

**UMA NOVA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA
CONSTRUÍDA A PARTIR DA CÓPULA DE GUMBEL-BARNETT
COM UMA APLICAÇÃO EM MODELAGEM DE PRECIPITAÇÕES
PLUVIOMÉTRICAS**

Jailson de Araujo RODRIGUES¹
Ana Paula Coelho Madeira SILVA¹
Lucas Monteiro CHAVES²
Fredy CASTELLARES³

- RESUMO: Os modelos exponenciais são muito utilizados na análise de processos hidrológicos. Nesse contexto, foi utilizada a cópula de Gumbel-Barnett para construir uma distribuição exponencial bivariada aplicada na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas em cidades do Estado de Sergipe. As principais propriedades dessa distribuição são deduzidas e as expressões obtidas fazem uso de várias funções especiais.
- PALAVRAS-CHAVE: Cópula de Gumbel-Barnett; distribuição exponencial bivariada; modelagem hidrológica.

1 Introdução

As cópulas foram inicialmente desenvolvidas por Sklar (1959), sua construção e propriedades tem sido extensivamente estudadas nos últimos 20 anos por vários autores sendo um dos campos mais ativos de pesquisa em teoria das distribuições. Hutchinson e Lai (1990) estão entre os primeiros autores que popularizaram seu

¹Universidade Federal de Lavras – UFLA, Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: *jailsondearaujo@yahoo.com.br* / *apcmadeira@hotmail.com*

²Universidade Federal de Lavras – UFLA, Departamento de Ciências Exatas – DEX, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: *lucas@dex.ufla.br*

³Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Estatística – ICEX, CEP: 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. E-mail: *fredy@est.ufmg.br*

estudo. Nelsen (2006), apresentou um tratado abrangente com os principais resultados sobre o tema.

O que são cópulas? Cópulas são transformações que a partir de distribuições univariadas formam distribuições multivariadas com um certo controle sobre os diversos tipos de coeficientes de correlação. As razões principais que tornam os trabalhos com cópulas interessantes na estatística são estudar medidas de dependência independente de escala e construção de famílias bivariadas. De fato, uma vez que permite separar os efeitos de dependência dos efeitos das distribuições marginais, a utilização de cópulas torna-se bastante vantajosa na análise de muitos fenômenos multidimensionais (Balakrishnan e Lai, 2009).

A utilização de cópulas em hidrologia é algo novo e certamente muitos resultados importantes ainda estão para serem descobertos ou derivados. Por exemplo, Zhang e Singh (2007), Chowdhary *et al.* (2010) e Ghosh (2010) utilizaram a teoria de cópulas para modelagem de precipitações; Shiau (2006), Shiau *et al.* (2007) e Kao e Govindaraju (2010) apresentaram o uso de cópulas como alternativa na modelagem de secas e Salvadori e De Michele (2006) estudaram a estrutura temporal de tempestades por meio de cópulas.

O objetivo deste artigo é construir uma distribuição bivariada utilizando cópula para analisar elementos da pluviometria de regiões. Em adicional, as principais propriedades dessa distribuição serão investigadas. Dados reais de precipitações são explorados utilizando os resultados obtidos.

O texto é organizado da seguinte forma: na seção 2 é construído o modelo bivariado utilizando uma cópula e são apresentadas algumas funções especiais empregas nos cálculos, na seção 3 são deduzidas as funções densidade de probabilidade condicionais e as funções de distribuição condicionais, na seção 4 são deduzidos os momentos, na seção 5 são deduzidas a função geradora de momentos e a função característica, na seção 6 são deduzidas as funções densidade de probabilidade das combinações de componentes exponenciais $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X + Y)$. Finalmente, na seção 7 o modelo é aplicado na análise de precipitações ocorridas em cidades do Estado de Sergipe.

2 Construção do modelo exponencial bivariado

O teorema de Sklar (1959) estabelece que se $F(x)$ e $F(y)$ são funções de distribuição (fds) univariadas e $C(u, v)$ é uma cópula, então a função:

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F(x), F(y)), \quad (1)$$

é uma função de distribuição (fd) bivariada com distribuições marginais $F(x)$ e $F(y)$. Reciprocamente, se $F_{X,Y}(x, y)$ é uma função de distribuição bivariada com distribuições marginais $F(x)$ e $F(y)$, então, existe uma cópula $C(u, v)$, $0 \leq u, v \leq 1$ tal que (1) vale. Além disso, se $F(x)$ e $F(y)$ são contínuas, C é única e tem representação:

$$C(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)),$$

Sob a hipótese que as distribuições marginais são contínuas com funções densidade de probabilidade (fdps) $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, a função densidade de probabilidade (fdp) conjunta pode ser escrita como:

$$f_{X,Y}(x,y) = c(F(x), F(y)) f_X(x) f_Y(y), \quad (2)$$

em que $c(u,v)$ é a densidade de C , dada por:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}.$$

Para a construção da distribuição bivariada, será utilizada a cópula de Gumbel-Barnett (Barnett, 1980), dada por:

$$C(u,v) = u + v - 1 + (1-u)(1-v) \exp[-\theta \log(1-u) \log(1-v)], \quad (3)$$

com fdp,

$$c(u,v) = \{-\theta + [1 - \theta \log(1-u)][1 - \theta \log(1-v)]\} \exp[-\theta \log(1-u) \log(1-v)]. \quad (4)$$

Considerando as distribuições $F_X(x) = 1 - \exp(-ax)$ e $F_Y(y) = 1 - \exp(-by)$ de duas variáveis aleatórias exponenciais X e Y de parâmetros a e b , respectivamente, obtém-se através de (1) e (3) a conjunta,

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 - \exp(-ax) - \exp(-by) + \exp[-(ax + by + \theta abxy)]. \quad (5)$$

Dessa forma, a densidade conjunta da distribuição bivariada acima é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = ab[(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \exp[-(ax + by + \theta abxy)]. \quad (6)$$

em que $0 < x$ e $0 < y$, os parâmetros $0 < a$ e $0 < b$ são de escala e $0 \leq \theta \leq 1$ é um parâmetro de dependência, quando $\theta = 0$ as variáveis X e Y são independentes.

Serão utilizadas nos cálculos algumas funções especiais como a função gama,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad (7)$$

a função gama incompleta,

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad (8)$$

a função cilíndrica parabólica,

$$D_\nu(x) = \frac{\exp(-x^2/4)}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty t^{-(\nu+1)} \exp[-(xt + t^2/2)] dt, \quad (9)$$

a função modificada de Bessel tipo I,

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu + 1)_k k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad (10)$$

a função de Macdonald,

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin(\nu\pi)}, \quad (11)$$

e a função hipergeométrica confluyente degenerada,

$$\Psi(\alpha, \beta; x) = \frac{\Gamma(\beta - 1)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha - \beta + 1)_k x^k}{(2 - \beta)_k k!} + \frac{\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k x^k}{(\beta)_k k!}, \quad (12)$$

em que $(z)_k = z(z + 1) \dots (z + k - 1)$ representa o fatorial ascendente. As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Oldham *et al.* (2009).

3 Fdps condicionais e fds condicionais

Nos Teoremas 3.1 e 3.2 são deduzidas as fdps condicionais e as fds condicionais correspondentes a distribuição (6).

Teorema 3.1. *Para a fdp (6), a fdp condicional de X dado Y = y pode ser expressa da seguinte forma:*

$$f_X(x | Y = y) = a [(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \exp[-a(1 + \theta by)x], \quad (13)$$

sendo que $0 < x$ e $0 < y$. A fdp condicional de Y dado X = x pode ser expressa da seguinte forma:

$$f_Y(y | X = x) = b [(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \exp[-b(1 + \theta ax)y], \quad (14)$$

sendo que $0 < x$ e $0 < y$.

Demonstração: Imediata, a partir da expressão (6) e do fato que $X \sim \text{Exp}(a)$ e $Y \sim \text{Exp}(b)$. ■

Teorema 3.2. *Para a fdp (6), a fd condicional de X dado Y = y pode ser expressa da seguinte forma:*

$$F_X(x | Y = y) = 1 - (1 + \theta ax) \exp[-a(1 + \theta by)x],$$

sendo que $0 < x$ e $0 < y$. A fd condicional de Y dado X = x pode ser expressa da seguinte forma:

$$F_Y(y | X = x) = 1 - (1 + \theta by) \exp[-b(1 + \theta ax)y],$$

sendo que $0 < x$ e $0 < y$.

Demonstração: Os resultados seguem utilizando (13) e (14), respectivamente, através de integração elementar. ■

4 Momentos

Nesta seção são deduzidos os momentos do produto XY quando X e Y tem distribuição dada por (6).

Lema 4.1. (Equação (2.3.6.9), Prudnikov (1986)). Se $0 < \text{Re}(\alpha)$, $0 < \text{Re}(p)$ e $|\arg(z)| < \pi$, então,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (x+z)^{-\rho} \exp(-px) dx = \Gamma(\alpha) z^{\alpha-\rho} \Psi(\alpha, \alpha+1-\rho; pz).$$

Teorema 4.2. Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$E(X^m Y^n) = \frac{n!m!}{\theta^{m+1} a^m b^n} \Psi(m+1, m-n+2; 1/\theta) + \frac{n!m!n}{(\theta a)^m b^n} \Psi(m+1, m-n+1; 1/\theta), \quad (15)$$

sendo que $1 \leq n$ e $1 \leq m$.

Demonstração: Usando (6) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= ab \int_0^\infty \int_0^\infty x^m y^n [(1+\theta ax)(1+\theta by) - \theta] \\ &\quad \times \exp[-(ax+by+\theta abxy)] dy dx \\ &= ab \int_0^\infty x^m \exp(-ax) \int_0^\infty [(1-\theta+\theta ax)y^n + \theta b(1+\theta ax)y^{n+1}] \\ &\quad \times \exp[-b(1+\theta ax)y] dy dx \\ &= ab \int_0^\infty x^m \exp(-ax) [(1-\theta+\theta ax)I_n + \theta b(1+\theta ax)I_{n+1}] dx, \end{aligned}$$

sendo que

$$I_k = \int_0^\infty y^k \exp[-b(1+\theta ax)y] dy \quad k = n, n+1. \quad (16)$$

A expressão (16) é resolvida efetuando a mudança de variável $t = b(1+\theta ax)y$ e aplicando a definição (7):

$$I_k = \frac{\Gamma(k+1)}{[b(1+\theta ax)]^{k+1}} = \frac{k!}{[b(1+\theta ax)]^{k+1}}. \quad (17)$$

Então,

$$\begin{aligned} E(X^n Y^m) &= abn! \int_0^\infty x^m \left[\frac{1+\theta ax+n\theta}{[b(1+\theta ax)]^{n+1}} \right] \exp(-ax) dx \\ &= \frac{an!}{b^n} \int_0^\infty x^m (1+\theta ax)^{-n} \exp(-ax) dx \\ &\quad + \frac{n\theta an!}{b^n} \int_0^\infty x^m (1+\theta ax)^{-(n+1)} \exp(-ax) dx. \quad (18) \end{aligned}$$

Chega-se ao fim da demonstração aplicando o Lema 4.1 em cada integral de (18). ■

5 Função geradora de momentos e função característica.

O Teorema 5.1 estabelece a função geradora de momentos e a função característica correspondente a fdp (6).

Teorema 5.1. *Para a fdp (6), a função geradora de momentos é dada por:*

$$\begin{aligned}
 M(s, t) &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \exp\left[\frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \Gamma\left[0, \frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \\
 &+ \left[\frac{a(b-t)+b(a-s)}{\theta ab}\right] \exp\left[\frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \Gamma\left[-1, \frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right] \\
 &+ \Psi\left[2, 1; \frac{(a-s)(b-t)}{\theta ab}\right], \tag{19}
 \end{aligned}$$

sendo que $s < a$ e $t < b$. A função característica correspondente é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Phi(s, t) &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \exp\left[\frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \Gamma\left[0, \frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \\
 &+ \left[\frac{a(b-it)+b(a-is)}{\theta ab}\right] \exp\left[\frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \Gamma\left[-1, \frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right] \\
 &+ \Psi\left[2, 1; \frac{(a-is)(b-it)}{\theta ab}\right]. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Demonstração: Utilizando (6), podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
 M(s, t) &= ab \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(sx + ty) [(1 + \theta ax)(1 + \theta by) - \theta] \\
 &\quad \times \exp[-(ax + by + \theta abxy)] dy dx \\
 &= ab \int_0^\infty \exp[-(a-s)x] \int_0^\infty [(1 - \theta + \theta ax) + \theta b(1 + \theta ax)y] \\
 &\quad \times \exp\{-[b(1 + \theta ax) - t]y\} dy dx \\
 &= ab \int_0^\infty \exp[-(a-s)x] [(1 - \theta + \theta ax) I_0 + \theta b(1 + \theta ax) I_1] dx,
 \end{aligned}$$

sendo que

$$I_k = \int_0^\infty y^k \exp\{-[b(1 + \theta ax) - t]y\} dy \quad k = 0, 1. \tag{21}$$

A expressão (21) é resolvida efetuando a mudança de variável $u = [b(1 + \theta ax) - t]y$ e aplicando a definição (7):

$$I_k = \frac{\Gamma(k+1)}{[b(1 + \theta ax) - t]y^{k+1}} = \frac{k!}{[b(1 + \theta ax) - t]^{k+1}}. \tag{22}$$

Então,

$$M(s, t) = ab \int_0^\infty \exp[-(a-s)x] \left[\frac{1-\theta+\theta ax}{b(1+\theta ax)-t} + \frac{\theta b(1+\theta ax)}{[b(1+\theta ax)-t]^2} \right] dx \quad (23)$$

e assim, tem-se:

$$\begin{aligned} M(s, t) &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-1} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_0^*} \\ &+ a \underbrace{\int_0^\infty x \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-1} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_1^*} \\ &+ \frac{1}{\theta a} \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-2} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_2^*} \\ &+ \underbrace{\int_0^\infty x \left(\frac{b-t}{\theta ab} + x \right)^{-2} \exp \left[-\frac{(a-s)x}{\theta ab} \right] dx}_{I_2^*}. \end{aligned} \quad (24)$$

Chega-se ao fim da demonstração da primeira parte do teorema, aplicando-se o Lema 4.1 em cada uma das integrais I_k^* e em seguida utilizando as seguintes propriedades da função hipergeométrica confluyente degenerada:

$$\Psi(1, \beta; x) = x^{1-\beta} \exp(x) \Gamma(\beta-1, x) \quad (25)$$

e

$$\Psi(\alpha, \alpha; x) = \exp(x) \Gamma(1-\alpha, x). \quad (26)$$

A demonstração da segunda parte, referente a função característica, é análoga.

■

6 Fdps de $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X+Y)$.

Nos Teoremas 6.2, 6.4 e 6.5 são deduzidas as fdps de $P = XY$, $R = X/Y$ e $Q = X/(X+Y)$ quando X e Y tem distribuição dada por (6).

Lema 6.1. (Equação (2.3.6.9), Prudnikov (1986)). Se $0 < p$ e $0 < q$, então,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-px - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{pq}).$$

Teorema 6.2. Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$f_P(p) = 2ab[(1 - \theta + \theta^2 abp) K_0(2\sqrt{abp}) + 2\theta\sqrt{abp}K_1(2\sqrt{abp})] \exp(-\theta abp), \quad (27)$$

sendo que $0 < p$.

Demonstração: De (6), tem-se que a fdp conjunta de $(X, P) = (X, XY)$ pode ser expressa como:

$$f_{X,P}(x, p) = ab [\theta a + (ab\theta^2 p - \theta + 1) x^{-1} + \theta b p x^{-2}] \exp(-\theta abp) \exp\left[-\left(ax + \frac{bp}{x}\right)\right].$$

Assim, a fdp de p pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_P(p) &= ab \exp(-\theta abp) \int_0^\infty [\theta a + (ab\theta^2 p - \theta + 1)x^{-1} + \theta b p x^{-2}] \exp\left[-\left(ax + \frac{bp}{x}\right)\right] dx \\ &= ab \exp(-\theta abp) [\theta a I_0 + (ab\theta^2 p - \theta + 1) I_1 + \theta b p I_2], \end{aligned} \quad (28)$$

sendo que:

$$I_k = \int_0^\infty x^{-k} \exp\left[-\left(ax + \frac{bp}{x}\right)\right] dx \quad k = 0, 1, 2.$$

Aplicando o Lema 6.1, $I_0 = 2(bp/a)^{1/2} K_1(2\sqrt{abp})$, $I_1 = 2K_0(2\sqrt{abp})$ e $I_2 = 2(bp/a)^{-1/2} K_{-1}(2\sqrt{abp}) = 2(bp/a)^{1/2} K_1(2\sqrt{abp})$. A conclusão do teorema decorre da substituição desses resultados em (28). ■

A partir de (15), pode-se afirmar que:

$$E(P^n) = \frac{(n!)^2}{\theta^{n+1}(ab)^n} [\Psi(n+1, 2, 1/\theta) + n\theta\Psi(n+1, 1, 1/\theta)], \quad (29)$$

em que $1 \leq n$.

Lema 6.3. (Equação (2.3.15.3), Prudnikov (1986)). Se $0 < \alpha$ e $0 < p$, então,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-px^2 - sx) dx = \Gamma(\alpha) (2p)^{-\alpha/2} \exp\left(\frac{s^2}{8p}\right) D_{-\alpha}\left(\frac{s}{\sqrt{2p}}\right).$$

Teorema 6.4. Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \exp\left[\frac{(b+ar)^2}{8\theta abr}\right] \left[\frac{(1-\theta)}{2\theta r} D_{-2}\left(\frac{b+ar}{\sqrt{2\theta abr}}\right) + \frac{(b+ar)}{r\sqrt{2\theta abr}} D_{-3}\left(\frac{b+ar}{\sqrt{2\theta abr}}\right) \right] \\ &\quad + \frac{3}{2r} \exp\left[\frac{(b+ar)^2}{8\theta abr}\right] D_{-4}\left(\frac{b+ar}{\sqrt{2\theta abr}}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

sendo que $0 < r$.

Demonstração: De (6), tem-se que a fdp de $R = X/Y$ pode ser expressa como:

$$f_R(r) = ab \int_0^\infty [(1-\theta)y + \theta(b+ar)y^2 + \theta^2 abry^3] \exp\{-[\theta abry^2 + (b+ar)y]\} dx \\ = ab[(1-\theta)I_1 + \theta(b+ar)I_2 + \theta^2 abrI_3], \quad (31)$$

sendo que:

$$I_k = \int_0^\infty x^k \exp\{-[\theta abry^2 + (b+ar)y]\} dx.$$

Aplicando o Lema 6.3 em I_k para $k = 1, 2, 3$ e substituindo os resultados em (31), chega-se a conclusão do teorema. ■

Teorema 6.5. *Se X e Y são distribuídas conjuntamente de acordo com (6), então,*

$$f_Q(q) = \frac{(1-\theta)}{2\theta q(1-q)} \exp\left\{\frac{[aq + b(1-q)]^2}{8\theta abq(1-q)}\right\} D_{-2}\left(\frac{aq + b(1-q)}{\sqrt{2\theta abq(1-q)}}\right) \\ + \frac{[aq + b(1-q)]}{q(1-q)\sqrt{2\theta abq(1-q)}} \exp\left\{\frac{[aq + b(1-q)]^2}{8\theta abq(1-q)}\right\} D_{-3}\left(\frac{aq + b(1-q)}{\sqrt{2\theta abq(1-q)}}\right) \\ + \frac{3}{2q(1-q)} \exp\left\{\frac{[aq + b(1-q)]^2}{8\theta abq(1-q)}\right\} D_{-4}\left(\frac{aq + b(1-q)}{\sqrt{2\theta abq(1-q)}}\right), \quad (32)$$

sendo que $0 < q < 1$.

Demonstração: Sob a transformação $(S, Q) = (X + Y, X/(X + Y))$ a fdp conjunta de (S, Q) é dada por:

$$f(s, r) = ab[(1-\theta)s + \theta[aq + b(1-q)]s^2 + \theta^2 abq(1-q)s^3] \\ \times \exp\{-[(aq + b(1-q))s + \theta abq(1-q)s^2]\} \\ = ab[(1-\theta)I_1 + \theta[aq + b(1-q)]I_2 + \theta^2 abq(1-q)abrI_3], \quad (33)$$

sendo que:

$$I_k = \int_0^\infty x^k \exp\{-[(aq + b(1-q))s + \theta abq(1-q)s^2]\} dx.$$

Aplicando o Lema 6.3 em I_k para $k = 1, 2, 3$ e substituindo os resultados em (33), chega-se a conclusão do teorema. ■

Nas Figuras de 1 a 3 são ilustradas as formas da fdps (27), (30) e (32) para diferentes valores paramétricos.

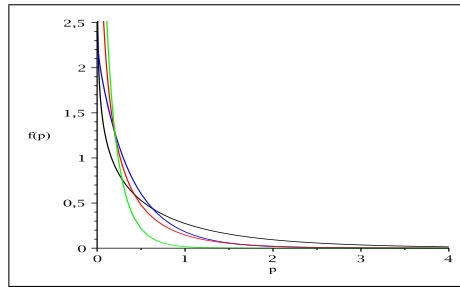


Figura 1 - Gráficos da fdp (27) para $a = 1,0$, $b = 1,0$, $\theta = 0,5$ (preta); $a = 0,5$, $b = 3,5$, $\theta = 0,9$ (azul); $a = 3,0$, $b = 0,9$, $\theta = 0,3$ (vermelha) e $a = 2,0$, $b = 3,0$, $\theta = 0,5$ (verde).

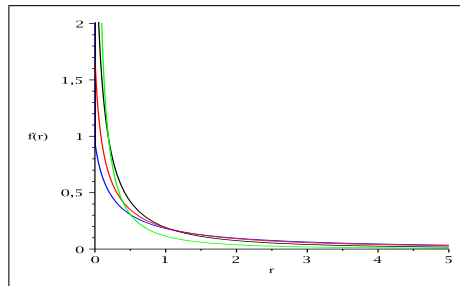


Figura 2 - Gráficos da fdp (30) para $a = 2,0$, $b = 0,9$, $\theta = 0,5$ (preta); $a = 2,0$, $b = 4,0$, $\theta = 0,9$ (azul); $a = 0,6$, $b = 0,7$, $\theta = 1,0$ (vermelha) e $a = 8,0$, $b = 0,1$, $\theta = 0,9$ (verde).

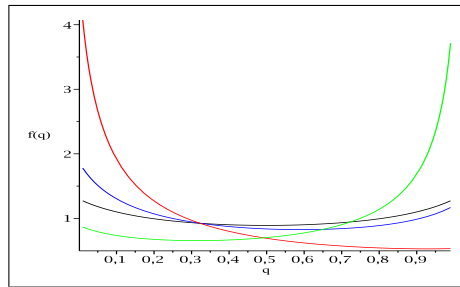


Figura 3 - Gráficos da fdp (32) para $a = 1,0$, $b = 1,0$, $\theta = 0,3$ (preta); $a = 5,0$, $b = 4,0$, $\theta = 0,5$ (azul); $a = 0,9$, $b = 0,3$, $\theta = 0,6$ (vermelha) e $a = 0,4$, $b = 0,9$, $\theta = 1,1$ (verde).

7 Aplicação

Nesta seção é feita uma aplicação do modelo (6) na análise de dados de precipitações pluviométricas ocorridas nas cidades de Capela, Lagarto, Laranjeiras e São Cristóvão situadas no Estado de Sergipe.

Os dados explorados foram coletados em estações hidrometeorológicas do Centro de Meteorologia da Secretaria de Meio Ambiente e dos Recursos Hídricos do Estado de Sergipe (SEMARH), as coordenadas geográficas das estações são exibidas na Tabela 1. O conjunto de dados pode ser acessado livremente no endereço eletrônico: $\langle \text{http} : // \text{www.semarh.se.gov.br/meteorologia/modules/tinyd0/index.php?id} = 50 \rangle$. A base de dados corresponde as medições diárias do índice pluviométrico no período de 01 de janeiro de 2009 até 31 de dezembro de 2010.

Tabela 1 - Localização das estações hidrometeorológicas

Cidade	Latitude	Longitude	Altitude
Capela	$-10,53^0$	$-37,06^0$	163m
Lagarto	$-10,95^0$	$-37,64^0$	163m
Laranjeiras	$-10,81^0$	$-37,17^0$	13m
São Cristóvão	$-10,92^0$	$-37,20^0$	30m

Utilizando as medições do índice pluviométrico, obtém-se os dados sobre período de dias com ocorrência de precipitações (X) e período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação (Y). O objetivo é modelar a proporção de dias com ocorrência de precipitações, isso pode ser feito através da distribuição de $Q = X/(X + Y)$.

A premissa básica de existência de correlação entre os dados foi verificada através de teste de independência. A Tabela 2 mostra os p-valores originados do teste ρ de Spearman (Best e Roberts, 1975). Os p-valores foram inferiores a 0,05 indicando que há evidências significativas de associação entre os dados. Os scatter plots do período de dias com ocorrência de precipitação versus o período contíguo de dias sem ocorrência de precipitação para as cidades pesquisadas são apresentados na Figura 4 e evidenciam a existência de correlação negativa entre as variáveis.

Tabela 2 - p-valor do teste ρ de Spearman

Cidades	p-valor
Capela	0,0254
Lagarto	0,0417
Laranjeiras	0,0000
São Cristóvão	0,0292

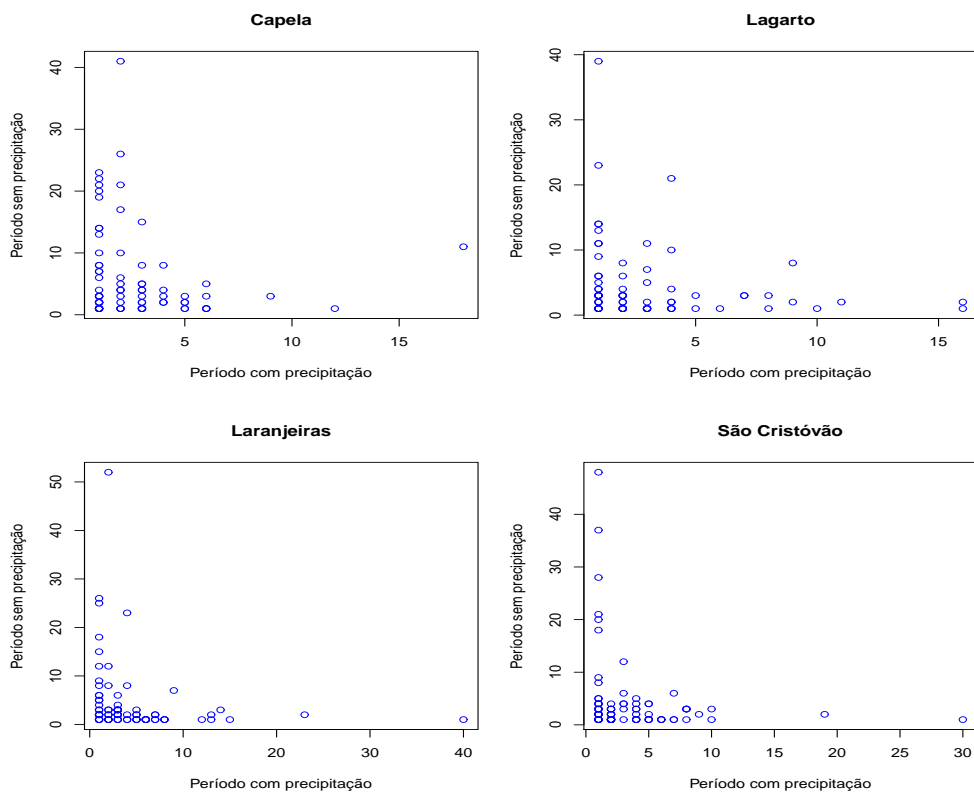


Figura 4 - Scatter plots do período de precipitação versus período sem precipitação para as quatro cidades estudadas.

O ajuste do modelo (6) foi feito pelo Método de Inferência pelas Marginais (Joe, 1997; e Shiau *et al.*, 2007). Esse método é dividido em duas etapas: primeiramente, são ajustadas as distribuições marginais pelo Método da Máxima Verossimilhança e em seguida estima-se o parâmetro de dependência da cópula. Os valores obtidos para \hat{a} e para \hat{b} são exibidos na Tabela 3 juntamente com os respectivos intervalos de confiança IC_a e IC_b a nível de 95%.

Para completar o processo de estimação, obtém-se a estimativa do parâmetro da cópula a partir da função de log-verossimilhança do modelo bivariado:

$$\ln L(x, y; a, b, \theta) = \ln L_c(x, y; a, b, \theta) + \ln L_X(x; a) + \ln L_Y(y; b), \quad (34)$$

em que $\ln L_c$ é a função de log-verossimilhança da cópula. Substituindo-se os parâmetros já estimados \hat{a} e \hat{b} na equação (34) e em seguida maximizando a função de log-verossimilhança L , obtém-se a estimativa $\hat{\theta}$ do parâmetro da cópula. Os

valores obtidos para $\hat{\theta}$ (Tabela 3) foram maiores que zero, confirmando os resultados obtidos no teste ρ de Spearman, indicando a existência de correlação negativa entre as variáveis. Na Figura 5 são exibidas as fdps ajustadas de Q para as cidades pesquisadas.

Tabela 3 - Estimativas dos parâmetros

Cidade	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$IC_a 95\%$	$IC_b 95\%$
Capela	0,3524	0,1575	0,9887	(0,2767; 0,4371)	(0,1236; 0,1953)
Lagarto	0,3207	0,2255	1,0000	(0,2527; 0,3967)	(0,1777; 0,2790)
Laranjeiras	0,2207	0,2207	1,0000	(0,1747; 0,2719)	(0,1747; 0,2719)
São Cristóvão	0,2819	0,2289	1,0000	(0,2248; 0,3453)	(0,1826; 0,2804)

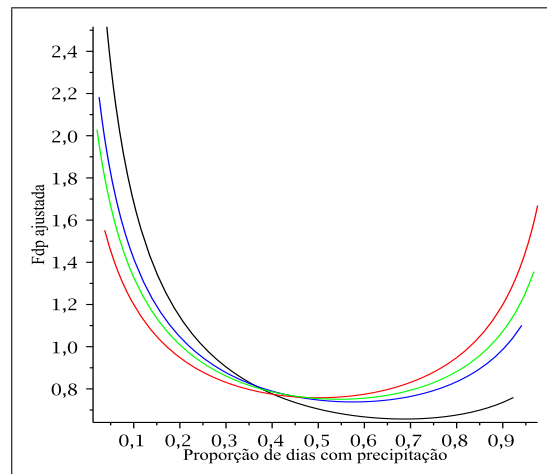


Figura 5 - Fdp de Q para as cidades de Capela (preta); Lagarto (azul); Laranjeiras (vermelha) e São Cristóvão (verde).

A qualidade de ajuste do modelo (6) foi verificada via gráficos de probabilidade. Para a variável X foi plotado o gráfico de $F_X(x_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ (Chambers *et al.*, 1983), em que $F_X(\cdot)$ denota a função de distribuição de X e $x_{(i)}$ representa os valores amostrais de X em ordem crescente. Da mesma forma, para Y foi plotado o gráfico de $F_Y(y_{(i)})$ versus $(i - 0,375)/(n + 0,25)$ em que $F_Y(\cdot)$ denota a função de distribuição de Y e $y_{(i)}$ representa os valores amostrais de Y em ordem crescente. Os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de X para as quatro cidades são visualizados na Figura 6. Na Figura 7 são exibidos os gráficos de probabilidade para o ajuste da distribuição de Y para as cidades estudadas.

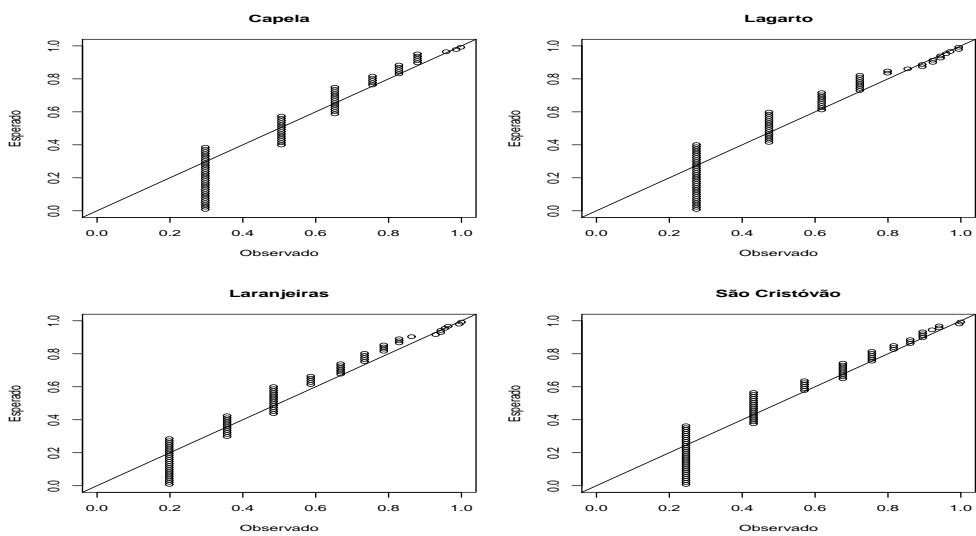


Figura 6 - Gráficos de probabilidade para o período de dias com ocorrência de precipitações (X) para as quatro cidades estudadas.

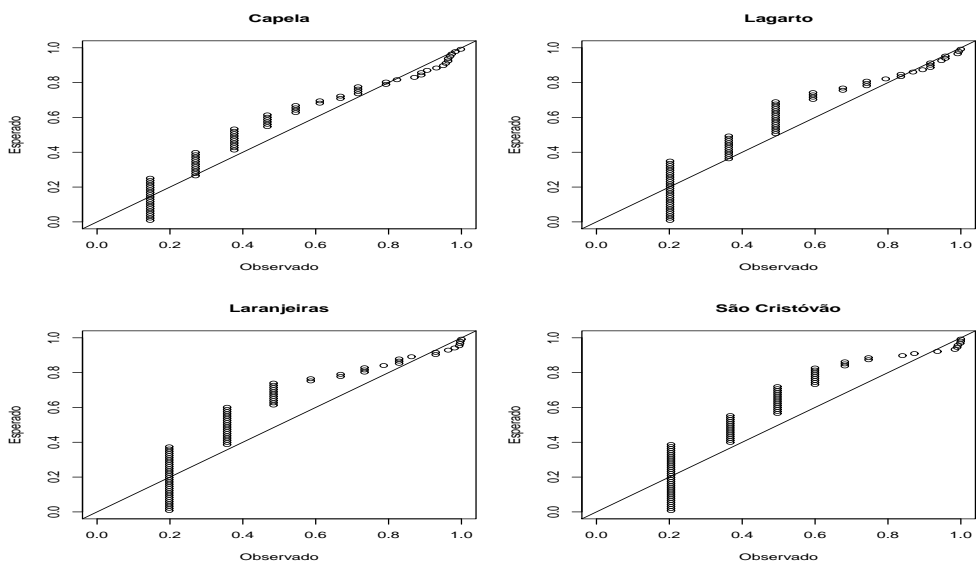


Figura 7 - Gráficos de probabilidade para o período de dias sem ocorrência de precipitação (Y) para as quatro cidades estudadas.

Conclusões

A distribuição exponencial bivariada construída a partir da cópula de Gumbel-Barnett demonstrou-se matematicamente tratável, com propriedades que ratificam sua robustez. A aplicação do modelo na análise de dados de precipitações pluviométricas apresentou resultados satisfatórios.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenadoria para o Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de doutorado do primeiro autor, e aos revisores, pelas sugestões que contribuíram para o aprimoramento do artigo.

RODRIGUES, J. A.; SILVA, A. P. C. M.; CHAVES, L. M.; CASTELLARES, F. A new bivariate exponential distribution built from the Gumbel-Barnett copula with an application to the modeling of rainfall. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.4, p.583-598, 2011.

- **ABSTRACT:** *The exponential models are the most widely used in the analysis of hydrological processes. In this context it is used the Gumbel-Barnett copula to construct a bivariate exponential distribution and apply it in data analysis of rainfall occurring in cities in the state of Sergipe. The main properties of this distribution are deducted, the expressions obtained make use of several special functions.*
- **KEYWORDS:** *Gumbel-Barnett copula; bivariate exponential distribution; hydrologic modeling.*

Referências

BALAKRISHNAN, N.; LAI, C. D. *Continuous bivariate distributions*. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 2009. 724p.

BARNETT, V. Some bivariate uniform distributions. *Commun. Stat. Part A: theory methods*, Philadelphia, v.9, n.4, p.453-461, 1980.

BEST, D. J.; ROBERTS, D. E. Algorithm AS 89: The upper tail probabilities of Spearman's rho. *J. R. Stat. Soc. Ser. C: appl. stat.*, Abingdon, v.24, n.3, p.377-379, 1975.

CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. *Graphical methods for data analysis*. Boston: Duxbury Press, 1983. 395p.

CHOWDHARY, H.; ESCOBAR, L. A.; SING, V. P. Identification of suitable copulas for bivariate frequency analysis of flood peak and flood volume data. *Hydrol. Res.*, London, v.42, n.2-3, p.193-216, 2011.

- GHOSH, S. Modeling bivariate rainfall distribution and generating bivariate correlated rainfall data in neighboring meteorological subdivisions using copula. *Hydrol. Proces.*, Oxford, v.24, n.24, p.3558–3567, 2010.
- HUTCHINSON, T. P.; LAI, C. D. *Continuous bivariate distributions: Emphasizing applications*. Adelaide: Rumsby Scientific Publishing, 1990. 412p.
- JOE, H. *Multivariate models and dependence concepts*. New York: Chapman-Hall, 1997. 399p.
- KAO, S. C.; GOVINDARAJU, R. S. A copula-based joint deficit index for droughts. *J. Hydrol.*, Amsterdam, v.380, n.1-2, p.121–134, 2010.
- NELSEN, R. B. *An introduction to copulas*. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 2006. 270p.
- OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator*. 2.ed. New York: Springer Verlag, 2009. 700p.
- PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. *Integrals and series*. Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 808p. v.1.
- SALVADORI, G.; DE MICHELE, C. Statistical characterization of temporal structure of storms. *Adv. Water Resour.*, Oxford, v.29, n.6, p.827–842, 2006.
- SHIAU, J. T. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resour. Manag.*, Dordrecht, v.20, n.5, p.795–815, 2006.
- SHIAU, J. T.; FENG, S.; NADARAJAH, S. Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas. *Hydrol. Proces.*, Oxford, v.21, n.16, p.2157–2163, 2007.
- SKLAR, K. *Fonctions de repartition à n dimensions et leurs margens*. Paris: Institut de Statistique de L'Université de Paris, 1959. v.8, p.229-231.
- ZHANG, L.; SINGH, V. P. Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas. *J. Hydrol.*, Amsterdam, v.332, n.1-2, p.93-109, 2007.

Recebido em 17.10.2011.

Aprovado após revisão em 29.02.2012.