

## EMPREGO DO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS NA DETERMINAÇÃO DE DESLOCAMENTOS EM VIGAS

André Luis CHRISTOFORO<sup>1</sup>  
Francisco Antonio ROCCO LAHR<sup>2</sup>

- RESUMO: Muitos fenômenos da física, engenharias entre outras áreas da ciência são regidos e avaliados por meio de equações diferenciais. Na mecânica dos sólidos deformáveis, a determinação dos deslocamentos em vigas requer a resolução de equações diferenciais ordinárias, sendo o MEF e o MDF os métodos numéricos mais utilizados. Este trabalho objetiva apresentar o emprego três versões do Método dos Resíduos Ponderados em um problema de viga, com solução analítica conhecida, permitindo avaliar a precisão de ambos.
- PALAVRAS-CHAVE: Vigas; método de resíduos ponderados; método de Galerkin; método da colocação; método dos mínimos quadrados.

### 1 Introdução

Vigas são elementos estruturais comumente empregados em construções civis, em projetos mecânicos e em construções rurais. Na mecânica dos sólidos, a determinação dos deslocamentos requer a resolução de equações diferenciais ordinárias. Pela natureza do problema a solução analítica nem sempre existe e, mesmo existindo, para alguns casos os trabalhos algébricos são dispendiosos.

De forma aproximada, os deslocamentos, assim como outras variáveis estruturais tais como esforços, tensões e deformações, são usualmente obtidos através de ferramentas numéricas como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). O MEF é em maior parte aplicado a forma fraca dos Problemas de Valor de Contorno (PVC), já o MDF, tendo o seu emprego geralmente sobre a forma forte. Uma das estratégias numéricas que permitem o emprego do MEF sobre a forma fraca dos PVC são os chamados Métodos de Resíduos Ponderados (MRP), tendo principalmente o seu emprego em problemas da análise estrutural em duas e em três dimensões (resolução de Equações Diferenciais Parciais).

Este trabalho objetiva apresentar e aplicar três versões do Método de Resíduos Ponderados, Método de Galerkin, de Mínimos Quadrados e da Colocação, na resolução de uma equação diferencial ordinária, representando um problema de deflexão de vigas, com solução analítica conhecida, permitindo avaliar a precisão de ambos.

---

<sup>1</sup> Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ, Campus Santo Antônio, Departamento de Engenharia Mecânica, CEP: 36307-352, São João Del-Rei, MG, Brasil. E-mail: [achristo@ufsj.edu.br](mailto:achristo@ufsj.edu.br)

<sup>2</sup> Universidade de São Paulo – USP, Escola de Engenharia de São Carlos, Campus I, Departamento de Engenharia de Estruturas, Caixa Postal 359, CEP: 13566-590, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: [frocco@sc.usp.br](mailto:frocco@sc.usp.br)

## 2 Problema modelo

O comportamento das estruturas e sua interação com o meio externo são formulados com o auxílio de leis da Física, que impõe restrições sobre o conjunto de variáveis de interesse, expressos em termos matemáticos mediante equações diferenciais ou integrais.

De forma geral, a modelagem deve partir de uma avaliação conceitual preliminar, objetivando caracterizar o tipo de abordagem mais representativa fenômeno em questão, como estática ou dinâmica, linear ou não-linear entre outras. Segue então a etapa da formulação propriamente dita, consistindo da representação matemática do problema, onde normalmente são adotados condicionantes sobre a regularidade das funções que relacionam as variáveis envolvidas, conduzindo a uma idealização mais ou menos simplificada dos fenômenos estudados.

Descrever o comportamento de uma estrutura significa determinar em qualquer um de seus pontos, os campos de deslocamentos, tensões e deformações, para uma dada condição de carregamento externo e de vinculação no contorno. Portanto, as variáveis envolvidas no modelo matemático são representativas de campos de deslocamentos, tensões e deformações. Uma hipótese fundamental na passagem para o modelo matemático é a continuidade do meio, permitindo identificar qualquer um de seus pontos materiais mediante um conjunto de coordenadas e, por outro lado, em regularidade estendida às ordens superiores de derivação da função solução.

O problema modelo utilizado para se avaliar a precisão dos métodos numéricos é ilustrado na Figura 1.

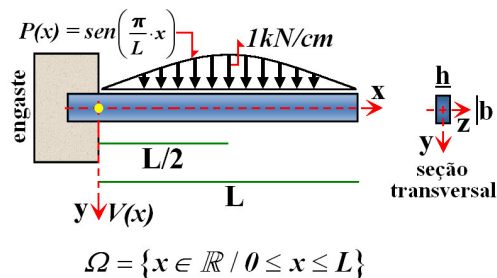


Figura 1 – Problema modelo.

A Figura 1 representa o esquema estrutural de uma barra prismática, engastada em uma de suas extremidades e sujeita a um carregamento senoidal, expresso por  $P(x)$ . A variável  $L$  representa o comprimento da barra, sendo de  $1\text{kN/cm}$  o valor da força distribuída, situada a  $L/2$  unidades de comprimento do engaste. O eixo “ $x$ ” coincide com o eixo da barra e os eixos “ $y$ ” e “ $z$ ”, passando sobre o centro geométrico da seção transversal. Vale ressaltar que pelas pequenas medidas nas dimensões da seção quando comparadas com o comprimento da barra, considera-se a viga como um elemento unidimensional, modelada por uma equação diferencial ordinária, uma vez que a função deslocamentos “ $V(x)$ ” é dependente de uma única variável.

A Equação 1, juntamente com as condições iniciais, representa o Problema de Valor Inicial (PVI) em questão,

$$\frac{d^2}{dx^2} [V(x)] = \frac{L}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \underbrace{\left( \pi \cdot (L-x) - L \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{L} \cdot x \right) \right)}_{q(x)}, \quad \begin{cases} V(x=0) = 0 \\ \left. \frac{d}{dx} [V(x)] \right|_0 = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

em que:

$E$  – módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young;

$I_z$  – momento de inércia de segunda ordem em torno do eixo neutro “z”.

O módulo de elasticidade longitudinal é uma propriedade intrínseca do material e o momento de inércia, da geometria da seção transversal da peça. Da Equação 1, o produto  $E \cdot I_z$  denota rigidez à flexão da viga.

A Equação 1 é de segunda ordem, linear e com coeficientes constantes. A exigência do operador linear contido na equação diferencial é que a solução do problema ( $V(x)$ ) tenha função derivada segunda contínua em todo o domínio  $\Omega$  do corpo ( $\Omega = \{x \in R / 0 \leq x \leq L\}$ ). Desta forma, fica garantida a existência da solução do problema uma vez que o termo independente “ $q(x)$ ” da equação incompleta é uma função pertencente à classe de diferenciabilidade  $C^n(R)$ . Como  $q(x)$  é ainda não identicamente nula para todo o domínio da barra, contendo o ponto  $x=0$ , pelo teorema de existência e unicidade de solução para uma equação diferencial linear de segunda ordem (PVI), tem-se garantia de  $V(x)$  ser solução única.

A solução da equação diferencial do problema modelo é obtida mediante o emprego de duas integrações sucessivas juntamente com o a imposição das condições iniciais, expressa pela Equação 2.

$$V(x) = \frac{L}{6 \cdot \pi^4 \cdot E \cdot I_z} \cdot \left( 6 \cdot L^3 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{L} \cdot x \right) - \pi \cdot x^3 + 3 \cdot \pi^3 \cdot L \cdot x^2 - 6 \cdot \pi \cdot L^2 \cdot x \right). \quad (2)$$

Para verificar a precisão dos métodos numéricos foram empregados os seguintes valores para as variáveis do problema:  $E = 1800 \text{ kN/cm}^2$ ,  $I_z = 18000 \text{ cm}^4$  e  $L = 120 \text{ cm}$ . A Figura 2 ilustra o comportamento da função  $V(x)$ .

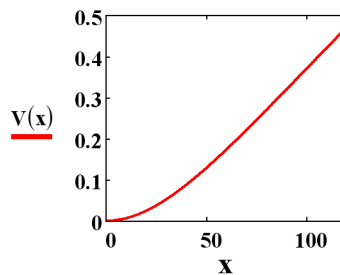


Figura 2 – Gráfico da solução exata.

Da função  $V(x)$ , o maior valor de deslocamento ocorre na extremidade livre da viga (balanço), sendo igual a 0,48 cm aproximadamente. Percebe-se da Figura 2 que o deslocamento e a rotação no vínculo são ambos nulos, assim como requerido pelas condições iniciais impostas.

### 3 Resíduos ponderados

Na análise do desempenho mecânico de estruturas, as soluções podem ser alcançadas mediante a resolução direta da equação ou o conjunto de equações diferenciais que governam os problemas ou de forma aproximada, através da integração ponderada sobre estas equações. A primeira estratégia é conhecida como forma diferencial, local ou forte e, a segunda, variacional.

Como comentado anteriormente, para a resolução do problema matemático representado em forma local destaca-se o emprego do Método das Diferenças Finitas. A forma variacional, por outro lado, permite não somente a aplicação do MDF como também o estabelecimento de diferentes métodos numéricos denominados, genericamente, por Métodos de Resíduos Ponderados (MRP). Tais métodos buscam uma solução aproximada num espaço de dimensão finita e diferem entre si de acordo com o tipo de função de ponderação adotada para a descrição da forma variacional.

Como estratégia utilizada na apresentação do MRP, a Equação 1 do problema modelo é re-escrita em forma compacta, assim como expressa a Equação 3, sendo  $A$  um operador linear que contabiliza a derivada segunda sobre a função incógnita  $u$ , solução da EDO e  $q$ , o termo independente.

$$A(u) = q. \quad (3)$$

Com posse da equação diferencial e das condições de contorno essenciais do problema o objetivo agora consiste em encontrar soluções aproximadas (homogêneas nas condições de contorno) para a função deslocamento. Na Equação 3, qualquer outra função ( $u$  til) testada diferente da solução exata do problema é incapaz de satisfazê-la em todos os pontos no domínio barra, dando origem a uma função resíduo, definida pela Equação 4.

$$R(\tilde{u}) = A(\tilde{u}) - q. \quad (4)$$

A idéia fundamental por trás do MRP consiste em multiplicar a função resíduo  $R(\tilde{u})$  por uma função  $w$  arbitrária (função peso), homogênea nas condições de contorno, integrando o produto no domínio do problema ( $\Omega$ ) e igualando a zero este resultado, assim como expressa a Equação 5.

$$\int_{\Omega} R(\tilde{u})w d\Omega = 0. \quad (5)$$

No MRP, uma forma geral de representar a aproximação para a solução é a seguinte:

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}_0(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \zeta_i(x), \quad c/n \quad (n \in N), \quad (6)$$

sendo  $\tilde{u}_0(x)$  uma função com o mesmo nível de regularidade exigida para a função solução ( $u(x)$ ) e que verifica as condições de contorno e, as funções  $\phi_i(x)$  compõem um conjunto linearmente independente (base), requerendo também regularidade compatível com a exigida para a função solução (exata) e devendo ser homogênea nas condições de contorno. Os polinômios se constituem como boas alternativas na geração de soluções

aproximativas visto serem funções facilmente deriváveis e integráveis, dando destaque à família de polinômios ortogonais, como os de Legendre, Hermite, Lagrange, Jacobi, Sobolev entre outros.

O Método de Resíduos Ponderados propõe que os coeficientes  $\alpha_i$  da função aproximativa  $\tilde{u}(x)$  sejam determinados mediante o emprego da Equação 6 na Equação 5.

A função peso por sua vez pode também ser expressa na forma de uma combinação linear de funções base, assim como expressa a Equação 7.

$$w(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \psi_j(x), \quad c / n \in N. \quad (7)$$

Substituindo-se a equação (7) na equação (5), resulta:

$$\beta_j \int_{\Omega} R(\tilde{u}) \psi_j d\Omega = 0, \quad c / j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

representado por uma somatória de  $n$  parcelas com coeficientes  $\beta_j$ .

Dada a arbitrariedade dos coeficientes, a nulidade indicada fica garantida se cada integral constante da somatória se anular, independentemente, ou seja:

$$\int_{\Omega} R(\tilde{u}) \psi_j d\Omega = 0, \quad c / j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

A forma mais geral deste método resulta da substituição da Equação 6 na Equação 9:

$$\begin{aligned} \alpha_i \int_{\Omega} A(\xi_i) \psi_j d\Omega + \int_{\Omega} A(\tilde{u}_0) \psi_j d\Omega &= \int_{\Omega} q \psi_j d\Omega \\ \alpha_i \int_{\Omega} A(\xi_i) \psi_j d\Omega &= \int_{\Omega} [q - A(\tilde{u}_0)] \psi_j d\Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Definindo-se:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A(\xi_i) \psi_j d\Omega ; \quad f_j = \int_{\Omega} (q - A(\tilde{u}_0)) \psi_j d\Omega, \quad (11)$$

segue a expressão indicial para o sistema que permite determinar os coeficientes  $\alpha_i$ :

$$\alpha_i K_{ij} = F_j. \quad (12)$$

Finalmente, reunindo-se os coeficientes  $\alpha_i$  num vetor coluna  $\{\alpha\}$ , os  $f_j$  num outro vetor coluna  $\{F\}$  e os coeficientes  $k_{ij}$  nas posições de linha  $i$  e coluna  $j$  de uma matriz  $[A]$ , segue a representação matricial do sistema (Equação 12):

$$[K]^T \{\alpha\} = \{F\}. \quad (13)$$

Com relação ao emprego do Método de Resíduos Ponderados na mecânica dos sólidos, alguns trabalhos de destaque podem ser citados tais como o de REISSNER (1950), FINLAYSON e SCRIVEN (1966), BARSOUM (1971), FLETCHER (1978), ZIENKIEWICZ e NAKAZAWA (1984), PRATHAP (1993) e PRATHAP (1995).

### 3.1 Método de Galerkin

Neste método adota-se para a função peso a mesma aproximação da função base, isto é,  $\psi_j = \xi_j$ . Nessas condições, as equações em (11) passam a ser escritas na forma:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A(\xi_i) \xi_j d\Omega \quad ; \quad F_j = \int_{\Omega} [q - A(\tilde{u}_0)] \xi_j d\Omega. \quad (14)$$

### 3.2 Método da colocação

O Método da Colocação impõe que o resíduo seja nulo para um número de pontos do domínio do problema, expresso pela relação:

$$R[\tilde{u}(x_j)] = 0, \quad c/ j=1, 2, \dots, n \quad (n \in \square). \quad (15)$$

Utilizando a propriedade do Delta de Dirac, a relação anterior pode ser escrita em forma integral, assim como expressa a Equação 16.

$$R[\tilde{u}(x_j)] = \int_{\Omega} R(\tilde{u}) \underbrace{\delta(x - x_j)}_{f_j} d\Omega, \quad c/ j=1, 2, \dots, n \quad (n \in \square). \quad (16)$$

Da definição de  $R(\tilde{u})$ , pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} [A(\tilde{u}) - q] \delta(x - x_j) d\Omega = 0, \quad (17)$$

resultando as expressões para a determinação de  $K_{ij}$  e  $F_j$ , assim como expressam as Equações 18 e 19.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A(\xi_i) \psi_j d\Omega = \int_{\Omega} A(\xi_i) \delta(x - x_j) d\Omega = A(\xi_i) \Big|_{x_j}, \quad (18)$$

$$F_j = \int_{\Omega} [q - A(\tilde{u}_0)] \delta(x - x_j) d\Omega = [q - A(\tilde{u}_0)] \Big|_{x_j}. \quad (19)$$

### 3.3 Método dos mínimos quadrados

Classicamente, esse método propõe que a aproximação seja obtida por minimização da norma ao quadrado do resíduo, definida como:

$$\|R\|^2 = \int_{\Omega} [R(\tilde{u})]^2 d\Omega = \int_{\Omega} [R(\alpha_j \zeta_j + \tilde{u}_o)]^2 d\Omega. \quad (20)$$

É possível mostrar que esse método se enquadra na definição geral do Método de Resíduos Ponderados explicitada pela Equação 5. De fato, impondo-se a minimização da norma, segue que:

$$\frac{d}{d\alpha_j} (\|R\|^2) = 0 \rightarrow 2 \int_{\Omega} R(\tilde{u}) \left[ \frac{d}{d\alpha_j} R(\alpha_j \zeta_j + \tilde{u}_o) \right] d\Omega = 0. \quad (21)$$

Ainda da Equação 21 resulta que:

$$\psi_j = \frac{d}{d\alpha_j} R(\alpha_j \zeta_j + \tilde{u}_o) = \frac{d}{d\alpha_j} [A(\alpha_j \zeta_j + \tilde{u}_o) - f] = A(\zeta_j). \quad (22)$$

Portanto, nesse método a Equação 5 assume a forma:

$$\int_{\Omega} R(\tilde{u}) A(\zeta_j) d\Omega = 0, \quad (23)$$

e por consequência, as equações em (11) passam a ser dadas por:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A(\zeta_i) A(\zeta_j) d\Omega \quad ; \quad f_j = \int_{\Omega} (f - A(\tilde{u}_o)) A(\zeta_j) d\Omega. \quad (24)$$

Uma observação importante do Método dos Mínimos Quadrados, colocado sob a forma de resíduo ponderado, é que a matriz  $[K]$  é simétrica.

#### 4 Métodos

Os métodos numéricos apresentados no item anterior são aplicados na resolução do problema modelo de maneira a se verificar a precisão dos mesmos.

A Equação 25 é utilizada para a verificação do erro percentual relativo existente entre as soluções aproximadas “ $Vap(x)$ ” e a analítica “ $V(x)$ ”. Maiores informações sobre a medição de erros em métodos aproximados podem ser encontradas em PINA (2010).

$$Erro = 100 \cdot \frac{\int_0^L |V(x) - Vap(x)| dx}{\int_0^L |V(x)| dx}, \quad \int_0^L |V(x)| dx \neq 0. \quad (25)$$

As funções aproximativas aqui adotadas são polinômios, devendo inicialmente atender as condições do problema ( $V(x=0)=0$  e  $d/dx[V(x=0)]=0$ ). Para tanto, são utilizados os de graus 2, 3, 4, 5 e 6. Para os três métodos o polinômio inicialmente utilizado nas aproximações é o do segundo grau, aumentando-se gradativamente a sua ordem até que o Erro seja igual ou inferior a 0,01%.

## 5 Soluções aproximadas para o problema modelo

Para cada método são apresentadas as soluções aproximadas com o uso dos polinômios, iniciados pelos de segundo grau, aumentando-se a ordem dos mesmos com o intuito de atingir a precisão anteriormente definida. As expressões obtidas das soluções aproximadas foram calculadas simbolicamente com o uso do software Mathcad® 14. São apresentados, ao final de cada método, gráficos confrontados as curvas de deslocamentos geradas pela solução exata e aproximadas.

As funções polinomiais aproximativas são expressas por:

$$Vap_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2. \quad (26)$$

$$Vap_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3. \quad (27)$$

$$Vap_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 + \alpha_4 \cdot x^4. \quad (28)$$

$$Vap_4(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 + \alpha_4 \cdot x^4 + \alpha_5 \cdot x^5. \quad (29)$$

$$Vap_5(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 + \alpha_4 \cdot x^4 + \alpha_5 \cdot x^5 + \alpha_6 \cdot x^6. \quad (30)$$

Aplicando-se as condições de vínculo da estrutura ( $Vap(x=0)=0$  e  $d/dx[Vap(x=0)]=0$ ) nas Equações 26 a 30, chega-se as soluções candidatas do problema, com os parâmetros  $\alpha_i$  a serem determinados, expressas pelas Equações 31 a 35,

$$Vap_1(x) = \alpha_2 \cdot \xi(x); \quad \xi(x) = x^2. \quad (31)$$

$$Vap_2(x) = \alpha_2 \cdot \xi_1(x) + \alpha_3 \cdot \xi_2(x). \quad (32)$$

$$Vap_3(x) = \alpha_2 \cdot \xi_1(x) + \alpha_3 \cdot \xi_2(x) + \alpha_4 \cdot \xi_3(x). \quad (33)$$

$$Vap_4(x) = \alpha_2 \cdot \xi_1(x) + \alpha_3 \cdot \xi_2(x) + \alpha_4 \cdot \xi_3(x) + \alpha_5 \cdot \xi_4(x). \quad (34)$$

$$Vap_5(x) = \alpha_2 \cdot \xi_1(x) + \alpha_3 \cdot \xi_2(x) + \alpha_4 \cdot \xi_3(x) + \alpha_5 \cdot \xi_4(x) + \alpha_6 \cdot \xi_5(x), \quad (35)$$

em que:

$$\xi_1(x) = x^2; \quad \xi_2(x) = x^3; \quad \xi_3(x) = x^4; \quad \xi_4(x) = x^5; \quad \xi_5(x) = x^6.$$

### 5.1 Aproximações por Galerkin

Neste método a precisão desejada foi alcançada utilizando-se polinômios de graus 2, 3, 4, 5 e 6, dando origem as aproximações *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, respectivamente.



### Aproximação A: Polinômio de Grau 2

Os termos  $k$  e  $f$  calculados são apresentados, respectivamente, pelas Equações 36 e 37, dando origem a função aproximativa dos deslocamentos, expressa pela Equação 38.

$$k = \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} [\xi(x)] \cdot \xi(x) \right) dx = \frac{2}{3} \cdot L^3. \quad (36)$$

$$f = \int_0^L (q(x) \cdot \xi(x)) dx = \frac{L^5}{\pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( \frac{\pi^4}{12} - \pi^2 + 4 \right). \quad (37)$$

$$Vap_1(x) = \frac{L^2}{8 \cdot \pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^4 - 12 \cdot \pi^2 + 48) \cdot x^2. \quad (38)$$

O erro encontrado nesta aproximação é de 87,838%.

### Aproximação B: Polinômio de Grau 3

Os termos  $k$  e  $f$  determinados para esta aproximação são expressos por:

$$k_{11} = \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} [\xi_1(x)] \cdot \xi_1(x) \right) dx = \frac{2}{3} \cdot L^3. \quad (39)$$

$$k_{12} = \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} [\xi_1(x)] \cdot \xi_2(x) \right) dx = \frac{1}{2} \cdot L^4. \quad (40)$$

$$k_{21} = \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} [\xi_2(x)] \cdot \xi_1(x) \right) dx = \frac{3}{2} \cdot L^4. \quad (41)$$

$$k_{22} = \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} [\xi_2(x)] \cdot \xi_2(x) \right) dx = \frac{6}{5} \cdot L^5. \quad (42)$$

$$f_1 = \int_0^L (q(x) \cdot \xi_1(x)) dx = \frac{L^5}{\pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( \frac{\pi^4}{12} - \pi^2 + 4 \right). \quad (43)$$

$$f_2 = \int_0^L (q(x) \cdot \xi_2(x)) dx = \frac{L^6}{\pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( \frac{\pi^4}{20} - \pi^2 + 6 \right), \quad (44)$$

dando origem ao sistema de equações lineares, apresentado na Equação 45.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot L^3 & \frac{1}{2} \cdot L^4 \\ \frac{3}{2} \cdot L^4 & \frac{6}{5} \cdot L^5 \end{bmatrix}^T}_{[K]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}}_{\{\alpha\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{L^5}{\pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( \frac{\pi^4}{12} - \pi^2 + 4 \right) \\ \frac{L^6}{\pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( \frac{\pi^4}{20} - \pi^2 + 6 \right) \end{Bmatrix}}_{\{F\}}. \quad (45)$$

Resolvendo o sistema de equações lineares e substituindo-se os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  na Equação 31 chega-se a função aproximativa para os deslocamentos, dada pela Equação 46.

$$Vap_2(x) = \underbrace{\frac{L^2}{2 \cdot \pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (12 \cdot \pi^2 + \pi^4 - 168)}_{\alpha_1} \cdot x^2 - \underbrace{\frac{L}{6 \cdot \pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (20 \cdot \pi^2 + \pi^4 - 240)}_{\alpha_2} \cdot x^3. \quad (46)$$

Este procedimento é utilizado para a determinação de todas as demais soluções aproximadas, sendo apresentado neste item apenas com o intuito de permitir uma melhor compreensão da sistematização envolvida na metodologia de obtenção destas funções.

O erro encontrado nesta aproximação é de 38,422%.

#### Aproximação C: Polinômio de Grau 4

A função deslocamentos para esta aproximação é apresentada na Equação 47.

$$Vap_3(x) = -\frac{L^2}{2 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (30 \cdot \pi^4 - 3360 \cdot \pi^2 - \pi^6 + 30240) \cdot x^2 + \frac{L}{6 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (120 \cdot \pi^4 - 11520 \cdot \pi^2 - \pi^6 + 100800) \cdot x^3 - \frac{35}{4 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^4 - 84 \cdot \pi^2 + 720) \cdot x^4 \quad (47)$$

O erro encontrado nesta aproximação é de 1,206%.

#### Aproximação D: Polinômio de Grau 5

A função deslocamentos é apresentada na Equação 48.

$$Vap_4(x) = \frac{L^2}{1097282 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (3324745560 \cdot \pi^2 - 24688740 \cdot \pi^4 + 548641 \cdot \pi^6 - 30416480640) \cdot x^2 - \frac{L}{3291846 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (11060496720 \cdot \pi^2 - 92171100 \cdot \pi^4 + 548641 \cdot \pi^6 - 99544435200) \cdot x^3 - \frac{70}{548641 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (91439 \pi^4 - 9875328 \cdot \pi^2 + 87780600) \cdot x^4 - \frac{126}{2743205 \cdot \pi^7 \cdot E \cdot I_Z \cdot L} \cdot (\pi^4 - 180 \cdot \pi^2 + 1680) \cdot x^5. \quad (48)$$

O erro encontrado nesta aproximação é de 2,252%.

**Aproximação E: Polinômio de Grau 6**

A função deslocamentos é apresentada na Equação 49.

$$\begin{aligned}
 Vap_5(x) = & \frac{L^2}{2 \cdot \pi^9 \cdot E \cdot I_z} \cdot (66360 \cdot \pi^4 - 5700240 \cdot \pi^2 - 105 \cdot \pi^6 + \pi^8 + \\
 & 49896000) \cdot x^2 - \frac{L}{6 \cdot \pi^9 \cdot E \cdot I_z} \cdot (653520 \cdot \pi^4 - 53524800 \cdot \pi^2 + 1120 \cdot \pi^6 + \pi^8 + \\
 & 465696000) \cdot x^3 + \frac{315}{\pi^9 \cdot E \cdot I_z} \cdot (544 \cdot \pi^4 - 42720 \cdot \pi^2 - \pi^6 + 369600) \cdot x^4 + \quad (49) \\
 & \frac{1}{\pi^9 \cdot E \cdot I_z \cdot L} \cdot (9737280 \cdot \pi^2 - 128520 \cdot \pi^4 + 252 \cdot \pi^6 - 83825280) \cdot x^5 + \\
 & \frac{77}{\pi^9 \cdot E \cdot I_z \cdot L^2} \cdot (480 \cdot \pi^4 - 35280 \cdot \pi^2 - \pi^6 + 302400) \cdot x^6 .
 \end{aligned}$$

O erro encontrado nesta aproximação é de 0,040%.

A Figura 3 ilustra as aproximações geradas pelo Método Galerkin juntamente com a solução exata do problema.

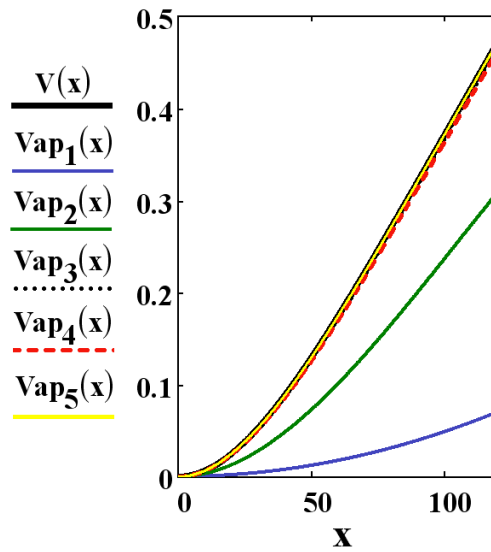


Figura 3 – Aproximações pelo Método de Galerkin.

A Figura 4 confronta o erro das aproximações obtidas no Método de Galerkin com os polinômios utilizados.

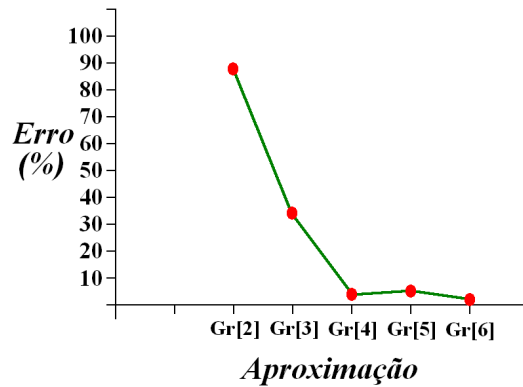


Figura 4 – Erro  $\times$  grau do polinômio para o Método de Galerkin.

## 5.2 Aproximações pelo método dos mínimos quadrados

Neste método a precisão desejada foi alcançada utilizando-se polinômios de graus 2, 3 e 4, dando origem as aproximações A, B e C, respectivamente.

### Aproximação A: Polinômio de Grau 2

A Equação 50 apresenta a função dos deslocamentos, sendo o erro encontrado nesta aproximação igual a 47,761%.

$$Vap_1(x) = \frac{L^2}{4 \cdot \pi^3 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^4 - 4) \cdot x^2. \quad (50)$$

### Aproximação B: Polinômio de Grau 3

A Equação 51 apresenta a função dos deslocamentos, sendo o erro encontrado nesta aproximação igual a 3,842%.

$$Vap_2(x) = \frac{L^2}{2 \cdot \pi^3 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^2 - 2) \cdot x^2 - \frac{L}{6 \cdot \pi \cdot E \cdot I_Z} \cdot x^3. \quad (51)$$

### Aproximação C: Polinômio de Grau 4

A Equação 52 apresenta a função dos deslocamentos, sendo o erro encontrado nesta aproximação igual a 0,004%.

$$Vap_3(x) = -\frac{L^2}{2 \cdot \pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^4 - 12 \cdot \pi^2 + 120) \cdot x^2 - \frac{L}{6 \cdot \pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^4 - 60 \cdot \pi^2 + 720) \cdot x^3 - \frac{5}{\pi^5 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi^2 - 12) \cdot x^4. \quad (52)$$

A Figura 5 ilustra as aproximações geradas pelo Método de Mínimos Quadrados juntamente com a solução exata do problema.

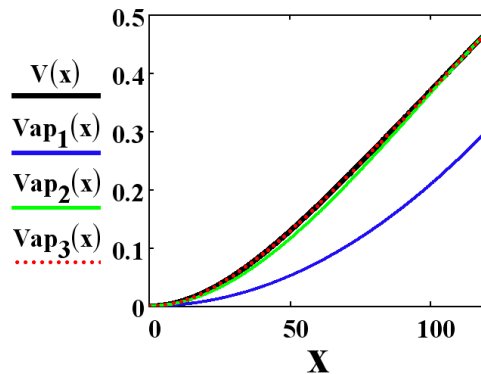


Figura 5 – Aproximações pelo Método dos Mínimos Quadrados.

A Figura 6 confronta o erro das aproximações obtidas no Método dos Mínimos Quadrados com os polinômios utilizados.

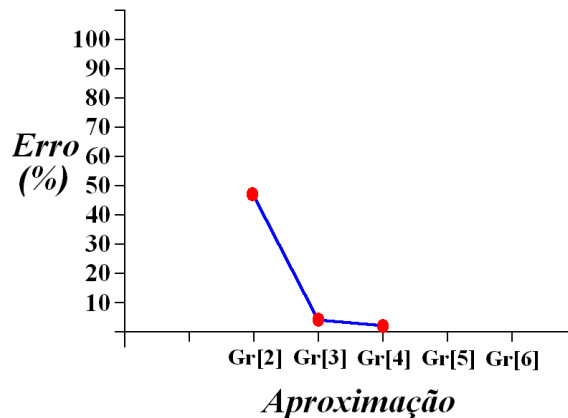


Figura 6 – Erro  $\times$  grau do polinômio para o Método dos Mínimos Quadrados.

### 5.3 Aproximações pelo método da colocação

Neste método a precisão desejada foi alcançada utilizando-se polinômios de graus 2, 3, 4, 5 e 6, dando origem às aproximações *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, respectivamente. Cabe ressaltar que os pontos no domínio da viga foram escolhidos criteriosamente, evitando-se a nulidade da função  $q(x)$ .

#### Aproximação A: Polinômio de Grau 2

O ponto de colocação adotado nesta aproximação é  $x = L/2$ . Os valores de  $k$  e  $f$  são apresentados nas Equações 53 e 54.

$$k = \frac{d^2}{dx^2} [\xi(x)] \Big|_{\frac{L}{2}} = 2 \quad . \quad (53)$$

$$f = q(x) \Big|_{\frac{L}{2}} = \frac{L^2 \cdot (\pi - 2)}{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \quad . \quad (54)$$

A função de deslocamentos obtida é apresentada na Equação 55, sendo o erro encontrado igual a 68,081%.

$$Vap_1(x) = \frac{L^2 \cdot (\pi - 2)}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot x^2 \quad . \quad (55)$$

### Aproximação B: Polinômio de Grau 3

Os pontos de colocação adotados nesta aproximação são  $x_1 = L/4$  e  $x_2 = L/2$ . Os valores dos coeficientes  $k$  e  $f$  são apresentados nas Equações 56 a 61.

$$k_{11} = \frac{d^2}{dx^2} [\xi_1(x)] \Big|_{x_1} = 2 \quad . \quad (56)$$

$$k_{12} = \frac{d^2}{dx^2} [\xi_1(x)] \Big|_{x_2} = 2 \quad . \quad (57)$$

$$k_{21} = \frac{d^2}{dx^2} [\xi_2(x)] \Big|_{x_1} = \frac{3 \cdot L}{2} \quad . \quad (58)$$

$$k_{22} = \frac{d^2}{dx^2} [\xi_2(x)] \Big|_{x_2} = 3 \cdot L \quad . \quad (59)$$

$$f_1 = q(x) \Big|_{x_1} = -\frac{L^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \pi)}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \quad . \quad (60)$$

$$f_2 = q(x) \Big|_{x_2} = \frac{L^2 \cdot (\pi - 2)}{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \quad . \quad (61)$$

Montando e resolvendo o sistema de equações lineares constrói-se a função deslocamentos, expressa pela Equação 62.

$$Vap_2(x) = \frac{L^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi - \sqrt{2} + 1) \cdot x^2 - \frac{L}{6 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi - 2 \cdot \sqrt{2} + 4) \cdot x^3 \quad . \quad (62)$$

O erro encontrado nesta aproximação é igual a 7,784%.

#### Aproximação C: Polinômio de Grau 4

Os pontos de colocação adotados nesta aproximação são  $x_1 = L/8$ ,  $x_2 = L/4$  e  $x_3 = L/2$ .

A Equação 63 apresenta a função dos deslocamentos, sendo o erro encontrado nesta aproximação igual a 0,387%.

$$\begin{aligned} Vap_3(x) = & \frac{L^2}{6 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (3 \cdot \pi - 4 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 3 \cdot \sqrt{2} - 1) \cdot x^2 - \\ & \frac{L}{6 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (\pi - 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 10 \cdot \sqrt{2} - 4) \cdot x^3 - \\ & \frac{4}{9 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} - 3 \cdot \sqrt{2} + 2) \cdot x^4. \end{aligned} \quad (63)$$

#### Aproximação D: Polinômio de Grau 5

Os pontos de colocação adotados nesta aproximação são  $x_1 = L/16$ ,  $x_2 = L/8$ ,  $x_3 = L/4$  e  $x_4 = L/2$ .

A Equação 64 apresenta a função dos deslocamentos, sendo o erro encontrado nesta aproximação igual a 0,509%.

$$\begin{aligned} Vap_4(x) = & \frac{L^2}{42 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (21 \cdot \pi - 64 \cdot \text{sen}(\pi/16) + 28 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} - 7 \cdot \sqrt{2} + 1) \cdot x^2 - \\ & \frac{L}{18 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (3 \cdot \pi - 128 \cdot \text{sen}(\pi/16) + 88 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} - 26 \cdot \sqrt{2} + 4) \cdot x^3 - \\ & \frac{4}{9 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot (32 \cdot \text{sen}(\pi/16) - 26 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 11 \cdot \sqrt{2} - 2) \cdot x^4 + \\ & \frac{1}{105 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z \cdot L} \cdot (1024 \cdot \text{sen}(\pi/16) - 896 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 448 \cdot \sqrt{2} - 128) \cdot x^5. \end{aligned} \quad (64)$$

#### Aproximação E: Polinômio de Grau 6

Os pontos de colocação adotados nesta aproximação são  $x_1 = L/32$ ,  $x_2 = L/16$ ,  $x_3 = L/8$ ,  $x_4 = L/4$  e  $x_5 = L/2$ .

A Equação 65 apresenta a função dos deslocamentos, sendo o erro encontrado nesta aproximação igual a 0,017%.

$$\begin{aligned}
Vap_5(x) = & \frac{L^2}{630 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( 315 \cdot \pi + 960 \cdot \text{sen}(\pi/16) - 1024 \cdot \text{sen}(\pi/32) - 140 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} + 15 \cdot \sqrt{2} - 1 \right) \cdot x^2 + \\
& \frac{L}{126 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( 2084 \cdot \text{sen}(\pi/32) - 2944 \cdot \text{sen}(\pi/16) - 21 \cdot \pi + 504 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} - 58 \cdot \sqrt{2} + 4 \right) \cdot x^3 - \\
& \frac{4}{27 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z} \cdot \left( 512 \cdot \text{sen}(\pi/32) - 864 \cdot \text{sen}(\pi/16) + 202 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} - 27 \cdot \sqrt{2} + 2 \right) \cdot x^4 + \\
& \frac{1}{105 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z \cdot L} \cdot \left( 16384 \cdot \text{sen}(\pi/32) - 29696 \cdot \text{sen}(\pi/16) + 8064 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} - 1472 \cdot \sqrt{2} + 128 \right) \cdot x^5 - \\
& \frac{1}{4725 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_Z \cdot L^2} \cdot \left( 524288 \cdot \text{sen}(\pi/32) - 983040 \cdot \text{sen}(\pi/16) + 286720 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} - 61440 \cdot \sqrt{2} + 8192 \right) \cdot x^6. \quad (65)
\end{aligned}$$

A Figura 7 ilustra as aproximações geradas pelo Método da Colocação juntamente com a solução exata do problema.

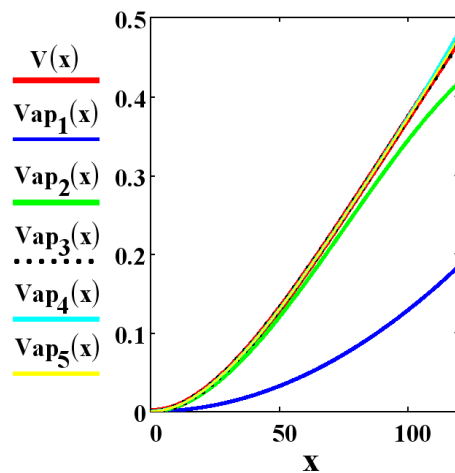


Figura 7 – Aproximações pelo Método da Colocação.

A Figura 8 confronta o erro das aproximações obtidas no Método da Colocação com os polinômios utilizados.



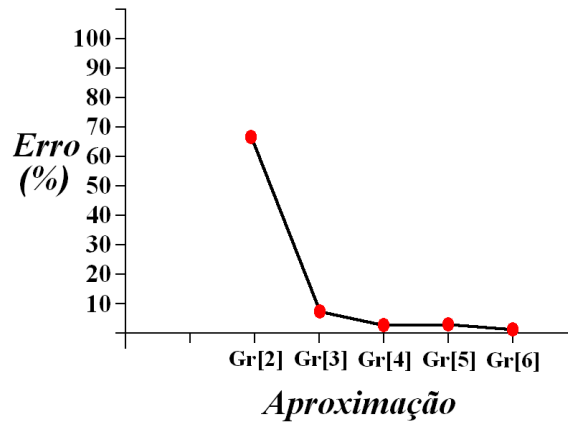


Figura 8 – Erro  $\times$  grau do polinômio para o Método da Colocação.

## Conclusões

Em vista aos resultados encontrados nas aproximações, o Método de Mínimos Quadrados foi o mais eficiente, em virtude da precisão ter sido atingida com o uso de um polinômio de quarta ordem, uma vez que no Método de Galerkin e da Colocação foram necessários polinômios do sexto grau. Vale ressaltar que estes métodos numéricos requerem a resolução de sistemas de equações, implicando no surgimento de erros advindos da própria estratégia numérica utilizada para resolvê-los assim como os de arredondamento.

Como visto, a precisão de cada método depende fortemente da escolha das funções aproximativas. Esta problemática é contornada mediante a estratégia de subdivisão do domínio do problema. O emprego deste método em programas de computador permite a obtenção de soluções cada vez melhores à medida em que são aumentadas a quantidade de subdomínios (refinamento de malha), ficando a qualidade das aproximações menos dependentes das funções adotadas. Em contrapartida, o refinamento da malha requer a resolução de sistemas de equações cada vez maiores, exigindo maior esforço computacional.

A abordagem utilizada na apresentação e emprego dos Métodos de Resíduos Ponderados os tornam mais atraentes, uma vez que estes se encontram inseridos em textos de análise numérica envolvendo a resolução de equações e sistemas de equações diferenciais parciais, requerendo para tanto, o conhecimento prévio sobre equações diferenciais parciais, além do grande rigor e formalismo matemático comumente utilizados nos trabalhos científicos.

Pela simplicidade na compreensão e facilidade no emprego, os Métodos de Resíduos Ponderados se apresentam como boa alternativa na resolução aproximada, do caso analisado, para determinação dos deslocamentos.

CHRISTOFORO, A. L.; ROCCO LAHR, F. A. Use of the weighted residuals method in displacement of beams. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.2, p.204-221, 2011.

- **ABSTRACT:** *Many phenomena in physics, engineering and other areas of science are interpreted and assessed by means of differential equations. In the mechanics of deformable solids, the determination of displacements in beams requires the resolution of ordinary differential equations, being the FEM and the FDM the Numerical strategies more used. This paper presents and employ three versions of the Weighted Residuals Method in a problem of beam, with known analytical solution, allowing assess the accuracy of both.*
- **KEYWORDS:** Beams; weighted residuals method; Galerkin method; collocation method; least squares method.

## Referências

- BARSOUM, R. S. Finite element method applied to the problem of stability of a non-conservative system. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Chichester, v.3, p.63-87, 1971
- FINLAYSON, B. A.; SCRIVEN, L. E. The method of weighted residuals. A review. *Appl. Mech. Rev.*, Easton, v.19, n.9, p.735-748, 1966.
- FLETCHER, C. A. J. An improved finite element formulation derived from the method of weighted residuals. *Comp. Methods Appl. Mechanics Eng.*, Chichester, v.15, p.207-220, 1978.
- PINA, H. *Métodos numéricos*. Lisboa: Escolar, 2010. 888p.
- PRATHAP, G. A variational basis for Barlow points. *Comput. Struct.*, Oxford, v.49, n.2, p.381-383, 1993.
- PRATHAP, G. The Variationally correct rate of convergence for a two-nodel beam element, or why residual bending flexibility correction is a extravariational trick. *Commun. Numer. Methods Eng.*, Bognor Regis, v.11, p.403-407, 1995.
- REISSNER, E. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.*, New York, v.29, n.2, p.90-95, 1950.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; NAKAZAWA, S. On variational formulation and its modification for numerical solution. *Comput. Struct.*, Oxford, v.19, n.1-2, p.303-313, 1984.

Recebido em 24.01.2011

Aprovado após revisão em 14.07.2011