é comparado com o quantil da distribuição qui-quadrado, com $(k-t-1)$ graus de liberdade, k é o número de classes e t o número de parâmetros estimados pelo método da máxima verossimilhança. Para a realização do teste, na Tabela 1 os números de plantas por quadrado iguais ou superiores a 14 foram considerados em uma única classe. Na Tabela 2 o número de acidentes por maquinista igual ou superior a 6 foram considerados em uma única classe.

Tabela 1 - Número de plantas por unidade de área

Número de plantas x	Frequência observada Fo_i	Frequência esperada BBN	Frequência esperada BN
0	4	3,2	3,3
1	3	5,5	6,4
2	8	8,5	8,4
3	13	10,2	9,4
4	11	10,7	9,6
5	9	10,2	9,2
6	8	9,2	8,4
7	10	8,0	7,5
8	3	6,7	6,5
9	3	5,5	5,6
10	8	4,4	4,7
11	3	3,6	3,1
12	4	2,8	2,5
13	4	2,2	2,1
14	0	1,8	1,7
15	3	1,4	1,3
16	0	1,1	1,0
17	0	0,9	0,8
18	1	0,7	0,6
19	0	0,5	0,0
20^+	3	0,4	5,9
χ_c^2		11,16	14,08
$P\left(\chi^2 > \chi_c^2\right)$		0,43	0,29

Tabela 2 - Número de acidentes por maquinista

Número de acidentes x	Frequência observada Fo_i	Frequência esperada BBN	Frequência esperada BN
0	296	290,5	296,7
1	74	77,8	71,0
2	26	25,9	26,4
3	8	10,2	11,0
4	4	4,5	4,8
5	4	2,2	2,2
6	1	1,2	1,0
7	0	0,6	0,5
8	1	0,4	0,2
9	0	0,2	0,2
χ_c^2	—	2,36	2,56
$P\left(\chi^2 > \chi_c^2\right)$	—	0,50	0,63

As Figuras 1 e 2 apresentam o ajuste pelas distribuições binomial negativa e beta binomial negativa.

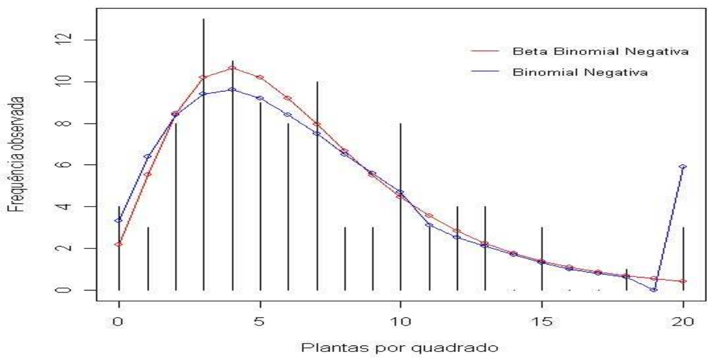

Figura 1 - Distribuição do número de plantas por unidade de área.

A distribuição beta binomial negativa apresentou um ajuste, para os dados do número de plantas, superior ao da binomial negativa. Tal fato é razoável pois certamente a suposição que o parâmetro p era igual ao longo de todas as unidades experimentais é muito restritiva.

Para o conjunto de dados relativo ao número de acidentes a binomial negativa apresentou um melhor ajuste em relação à beta binomial negativa. No entanto,

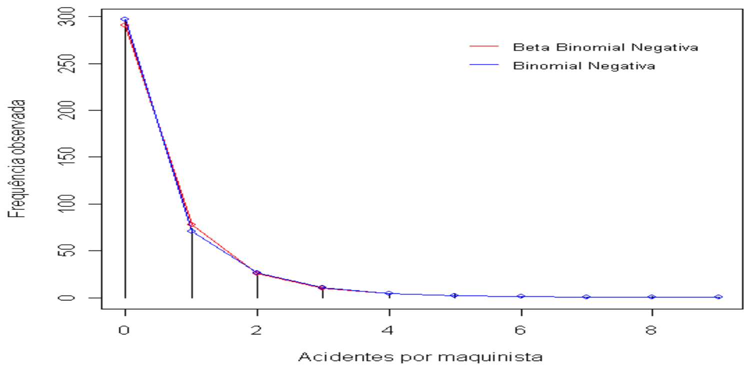

Figura 2 - Distribuição do número de acidentes por maquinista.

a suposição que o parâmetro p é o mesmo para todos os maquinistas é também bastante restritiva, uma vez que a habilidade do maquinista é variável. A soma dos quadrados dos desvios entre as frequências esperadas e observadas é menor para a beta binomial negativa, porém, devido ao fato do número de parâmetros da beta binomial negativa ser superior ao da binomial negativa, o desempenho no teste é prejudicado.

Conclusões

A distribuição beta binomial negativa é uma distribuição com boas propriedades e pode, com vantagens, substituir a distribuição binomial negativa em situações em que o parâmetro p não pode ser considerado constante.

SILVA, A. P. C. M.; CHAVES, L. M. The negative beta binomial distribution. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.2, p.262-272, 2011.

▪ *ABSTRACT: Distribution mixture are flexible methods in the modeling of complex probability distributions starting from more simple tractable elements. In this work we obtain the mixture of the negative binomial and beta distributions, denominated negative beta binomial distribution. It depends on three parameters, shown over dispersion a infinity number of moments. Using an approximation of the log likelihood equations we estimate the parameters of the model. As an application we adjusted the negative beta binomial to data found in the literature and already analyzed using negative binomial distribution.*

▪ *KEYWORDS: Mixture of distributions; negative beta binomial distribution; beta distribution; moments; maximum likelihood estimators.*

Referências

BLISS, C. I.; FISHER, R. A. Fitting the negative binomial distribution to biological data. *Biometrics*, Washington, v.9, n.2, p.176-200, 1953.

FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications.* New York: John Wiley, 1968.

GERSTENKORN, T. A compound of the generalized negative binomial distribution with the generalized beta distribution. *Central Eur. J. Math.*, London, v.2, n.4, p.527-237, 2004.

HASSAN, A.; BILAL, S. On estimation of negative Polya-Eggenberger distribution and applications. *J. Korean Soc. Industrial Appl. Math.*, Seul, v.12, n.2, p.81-95, 2008.

IRWIN, J. O. The generalized Waring distribution applied to accident theory. *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, London, v.131, p.205-225, 1968.

JOHNSON, N. L.; KEMP, A. W.; KOTZ, S. *Univariate discrete distributions.* 3.ed. New York: John Wiley, 2005. 646p.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.*Discrete distributions.* New York: John Wiley, 1969.

KEMP, C. D.; KEMP, A. W. Generalized hypergeometric distributions. *J. R. Stat. Soc., Ser. B Methodol.*, London, v.18, n.2, p.202-211, 1956.

MADEIRA, A. P. C. *A distribuição beta binomial negativa*, 2009. 81f. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2009.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the theory of statistics.* New York: McGraw-Hill, 1974. 564p.

TEERAPABOLARN, K. On the negative binomial approximation to the beta negative binomial distribution. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, Chonburi, v.3, n.25, p.1213-1216, 2008.

Recebido em 18.03.2011.

Aprovado após revisão em 05.08.2011.