

ALGUMAS PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA GUMBEL TIPO I COM UMA APLICAÇÃO A DADOS DE PRECIPITAÇÃO PLUVIOMÉTRICA

Jailson de Araujo RODRIGUES¹
Ana Paula Coelho Madeira SILVA¹
Lucas Monteiro CHAVES²
Walther Castellares CÁCERES³

- RESUMO: As distribuições exponenciais bivariadas têm sido utilizadas com sucesso na modelagem de processos hidrológicos. Neste trabalho, são deduzidas as distribuições exatas das importantes variáveis hidrológicas $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ juntamente com seus respectivos momentos quando X e Y seguem o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I. Os resultados obtidos são aplicados na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.
- PALAVRAS-CHAVE: Distribuição exponencial bivariada Gumbel tipo I; soma de variáveis aleatórias; produto de variáveis aleatórias; quociente de variáveis aleatórias; momentos; modelagem hidrológica.

1 Introdução

A distribuição exponencial é certamente uma das mais utilizadas na análise de frequência em hidrologia (Zelenhasic e Salvai (1987); Wijayaratne e Golub (1991); Wilkinson *et al.* (1998); Kjeldsen *et al.* (2000); Tate e Freeman (2000), Bonta (2001, 2004), Nadarajah (2007a)). A simples análise unidimensional fornece informações limitadas do evento, não sendo suficiente para descrevê-lo em sua plenitude.

¹Universidade Federal de Lavras – UFLA, Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: jailsondearaujo@yahoo.com.br apcmadeira@hotmail.com

²Universidade Federal de Lavras – UFLA, Departamento de Ciências Exatas – DEX, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: lucas@dex.ufla.br

³Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Estatística – ICEx, Caixa Postal 702, CEP: 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. E-mail: fredy@est.ufmg.br

A dependência entre variáveis exponenciais surge em diversas áreas aplicadas, incluindo, hidrologia e análise de sobrevivência. Os fenômenos apresentam-se com natureza multidimensional, exigindo o uso de modelos correlacionados. Nadarajah e Gupta (2006a), por exemplo, utilizaram a distribuição exponencial bivariada de Friday e Patil (1977) para descrever duração de períodos de seca e o período contíguo sem ocorrência de secas, eventos evidentemente correlacionados.

Dentre todos os modelos exponenciais bivariados existentes na literatura, um dos mais simples e flexíveis é o modelo Gumbel tipo I cuja função densidade de probabilidade (fdp) conjunta é dada a seguir:

$$f(x, y) = [(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta] \exp[-(x + y + \theta xy)] \quad (1)$$

em que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$. As fdps marginais de X e de Y têm distribuição exponencial; Balakrishnan e Lai (2009) apresentam propriedades e aplicações desse modelo.

Nas Figuras 1 e 2 são apresentadas as superfícies Gumbel tipo I.

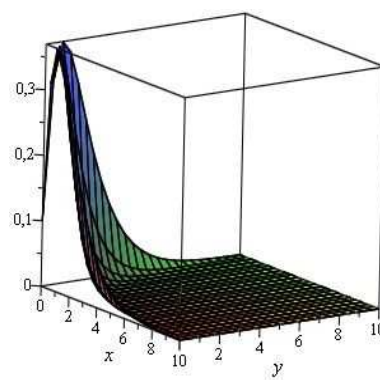
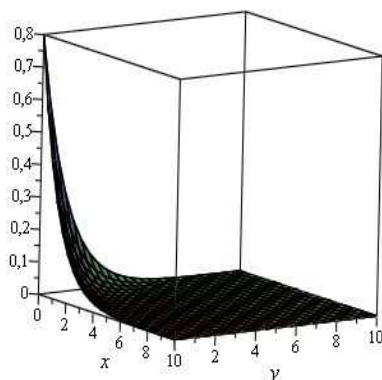


Figura 1 - Fdp Gumbel tipo I, $\theta = 0,2$. Figura 2 - Fdp Gumbel tipo I, $\theta = 0,9$.

Combinações de variáveis do tipo $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ são importantes no estudo de processos hidrológicos (Nadarajah (2005), Nadarajah e Gupta (2006a,2006b,2006c), Nadarajah e Kotz (2006)). Por exemplo, se X representa o período de seca e Y o período contíguo sem ocorrência de seca, $U = X + Y$ denota o período climático e $Q = X/(X + Y)$ a proporção da seca (Nadarajah (2007b, 2009), Nadarajah e Gupta (2006d)). Se X representa o período de seca e Y sua intensidade, a variável aleatória $P = XY$ denota a magnitude da seca (Nadarajah e Gupta(2006c)). Dessa forma, é importante que as distribuições de U , P e Q sejam totalmente caracterizadas.

O objetivo do trabalho é deduzir a distribuição exata das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo exponencial bivariado

Gumbel tipo I. Na seção 2 são deduzidas as fdps exatas dessas variáveis, na seção 3 são deduzidos seus respectivos momentos e na seção 4 é feita uma aplicação do modelo na análise de precipitações ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.

Os cálculos envolvidos incluem o uso de várias funções especiais como a função gama incompleta dada por:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (2)$$

a função gama incompleta complementar dada por:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (3)$$

a função exponencial integral dada por:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt \quad (4)$$

a função cilíndrica parabólica dada por:

$$D_a(x) = \frac{2^{a/2} \exp(-x^2/4)}{\Gamma(-a/2)} \int_0^\infty t^{-(1+a/2)} (1+t)^{-(1+a/2)} \exp(-x^2 t/2) dt \quad (5)$$

a função de Bessel modificada tipo III definida a seguir:

$$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^m}{2^m \Gamma(m+1/2)} \int_1^\infty (t^2-1)^{m-1/2} \exp(-xt) dt \quad (6)$$

e a função de Kummer definida por:

$$\Psi(\alpha, \beta; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1} \exp(-xt) dt. \quad (7)$$

As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Oldham *et al.* (2009) e Prudnikov *et al.* (1998). Serão utilizados os dois importantes lemas:

Lema 1.1. (Equação 2.3.16.1, Prudnikov *et al.* (1998), volume 1). Se $q > 0$,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-rx - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{r}\right)^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{rq}).$$

Lema 1.2. (Equação 2.3.15.1, Prudnikov *et al.* (1998), volume 1). Se $r > 0$,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-rx^2 - qx) dx = \Gamma(\alpha) (2r)^{-\alpha/2} \exp\left(\frac{q^2}{8r}\right) D_{-\alpha}\left(\frac{q}{\sqrt{2r}}\right).$$

2 Funções densidade de probabilidade

Nos teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 são deduzidas as fdps das variáveis $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ quando X e Y seguem o modelo (1).

Teorema 2.1. *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:*

$$f_U(u) = [u(1-\theta) + \theta u^2] \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+1)}}{j!} \gamma(2j+1, \theta u^2) + \\ + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^{-(j+2)}}{j!} \left[\gamma(2j+2, \theta u^2) - \frac{\gamma(2j+3, \theta u^2)}{\theta u^2} \right]$$

em que $u > 0$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Demonstração: Sob o modelo (1) a fdp conjunta das variáveis $U = X + Y$ e $Q = X/(X + Y)$ é:

$$f(u, q) = [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u]. \quad (8)$$

Desse modo, a fdp de U pode ser expressa por:

$$f_U(u) = \int_0^1 [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp[\theta(uq)^2 - \theta u^2 q - u] dq \\ = \int_0^1 [u(1-\theta) + \theta u^2 + \theta^2 u^3 q(1-q)] \exp(-\theta u^2 q - u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta q^2 u^2)^j}{j!} dq \\ = u(1-\theta + \theta u) \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2j+1}} \int_0^{\theta u^2} t^{2j} \exp(-t) dt \right] + \\ + \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2(j+1)}} \int_0^{\theta u^2} t^{2j+1} \exp(-t) dt \right] - \\ - \theta^2 u^3 \exp(-u) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta u^2)^j}{j!} \left[\frac{1}{(\theta u^2)^{2j+3}} \int_0^{\theta u^2} t^{2(j+1)} \exp(-t) dt \right].$$

Nos cálculos acima foi efetuada a mudança de variável $t = \theta u^2 q$. O resultado segue da aplicação da definição (2). ■

A Figura 3 ilustra a forma da fdp de U para diferentes valores de θ .

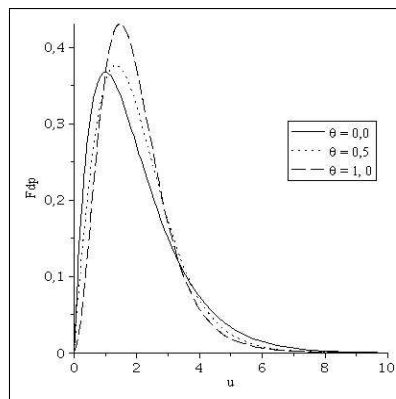


Figura 3 - Fdp de $U = X + Y$.

Teorema 2.2. Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:

$$f_P(p) = 2 \left[(1 + \theta^2 p - \theta) K_0(2\sqrt{p}) + 2\theta\sqrt{p} K_1(2\sqrt{p}) \right] \exp(-\theta p)$$

em que $p > 0$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Demonstração: De (1) temos que a fdp conjunta de X e $P = XY$ é:

$$f(x, p) = \left[\left(\frac{1}{x} + \theta \right) \left(1 + \frac{\theta p}{x} \right) + \frac{\theta}{x} \right] \exp \left[- \left(x + \frac{p}{x} + \theta p \right) \right] \quad (9)$$

A fdp da variável P é da forma:

$$\begin{aligned} f_P(p) &= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{x} + \theta \right) \left(1 + \frac{\theta p}{x} \right) - \frac{\theta}{x} \right] \exp \left[- \left(x + \frac{p}{x} + \theta p \right) \right] dx \\ &= \theta \exp(-\theta p) \left[\int_0^{\infty} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx + p \int_0^{\infty} x^{-2} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx \right] + \\ &\quad + (1 + \theta^2 p - \theta) \exp(-\theta p) \int_0^{\infty} x^{-1} \exp \left(-x - \frac{p}{x} \right) dx \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.1 a cada uma das parcelas, obtém-se:

$$f_P(p) = 2 \exp(-\theta p) \left[(1 + \theta^2 p - \theta) K_0(2\sqrt{p}) + \theta\sqrt{p} K_1(2\sqrt{p}) + \theta\sqrt{p} K_{-1}(2\sqrt{p}) \right]$$

O resultado segue da aplicação da propriedade de reflexão da ordem das funções de Bessel modificadas, ver Oldham *et al.* (2009). ■

Teorema 2.3. Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então

$$f_Q(q) = \frac{(1-\theta)}{2\theta q(1-q)} \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) D_{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right) + \frac{1}{2\theta q(1-q)} \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{8\theta q(1-q)}\right) \left[\frac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{q(1-q)}} D_{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right) + 3\theta D_{-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta q(1-q)}}\right) \right]$$

sendo que $1 > q > 0$ e $1 \geq \theta > 0$.

Demonstração: Usando (8), tem-se:

$$f_Q(q) = \int_0^\infty u[1 - \theta + \theta u + \theta^2 q(1-q)u^2] du \\ = (1-\theta) \int_0^\infty u \exp[-\theta q(1-q)u^2 - u] du + \theta \int_0^\infty u^2 \exp[-\theta q(1-q)u^2 - u] du + \\ + \theta^2 q(1-q) \int_0^\infty u^3 \exp[-\theta q(1-q)u^2 - u] du.$$

O teorema resulta da aplicação do Lema 1.2 em cada parcela da soma. ■

As Figuras 4 e 5 ilustram as formas das fdps de P e Q para diferentes valores de θ .

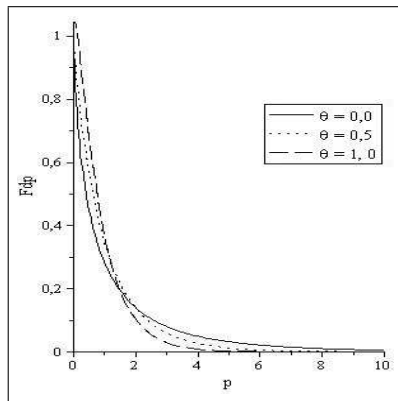


Figura 4 - Fdp de $P = XY$.

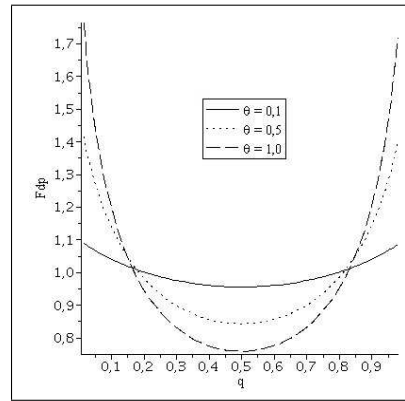


Figura 5 - Fdp de $Q = X/(X + Y)$.

3 Momentos

Nesta seção são deduzidos os momentos das variáveis $U = X + Y$ e $P = XY$ quando X e Y seguem o modelo (1).

Lema 3.1. *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:*

$$E(X^n Y^m) = \frac{m! n!}{\theta^{n+1}} \left[\Psi \left(n+1, n-m+2, \frac{1}{\theta} \right) + m \theta \Psi \left(n+1, n-m+1, \frac{1}{\theta} \right) \right]$$

para todos inteiros $n \geq 1$, $m \geq 1$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Demonstração: Partindo de (1), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^n y^m [(1+\theta x)(1+\theta y) - \theta] \exp[-(x+y+\theta xy)] dy dx \\ &= \int_0^\infty x^n \exp(-x) (1+\theta x) \int_0^\infty (y^m + \theta y^{m+1}) \exp[-(y+\theta xy)] dy dx - \\ &\quad - \int_0^\infty x^n \exp(-x) \int_0^\infty \theta y^m \exp[-(y+\theta xy)] dy dx \\ &= \int_0^\infty x^n \exp(-x) \left[\frac{\Gamma(m+1)}{(1+\theta x)^m} + \frac{\theta \Gamma(m+2)}{(1+\theta x)^{m+1}} - \frac{\theta \Gamma(m+1)}{(1+\theta x)^{m+1}} \right] dx \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{m! x^n}{(1+\theta x)^m} + \frac{\theta (m+1)! x^n}{(1+\theta x)^{m+1}} - \frac{\theta m! x^n}{(1+\theta x)^{m+1}} \right] \exp(-x) dx. \end{aligned}$$

O resultado segue da mudança de variáveis $v = \theta x$ e da aplicação de (7). ■

Teorema 3.2. *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1) então:*

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{\theta^{j+1}} \left[\Psi \left(j+1, 2j+2-n, \frac{1}{\theta} \right) + (n-j) \theta \Psi \left(j+1, 2j-n+1, \frac{1}{\theta} \right) \right]$$

para todo inteiro $n \geq 1$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Demonstração: O teorema resulta aplicação do Lema 3.1 juntamente com a seguinte propriedade:

$$E(U^n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E(X^j Y^{n-j})$$

■

Em particular,

$$\begin{aligned}
 E(U) &= \frac{1}{\theta} \left[\Psi \left(1, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(1, 0, \frac{1}{\theta} \right) \right] + \frac{1}{\theta^2} \Psi \left(2, 3, \frac{1}{\theta} \right) \\
 &= \frac{1}{\theta} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \left[\Gamma \left(0, \frac{1}{\theta} \right) + \Gamma \left(-1, \frac{1}{\theta} \right) \right] + 1 \\
 &= \frac{1}{\theta} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \left[Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) - Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \theta \exp \left(-\frac{1}{\theta} \right) \right] + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 E(U^2) &= \frac{2}{\theta} \left[\Psi \left(1, 0, \frac{1}{\theta} \right) + \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} \Psi \left(2, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 2\theta \Psi \left(1, -1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{2}{\theta^3} \Psi \left(3, 4, \frac{1}{\theta} \right) \\
 &= \frac{4}{\theta^2} \exp \left(\frac{2}{\theta} \right) \left[\Gamma \left(-1, \frac{1}{\theta} \right) + \Gamma \left(-2, \frac{1}{\theta} \right) \right] + \frac{2}{\theta} \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 2 \\
 &= \frac{2}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 2\theta^2 + 1 \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 E(U^3) &= \frac{6}{\theta^4} \left\{ \Psi \left(4, 5, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(3, 3, \frac{1}{\theta} \right) + \theta^2 \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{6}{\theta} \left[\Psi \left(1, -1, \frac{1}{\theta} \right) + 2\Psi \left(2, 0, \frac{1}{\theta} \right) + 3\theta \Psi \left(1, -2, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
 &= \frac{6}{\theta^3} \left\{ \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \left[2\Gamma \left(-2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\Gamma \left(-3, \frac{1}{\theta} \right) \right] + \theta \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + \theta^2 \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{18}{\theta^3} \Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) \\
 &= \frac{3}{\theta^2} \left[2\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 6\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 4\theta^2 + \theta - 1 \right] - \frac{3}{\theta^3} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 E(U^4) &= \frac{24}{\theta^2} \left\{ \Psi \left(2, 0, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \left[\Psi \left(1, -2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\Psi \left(2, -1, \frac{1}{\theta} \right) + 4\theta \Psi \left(1, -3, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{24}{\theta^4} \left\{ \Psi \left(4, 4, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \Psi \left(4, 3, \frac{1}{\theta} \right) + 2\theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{24}{\theta^5} \Psi \left(5, 6, \frac{1}{\theta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{48}{\theta^3} \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \theta \Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 2\Psi \left(4, 3, \frac{1}{\theta} \right) + \frac{\theta^3}{2} \right] \\
&\quad + \frac{24}{\theta^4} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \left[2\Gamma \left(-3, \frac{1}{\theta} \right) + 4\Gamma \left(-4, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
&= \frac{4}{\theta^4} \left\{ \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \theta \left[12\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 24\Psi \left(4, 3, \frac{1}{\theta} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{8}{\theta^3} \left[6\theta\Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 6\theta^3 + \theta^2 - \theta + 1 \right] \tag{13}
\end{aligned}$$

A variância (σ^2), o coeficiente de assimetria (α^3) e o coeficiente de curtose (α^4) de U podem ser calculados usando as relações:

$$\sigma^2 = E(U^2) - E^2(U) \tag{14}$$

$$\alpha^3 = \frac{E(U^3) - 3E(U)E(U^2) + 2E^3(U)}{(\sigma^2)^{3/2}} \tag{15}$$

$$\alpha^4 = \frac{E(U^4) - 4E(U)E(U^3) + 6E(U^2)E^2(U) - 3E^4(U)}{(\sigma^2)^2} \tag{16}$$

Teorema 3.3. *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (1), então:*

$$E(P^n) = \frac{(n!)^2}{\theta^{n+1}} \left[\Psi \left(n+1, 2, \frac{1}{\theta} \right) + n\theta\Psi \left(n+1, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right]$$

para todo inteiro $n \geq 1$ e $1 \geq \theta \geq 0$.

Demonstração: Imediata a partir do Lema 3.1. ■

Em particular,

$$\begin{aligned}
E(P) &= \frac{1}{\theta^2} \left[\Psi \left(2, 2, \frac{1}{\theta} \right) + \theta\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\theta^2} \left[\exp \left(\frac{1}{\theta} \right) \Gamma \left(-1, \frac{1}{\theta} \right) + \theta\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\theta^2} \exp \left(\frac{1}{\theta} \right) Ei \left(-\frac{1}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} \left[\Psi \left(2, 1, \frac{1}{\theta} \right) + 1 \right] \tag{17}
\end{aligned}$$

$$E(P^2) = \frac{4}{\theta^3} \left[\Psi \left(3, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 2\theta\Psi \left(3, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \tag{18}$$

$$E(P^3) = \frac{36}{\theta^4} \left[\Psi \left(4, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 3\theta\Psi \left(4, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \tag{19}$$

$$E(P^4) = \frac{576}{\theta^5} \left[\Psi \left(5, 2, \frac{1}{\theta} \right) + 4\theta \Psi \left(5, 1, \frac{1}{\theta} \right) \right] \quad (20)$$

A variância, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose de P podem ser calculados utilizando fórmulas análogas as expressões (14), (15) e (16), respectivamente.

4 Aplicação

Nesta seção é feita uma aplicação do modelo (1) na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Capela, Lagarto, Laranjeiras e São Cristóvão situadas no Estado de Sergipe.

Os dados explorados foram coletados em estações hidrometeorológicas do Centro de Meteorologia da Secretaria de Meio Ambiente e dos Recursos Hídricos do Estado de Sergipe (SEMARH), as coordenadas geográficas das estações são exibidas na Tabela 1. O conjunto de dados pode ser acessado livremente no endereço eletrônico: <http://www.semarh.se.gov.br/meteorologia/modules/tinyd0/index.php?id=50>. A base de dados corresponde as medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2010.

Tabela 1 - Localização das estações hidrometeorológicas

Cidade	Latitude	Longitude	Altitude
Capela	-10,53 ^o	-37,06 ^o	163m
Lagarto	-10,95 ^o	-37,64 ^o	163m
Laranjeiras	-10,81 ^o	-37,17 ^o	13m
São Cristóvão	-10,92 ^o	-37,20 ^o	30m

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtém-se os dados sobre período de dias com ocorrência de precipitações (X) e período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é determinar as distribuições das variáveis:

1. Período climático (U) = período de dias com precipitação (X) + período contíguo de dias sem precipitação (Y);
2. Proporção de dias com precipitação (Q) = período de dias com precipitação (X) / (período de dias com precipitação (X) + período contíguo de dias sem precipitação (Y)).

A premissa básica de existência de correlação entre os dados foi verificada através de teste de independência. A Tabela 2 mostra os p-valores originados do teste ρ de Spearman, ver Best e Roberts (1975). Os p-valores foram inferiores a 0,05 indicando que há evidências significativas de associação entre os dados. Os scatter plots do período de dias com precipitação versus o período contíguo de dias sem

precipitação para as cidades pesquisadas são apresentados na Figura 6 e evidenciam a existência de correlação negativa entre as variáveis.

Tabela 2 - p-valor do teste ρ de Spearman

Cidades	p-valor
Capela	0,0254
Lagarto	0,0417
Laranjeiras	0,0000
São Cristóvão	0,0292

Como o modelo (1) tem marginais exponencialmente distribuídas com parâmetro de escala unitário, os dados observados para X e Y sofreram uma transformação para corrigir a escala. A transformação utilizada foi $(X, Y) \rightarrow (C_1X, C_2Y)$, C_1 e C_2 são fatores de correção de escala:

$$C_1 = \frac{n}{\sum_{k=0}^n x_k} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{n}{\sum_{k=0}^n y_k}$$

O ajuste do modelo (1) foi feito pelo Método de Máxima verossimilhança. Os valores obtidos para $\hat{\theta}$ são exibidos na Tabela 3.

Tabela 3 - Estimativas do parâmetro θ

Cidades	$\hat{\theta}$
Capela	0,2518
Lagarto	0,2742
Laranjeiras	0,5082
São Cristóvão	0,4062

A qualidade de ajuste do modelo (1) foi verificada via gráficos de probabilidade. Para a variável X foi plotado o gráfico de $F_X(x_{(i)})$ versus $(i-0,375)/(n+0,25)$, ver Chambers et al. (1983), em que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de X e $x_{(i)}$ representa os valores amostrais de X em ordem crescente. Da mesma forma para Y foi plotado o gráfico de $F_Y(y_{(i)})$ versus $(i-0,375)/(n+0,25)$ em que $F_Y(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada de Y e $y_{(i)}$ representa os valores amostrais de Y em ordem crescente. Os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de X para as quatro cidades são visualizados na Figura 7. Na Figura 8 são exibidos os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de Y para as cidades estudadas.

Nas Figuras 9 e 10 são exibidas as fdps ajustadas de U e de Q para as quatro cidades pesquisadas.

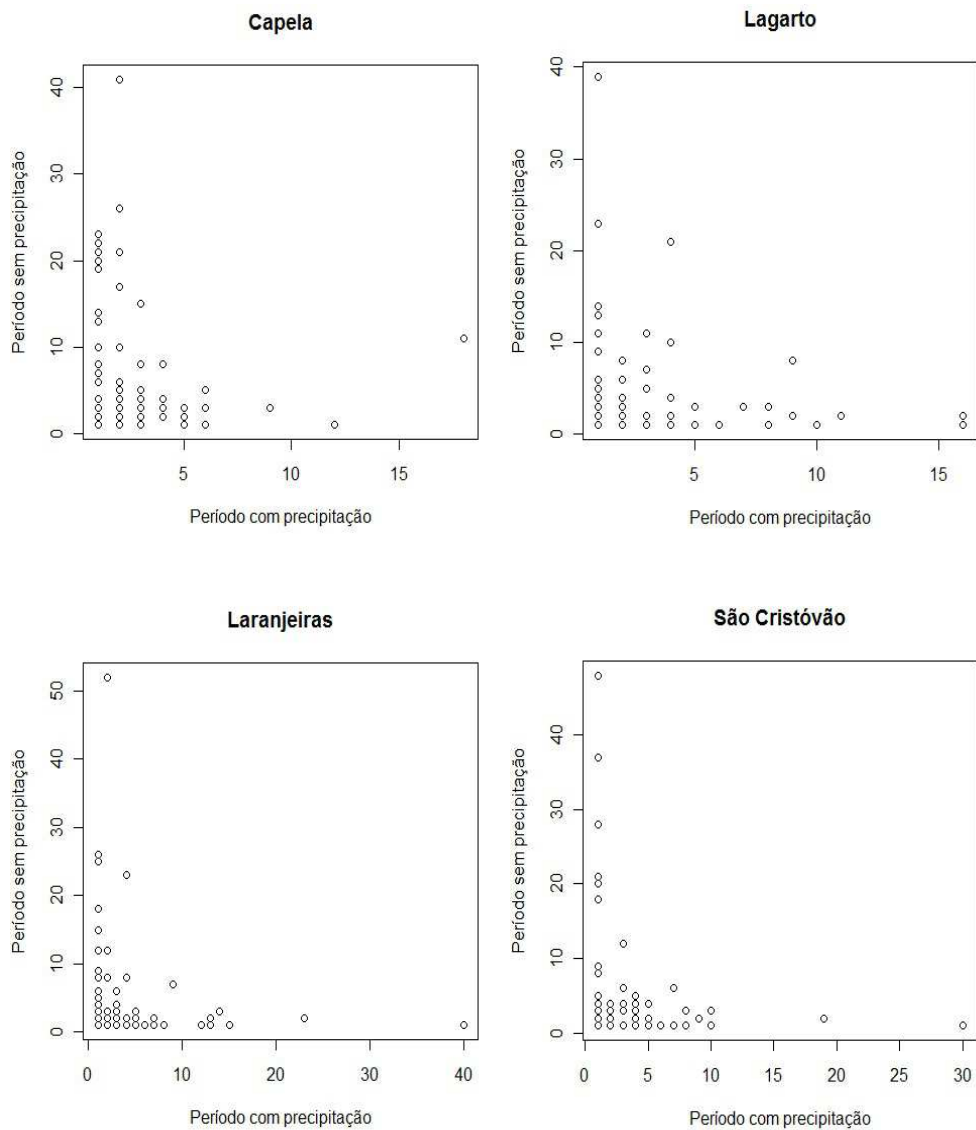


Figura 6 - Scatter plots do período com precipitação versus período sem precipitação para as quatro cidades estudadas.

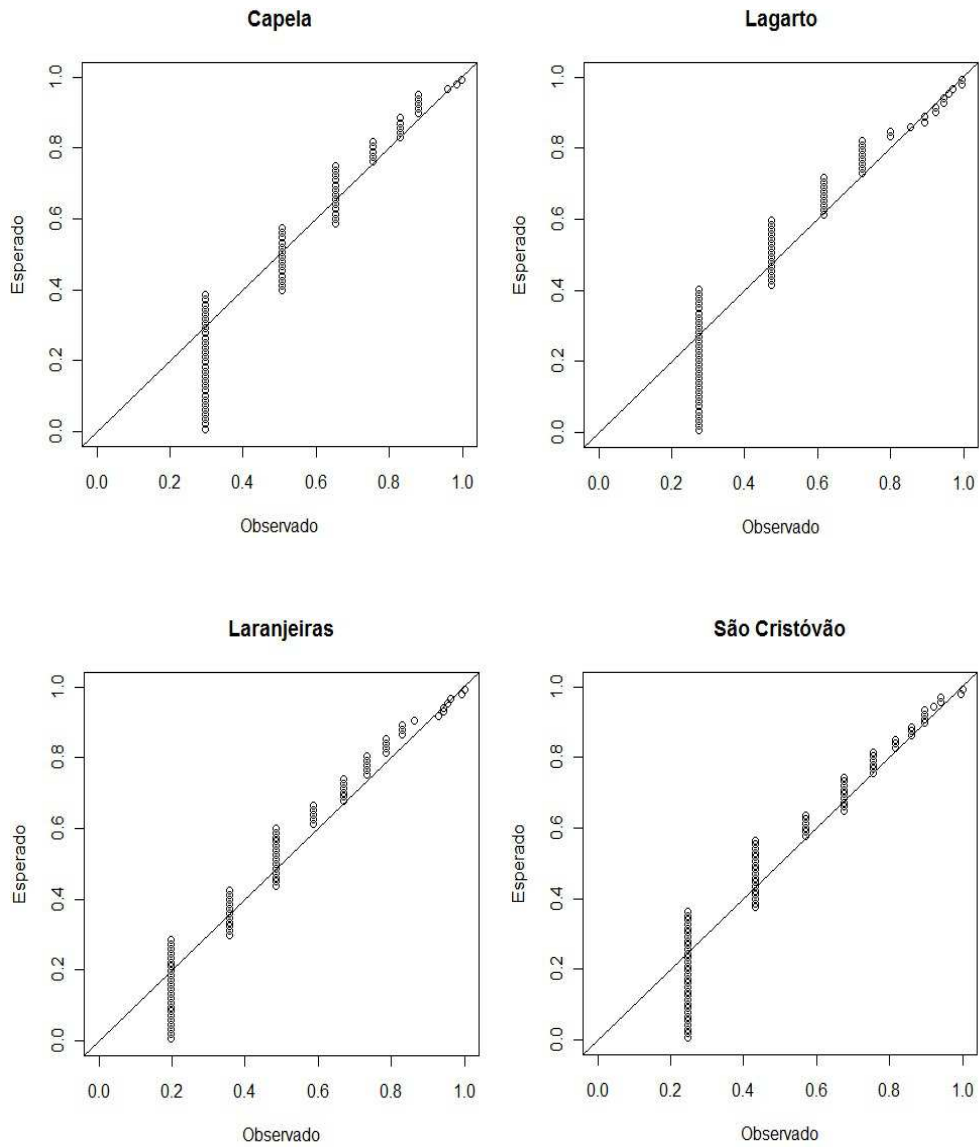


Figura 7 - Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para as quatro cidades estudadas.

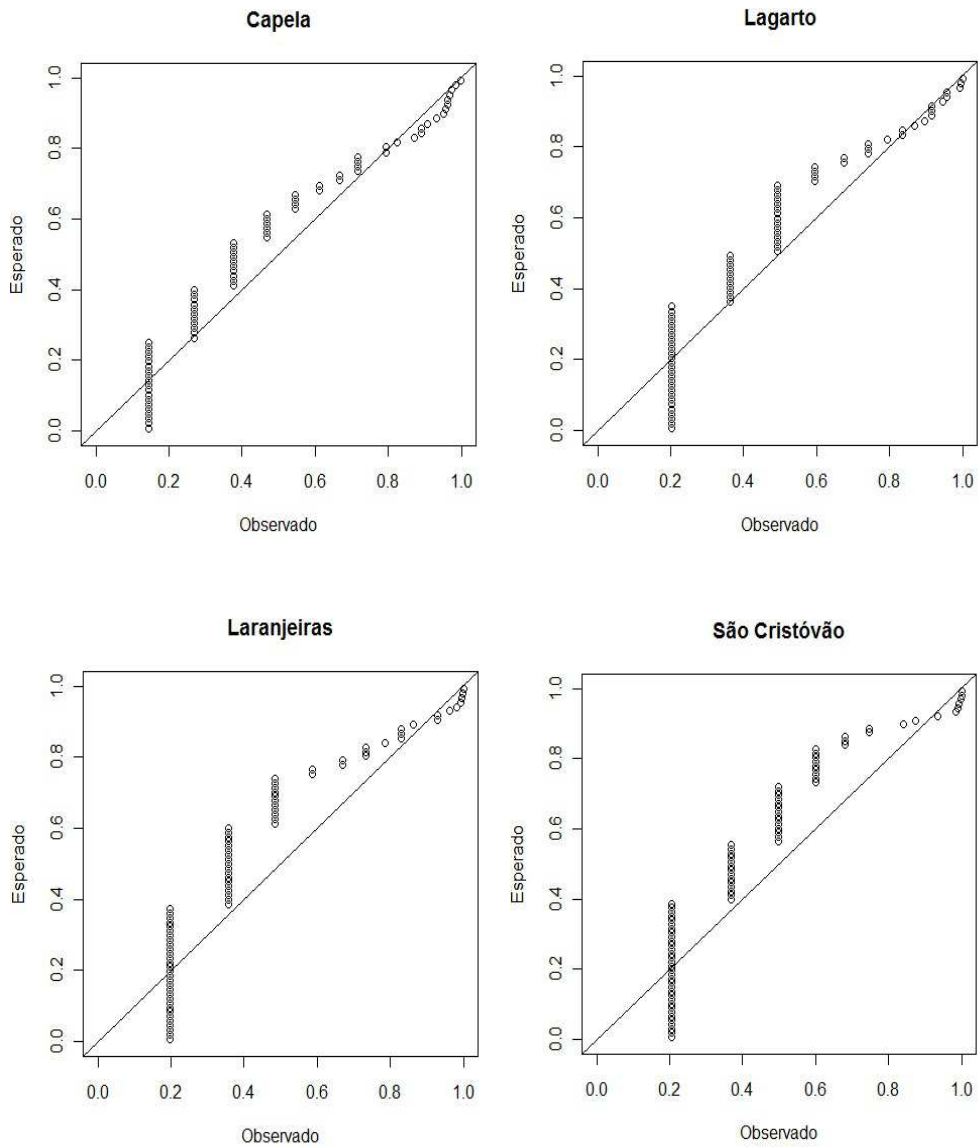


Figura 8 - Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para as quatro cidades estudadas.

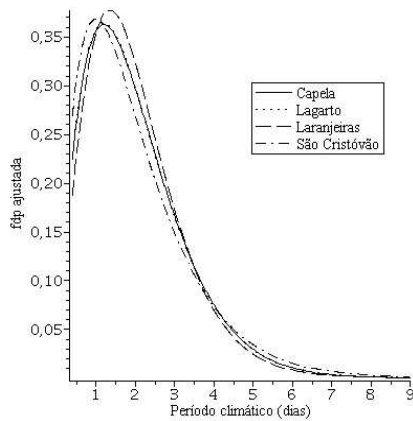


Figura 9 - Fdp de U para as cidades pesquisadas.

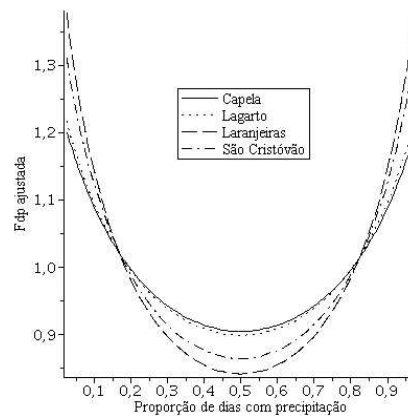


Figura 10 - Fdp de Q para as cidades pesquisadas.

Conclusões

Considerando que X e Y seguem o modelo exponencial bivariado Gumbel tipo I, foi possível deduzir as distribuições exatas e os momentos das variáveis aleatórias $U = X + Y$, $P = XY$ e $Q = X/(X + Y)$ utilizando funções especiais.

A aplicação do modelo na análise de dados de precipitações apresentou resultados satisfatórios.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenadoria para o Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de doutorado do primeiro autor e aos revisores pelas sugestões que contribuíram para o aprimoramento do artigo.

RODRIGUES, J. A.; SILVA, A.P.C. M.; CHAVES, L. M. Some properties of the Gumbel's type I bivariate exponential distribution with application to rainfall data. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.9, p.67-83, 2011.

- **ABSTRACT:** *Bivariate exponential distributions have been used successfully on modeling hydrological processes. In this work, supposing that X and Y follow the Gumbel's type I bivariate exponential model, we deduce the exact distributions of the functions $U = X + Y$, $P = XY$ and $Q = X/(X + Y)$, as well as their respective moments. The results are applied to the data analysis of rainfall occurred in cities in the state of Sergipe.*

- **KEYWORDS:** *Gumbel's type I bivariate exponential distribution; Sum of random variables; Product of random variables; Ratio of random variables; Moments; Hydrological modeling.*

Referências

- BALAKRISHNAN, N.; LAI, C. D. *Continuous Bivariate Distributions*, 2. ed., Canadá: Springer Verlag, 2009. 688p.
- BEST, D. J.; ROBERTS, D. E. Algorithm AS 89: The Upper Tail Probabilities of Spearman's rho. *Appl. Stat.*, v.24, p.377-379, 1975.
- BONTA, J. V. Characterizing and estimating spatial and temporal variability of times between storms. *Trans. ASAE*, v.44, p.1593-1601, 2001.
- BONTA, J. V. Stochastic simulation of storm occurrence, depth, duration, and within-storm intensities. *Trans. ASAE*, v.47, p.1573-1584, 2004.
- CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. *Graphical Methods for Data Analysis*, Boston: Duxbury Press, 1983, 395p.
- FRIDAY, D.S.; PATIL, G.P. A bivariate exponential model with applications to reliability and computer generation of random variables. In: *The Theory and Applications of Reliability*, C. P. Tsokos and I. N. Shimi (eds.). Academic Press: New York, vol.1, 1977. p.527-549.
- KJELDSEN, T. R.; LUNDORF, A.; ROSBJERG. Use Of a two-component exponential distribution in partial duration modelling of hydrological droughts in Zimbabwean rivers. *Journal Hydrol. Sci.*, v.45, p.285-298, 2000.
- NADARAJAH, S. Products, and ratios for a bivariate gamma distribution. *J. Appl. Math and Computing*, v.171, p.581-595, 2005.
- NADARAJAH, S. The bivariate gamma exponential distribution with application to drought data. *J. Appl. Math and Computing*, v.24, p.221-230, 2007a.
- NADARAJAH, S. A bivariate gamma for drought. *Water Resource Research*, v.43, W08501, 2007b.
- NADARAJAH, S. A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought data. *Journal of App. Stat.*, v.36, p.277-301, 2009.
- NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Friday and Patil's bivariate exponential distribution with application to drought data. *Water Resour Manage*, v.20, p.749-759, 2006a.
- NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Sums, products and ratios for Mackay's bivariate gamma distributions. *J. Appl. Math and Computing*, v.43 , p.185-193, 2006b.
- NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Intensity-duration models on bivariate gamma distributions. *Hiroshima Math Journal*, v.36 , p.3887-395, 2006c.

- NADARAJAH, S; GUPTA, A. K. Cheria's bivariate gamma distribution as a model for drought data. *Agrociencia*, v.40, p.483-490, 2006d.
- NADARAJAH, S; KOTZ, S. Sums, products and ratios for Downton's bivariate exponential distribution. *Stochastic Env. Res. Risk Assess*, v.20, p.164-170, 2006.
- OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator*. 2.ed., Canadá: Springer Verlag, 2009. 700p.
- PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series*, vol.1, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 808p.
- TATE, E. L.; FREEMAN, S. N. Three modelling approaches for seasonal streamflow in southern Africa: the use of censored data. *Hydrol. Sci. J.*, New York, v.45, p.27-42, 2000.
- WIJAYARATNE, L. H.; GOLUB, E. Multiyear drought simulation. *Water Res. Bull.*, v.27, p.387-395, 1991.
- WILKINSON, B. H.; DRIEDRICH, N. W.; DRUMMOND, C. N.; ROTHMAN, E. D. Michigan hochey, meteoric precipitation, and rhythmicity of accumulation on peritidal carbonate platforms. *Geol. Soc. Am. Bull.*, v.110, p.1075-1093, 1998.
- ZELENHASIC, E.; SALVAI, A. A method of streamflow drought analysis. *Water Resou. Res.*, v.23, p.156-168, 1987.

Recebido em 04.08.2011.

Aprovado após revisão em 19.10.2011.