FUNÇÕES CONVEXAS EM TEORIA DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES POR ARBITRAGEM UTILIZANDO O MODELO BINOMIAL

Devanil Jaques de SOUZA[1]
Lucas Monteiro CHAVES[1]

- RESUMO: Neste trabalho utilizam-se técnicas matemáticas elementares, baseadas em propriedades de funções convexas, para derivar o preço de arbitragem de opções americanas de compra. Considera-se que os mercados são completos e discretos no tempo e que os preços das ações negociadas nesses mercados se comportam segundo o modelo binomial.
- PALAVRAS-CHAVE: Opção; modelo binomial; arbitragem; derivativo.

1 INTRODUÇÃO

Uma opção de compra (ou de venda) é um contrato que assegura ao seu detentor o direito, não a obrigação, de comprar (ou vender) um lote de alguma ação específica, por um preço determinado, chamado preço de exercício (strike price), doravante denotado por *K*. Apesar de existirem tratamentos teóricos para os chamados contratos perpétuos, no mundo real as opções têm um tempo de validade, ou seja, só existem em um intervalo de tempo [0, T], em que T é chamado de **Tempo de Maturação**. Opções que só podem ser exercidas no momento T de término do contrato são chamadas **opções europeias**. Opções que facultam o exercício a qualquer tempo no conjunto {0, ..., T} são chamadas **opções americanas**. Apesar de existir uma quantidade enorme de outros tipos, o presente trabalho estará focado apenas nessas duas modalidades.

Opções são usadas basicamente como garantias (*hedge*) contra as incertezas do mercado de ações. Opções de compra garantem um preço máximo; opções de venda, um preço mínimo. Secundariamente prestam-se também à especulação.

Opções representam um direito e, se exercido, podem se transformar em um lucro. Sendo assim, têm um preço. A questão que se apresenta é o estabelecimento desse preço, de maneira a não se permitir, a priori, nem ganho certo e nem perda certa, considerando que o resultado desse exercício depende da evolução do preço do ativo subjacente, que é aleatório. Esse preço é o que se convenciona chamar de **preço de arbitragem** (*arbitrage price*).

A constatação de que o valor de arbitragem de uma opção é uma função convexa do seu preço de exercício, permite a utilização da análise convexa como peça básica para mostrar que o valor de arbitragem de uma opção americana de compra é igual ao valor de

[1] Universidade Federal de Lavras – UFLA, Departamento de Ciências Exatas, Caixa Postal 37, CEP: 37200-000. Lavras, MG, Brasil. E-mail: *DevanilJaques@dex.ufla.br / lucas@dex.ufla.br*

arbitragem de uma opção europeia de compra. A mesma ferramenta é usada para mostrar ainda que, em se tratando de opções americanas de venda, não se chega a uma fórmula fechada para o valor de arbitragem.

Os resultados apresentados nesse trabalho não são novos. O enfoque é a obtenção desses resultados através de matemática elementar, baseada simplesmente em propriedades de funções convexas de tal maneira que o texto não pressupõe qualquer conhecimento prévio sobre teoria matemática de finanças. A análise convexa está implícita em vários artigos relacionados ao assunto, em particular no clássico Merton (1973). Em geral, na literatura, a descrição matemática do modelo binomial em termos de probabilidades, árvores, etc. é bastante completa, o mesmo não ocorrendo em relação à análise convexa. Nesse sentido, este trabalho pode ser visto como uma introdução a textos mais completos, como, por exemplo, Hull (2009).

2 Referencial teórico

2.1 Descrição do mercado

Considera-se um mercado cujas negociações se dão a intervalos regulares de tempo e onde se negociam três tipos de ativos, descritos a seguir.

Um ativo sem risco, cujo valor B no tempo seguinte é o seu valor atual acrescido de um rendimento predeterminado, ou seja,

$$B1 = B0 + B0 * r = B0\,(1 + r) \quad => \quad Bt = B0\,(1 + r)t \;\text{ em que } r \geq 0.$$

Esses ativos são basicamente o próprio dinheiro, que pode ser aplicado ou tomado a uma taxa fixa, ou títulos públicos, os chamados *bonds*.

Um ativo de risco, cujo valor S no tempo seguinte é aleatório, ou seja, conhecendo-se S_0, o valor de S_1 é desconhecido. Os ativos de risco considerados aqui são lotes de ações (stocks) negociadas em bolsas de valores.

Um ativo derivativo, cujo valor D é função do valor de algum ativo de risco S, chamado ativo subjacente, ou seja,

$$D1 = f\,(S1).$$

Considera-se ainda que nesse mercado compram-se ou vendem-se quantidades ilimitadas e/ou fracionadas de quaisquer dos ativos, as transações não têm custo, compradores e vendedores são tomadores de preço, ou seja, nenhum tem volume suficiente para influenciar o preço praticado e entende-se por comportamento racional dos agentes a busca do melhor resultado possível.

2.2 Modelo binomial de apreçamento dos ativos de risco

Nesse modelo, proposto por Cox *et al.* (1979), o processo de preço de um ativo de risco (S) se comporta segundo um caminho aleatório multiplicativo, tal que, no tempo t=0, o valor S_0 é uma constante estritamente positiva e que, em um tempo t qualquer, o ativo só pode assumir um de dois valores:

$$S_t = \begin{cases} uS_{t-1} & com \quad probabilidade \quad p \\ dS_{t-1} & com \quad probabilidade \quad q = 1-p; \end{cases}$$

em que as constantes u e d guardam a relação $0 < d < 1 + r < u$ e $r \geq 0$ é a taxa de remuneração dos ativos B livres de risco.

Suponha-se que a ocorrência de *u* ou *d* seja governada pelo lançamento de uma moeda, não necessariamente honesta, associando-se ao resultado "cara" (H) a constante *u* com probabilidade *p* e, ao resultado "coroa" (T), a constante *d* com probabilidade *q = 1 – p*. Com isso tem-se:

$$S_t(H) = uS_{t-1} \quad com \quad probabilidade \quad p$$

$$S_t(T) = dS_{t-1} \quad com \quad probabilidade \quad q = 1-p.$$

2.3 Preço de opção europeia no modelo binomial de um passo.

Suponha-se que no momento $t_0 = 0$ uma determinada ação esteja sendo negociada pelo valor S_0 e que uma opção europeia de compra dessa mesma ação, com tempo de maturação $T = t_1 = 1$ e preço de exercício K, seja negociada por V_0. Sabe-se que no tempo seguinte essa opção valerá:

$$V_1 = (S_1 - K)^+ = \max\{0, (S_1 - K)\}. \qquad (1)$$

Pode-se, por outro lado, optar por aplicar o valor V_0, parte em ações, digamos $\Delta_0 S_0$, e o restante, $V_0 - \Delta_0 S_0$, à taxa fixa r. O valor Δ_0 representa a quantidade de ações (ou de lotes de ações, já que ações normalmente são negociadas em lotes), um número não necessariamente inteiro, a ser comprado no tempo t=0 e mantido até t=1. Caso $\Delta_0 S_0$ seja maior que V_0, o valor $V_0 - \Delta_0 S_0$ é negativo e representa, na realidade, um valor a ser tomado no mercado e não um valor aplicado. Chamando do *X* o portfólio assim constituído, seu valor, no tempo t=0, é:

$$X_0 = \Delta_0 S_0 + (V_0 - \Delta_0 S_0) = V_0.$$

No tempo seguinte o valor desse patrimônio será dado pela soma do valor das ações, $\Delta_0 S_1$, mais o valor atualizado da aplicação em dinheiro, $(1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$, ou seja,

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0).$$

Partindo-se, pois, de um mesmo valor V_0, o mercado considerado permite duas aplicações diferentes, com valores finais V_1 e X_1. O que se argumenta então é que, a única hipótese de convivência desses ativos é que existam V_0 e Δ_0 tais que V_1 seja igual a X_1, pois, caso contrário, todos os investimentos se concentrariam naquela aplicação de maior resultado. Deve-se então determinar V_0 e Δ_0, conhecidos u, d e S_0. Têm-se duas incógnitas e, como as ações se comportam, por hipótese, segundo o modelo binomial, duas equações:

$$\begin{cases} V_1(H) = (uS_0 - K)^+ = X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \\ V_1(T) = (dS_0 - K)^+ = X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0); \end{cases}$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{cases} V_1(H) = [S_1(H) - (1+r)S_0]\Delta_0 + (1+r)V_0 \\ V_1(T) = [S_1(T) - (1+r)S_0]\Delta_0 + (1+r)V_0; \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \quad \text{e}$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r}[\frac{1+r-d}{u-d}V_1(H) + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1(T)].$$

Fazendo-se:

$p^* = \dfrac{1+r-d}{u-d}$ e $q^* = \dfrac{u-(1+r)}{u-d}$, tem-se:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}[p^* V_1(H) + q^* V_1(T)]. \tag{2}$$

Como $p^* + q^* = 1$ e, por hipótese, $0 < d < 1 + r < u$ e $r \geq 0$, segue que $p^* > 0$, $q^* > 0$ e p^* e q^* podem ser vistos como uma nova medida de probabilidade, sob a qual o valor adequado para V_0, chamado de *valor de arbitragem*, é o valor da esperança, tomada sob essa nova medida, da remuneração final da opção, $V_1 = (S_1 - K)^+$, descontada pela taxa r. Usando-se a notação $E^*[.]$ para esta esperança, pode-se então escrever:

$$V_0 = E^*[\frac{1}{1+r}V_1] = \frac{1}{1+r}E^*[V_1].$$

Caso se tratasse de uma opção europeia de venda, todo o desenvolvimento continuaria válido, com a única diferença que o valor da remuneração final da opção passaria a ser dado por $V_1 = (K - S_1)^+ = \max\{0, (K - S_1)\}$.

Vale ressaltar o significado dos resultados acima: A existência de Δ_0 garante, ao vendedor da opção, compor, partindo do valor V_0, um portfólio (uma carteira composta de lotes da ação subjacente e de aplicações no mercado certo), capaz de reproduzir o valor de exercício da opção. Sendo assim V_0 é o valor justo para a venda da opção no tempo inicial.

2.4 Preço de opções europeias utilizando o modelo binomial.

Segundo Shreve (2004), sabe-se que o preço de uma opção europeia num modelo binomial de T passos é dado por:

$$V_0 = E^*[(1+r)^{-T} V_T].$$

Caso a opção seja de compra, pode-se reescrever:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{(1+r)^T} E^*[(S_T - K)^+] \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ P^*[S_T = u^j d^{T-j} S_0] \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}. \end{aligned} \tag{3}$$

Caso a opção seja de venda, seu valor de arbitragem também pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} V_0 &= (1+r)^{-T} E^*[(K - S_T)^+] \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ P^*[(K - u^j d^{T-j} S_0)^+] \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} (K - u^j d^{T-j} S_0)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}. \end{aligned} \tag{4}$$

3 Metodologia

A principal ferramenta de análise utilizada neste trabalho é o conceito de função convexa. Sendo assim, é conveniente uma revisão de algumas definições e propriedades dessas funções.

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é definido como **convexo** se, dados dois pontos quaisquer $x_1, x_2 \in A$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A.$$

Uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R}^n -> \mathbb{R}$ é definida como **convexa** se o seu domínio D é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ e, para todo $x_1, x_2 \in D$ e todo $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \qquad (5)$$

Outra definição de função convexa, equivalente à anterior, é: uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R} -> \mathbb{R}$ é definida como convexa se, para todo ponto x_0 pertencente ao seu domínio D, existe uma constante $c(x_0)$, tal que:

$$f(x) \geq f(x_0) + c(x_0)(x - x_0), \text{ para todo } x \in D. \qquad (6)$$

Geometricamente, o que as definições acima dizem é: um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é convexo se, tomando-se dois pontos quaisquer pertencentes a A, o segmento de reta que une esses dois pontos está todo contido em A; uma função contínua $f : \mathbb{R} -> \mathbb{R}$ é convexa se, dados dois pontos quaisquer $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ em seu gráfico, o segmento de reta que une esses pontos está todo acima do gráfico da função; funções convexas têm **retas suporte** sempre abaixo de seu gráfico.

Dadas duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, convexas em um intervalo D, a função $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$, com $a > 0$ e $b > 0$, é também convexa no mesmo intervalo.

4 Resultados e discussão

4.1 Valor de arbitragem de uma opção europeia

O preço de arbitragem de uma opção europeia de compra (3), considerando que os valores de r, u, d e, consequentemente, p^* e q^*, são dados pelo mercado, é função exclusivamente do preço de exercício K e pode ser reescrito como:

$$V_0(K) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}.$$

Nesta expressão, cada parcela da soma à direita da igualdade é dada por

$$(1+r)^{-T} (u^j d^{T-j} S_0 - K)^+ \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j} \quad (j = 0,1,2,...,T);$$

que é nula para $K \geq u^j d^{T-j} S_0$ e, para $K < u^j d^{T-j} S_0$ vale:

$$(1+r)^{-T} (u^j d^{T-j} S_0 - K) \binom{T}{j} (p^*)^j (q^*)^{T-j}.$$

Esta expressão, como função de *K*, é uma reta de coeficiente linear dado por:

$$\alpha_j = \left(\frac{up^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{dq^*}{1+r} \right)^{T-j} \binom{T}{j} S_0 > 0;$$

e coeficiente angular:

$$\beta_j = -\left(\frac{p^*}{1+r} \right)^j \left(\frac{q^*}{1+r} \right)^{T-j} \binom{T}{j} < 0;$$

resultando que cada parcela de $V_0(K)$ é uma função convexa (Figura 1).

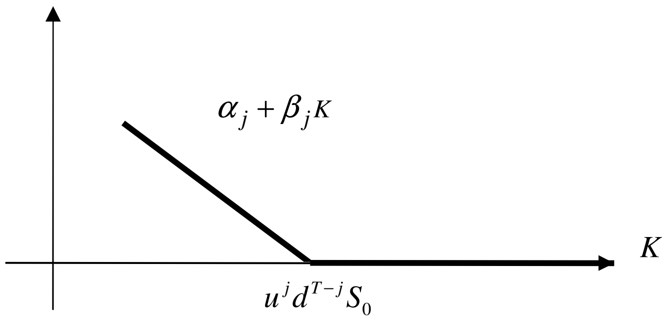

Figura 1 - Função convexa dada por cada parcela do valor de arbitragem V_0 de uma opção europeia de compra.

Sendo assim, $V_0(K)$ é uma soma de funções convexas e, consequentemente, uma função convexa (Figura 2).

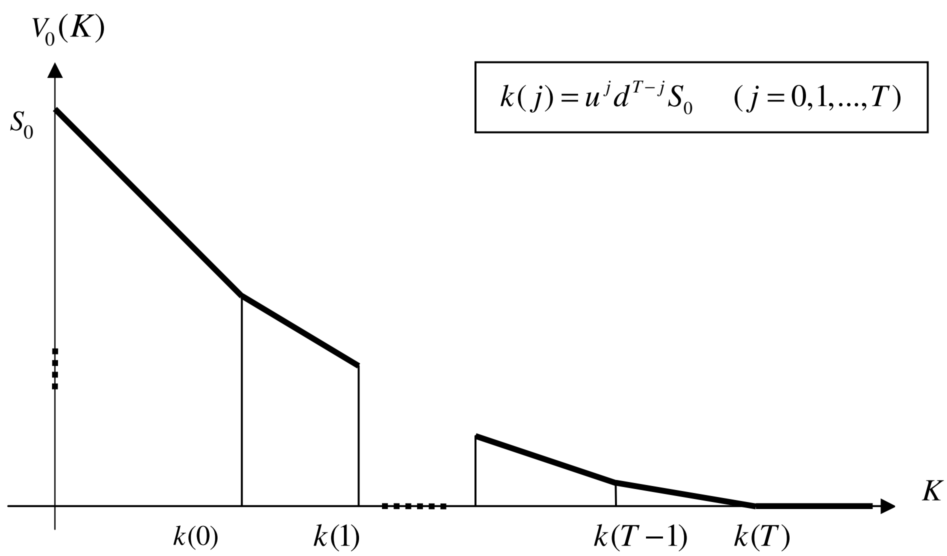

Figura 2 - Valor arbitral de uma opção europeia de compra como função convexa do preço de exercício *K*.

Por desenvolvimento semelhante, o valor de arbitragem de uma opção europeia de venda (4) é uma função convexa ilustrada da Figura 3.

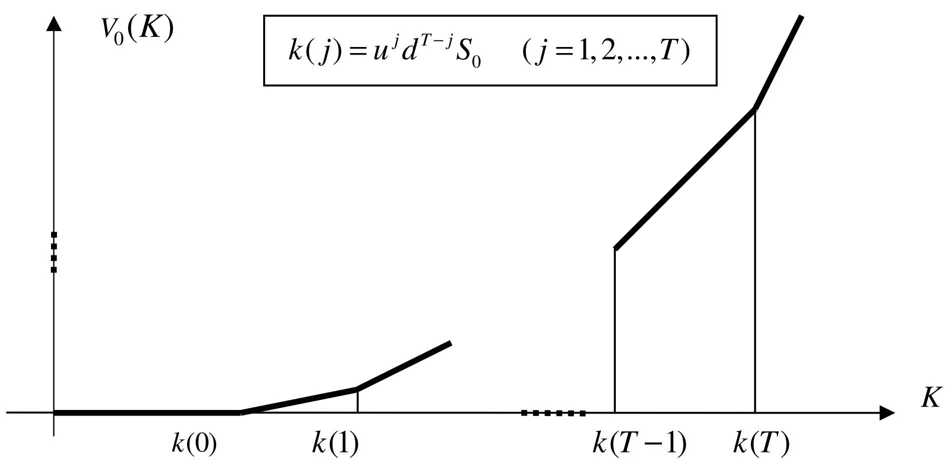

Figura 3 - Valor arbitral de uma opção europeia de venda como função convexa do valor de exercício *K*.

4.2 Valor de arbitragem de uma opção americana de compra no modelo de um passo

No modelo de um passo esse valor é dado por:

$$X_0(K) = max\{V_0, (1+r)^{-1} E^*[V_1]\}$$
$$= max\{(S_0 - K)^+, (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{1} (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j}\}.$$

O que se faz em seguida é mostrar (Figura 4) que:

$$(S_0 - K)^+ \leq (1+r)^{-1} \sum_{j=0}^{1} (u^j d^{1-j} S_0 - K)^+ (p^*)^j (q^*)^{1-j}; \text{ para todo } K.$$

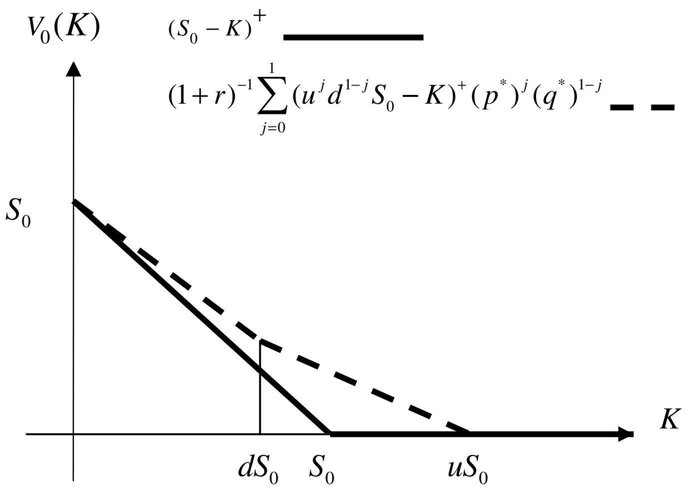

Figura 4 - Opção americana de compra no modelo de um passo.

Considerando que $f(K) = (1+r)^{-1} E^*[V_1] = (1+r)^{-1} E^*[(S_1 - K)^+]$ é uma função convexa e considerando a propriedade das retas suporte de funções convexas, essa conclusão é imediata, visto que:

(i) Como $f(K) = 0$ para $K \geq uS_0$, o eixo dos K's é uma reta suporte de $f(K)$, e como $(S_0 - K)^+ = 0$ para $K \geq S_0$, segue que:

$$f(K) \geq (S_0 - K)^+ \quad \text{para} \quad K \geq S_0.$$

(ii) Para $K \in [0, dS_0]$

$$f(K) = \frac{1}{1+r}[(uS_0 - K)(p^*) + (dS_0 - K)(q^*)]$$

$$= \frac{1}{1+r}(up^* + dq^*)S_0 - \frac{1}{1+r}K = S_0 - \frac{1}{1+r}K.$$

Portanto, $S_0 - (1+r)^{-1}K$ é uma reta suporte de $f(K)$, ou seja,

$$S_0 - (1+r)^{-1}K \leq f(K), \text{ para todo } K \geq 0.$$

Sendo assim, para $K \in [0, S_0]$,

$$(S_0 - K)^+ = S_0 - K \leq S_0 - (1+r)^{-1}K.$$

Juntando (i) e (ii) conclui-se que $(1+r)^{-1}E^*[V_1] \geq (S_0 - K)^+$ para todo $K \geq 0$, ou seja,

$$X_0(K) = max\{V_0, (1+r)^{-1}E^*[V_1]\} = (1+r)^{-1}E^*[V_1].$$

Conclusão: No modelo binomial de 1 passo, independente do valor de *K*, o melhor tempo para se exercer uma opção americana de compra é em $t = T = 1$ e, consequentemente, tudo se passa como se o portador tivesse em mãos uma opção europeia de compra.

4.3 Valor de arbitragem de uma opção americana de compra no modelo de T passos

Fazendo uso do resultado anterior (modelo de um passo) e caminhando-se reversamente na árvore de valores de exercício de uma opção americana de compra, mostra-se que, para todo $j \in \{0, 1, ..., T-1\}$,

$$max\{\frac{1}{(1+r)^j}E^*[V_j], \frac{1}{(1+r)^{j+1}}E^*[V_{j+1}]\} = \frac{1}{(1+r)^{j+1}}E^*[V_{j+1}].$$

(i) Fazendo $j = T-1$

$$max\{\frac{1}{(1+r)^{T-1}} E^*[V_{T-1}], \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T]\}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{T-1}} max\{E^*[V_{T-1}], \frac{1}{(1+r)} E^*[V_T]\}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{T-1}} max\{E^*[V_{T-1}], E^*[\frac{1}{(1+r)} V_T]\}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{T-1}} max\{E^*[E^*[V_{T-1} \mid \mathcal{G}_{T-1}]], E^*[\frac{1}{(1+r)} E^*[V_T \mid \mathcal{G}_{T-1}]]\}.$$

A variável aleatória $E^*[V_{T-1} \mid \mathcal{G}_{T-1}]$, por analogia com o resultado obtido no modelo de um passo, é sempre menor ou igual à variável aleatória $\frac{1}{(1+r)} E^*[V_T \mid \mathcal{G}_{T-1}]$ e, consequentemente,

$$E^*[E^*[V_{T-1} \mid \mathcal{G}_{T-1}]] \leq E^*[\frac{1}{(1+r)} E^*[V_T \mid \mathcal{G}_{T-1}]] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow max\{\frac{1}{(1+r)^{T-1}} E^*[V_{T-1}], \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T]\} = \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T].$$

(i) Fazendo $j = T-2$ demonstra-se, por um desenvolvimento semelhante, que:

$$max\{\frac{1}{(1+r)^{T-2}} E^*[V_{T-2}], \frac{1}{(1+r)^{T-1}} E^*[V_{T-1}]\} = \frac{1}{(1+r)^{T-1}} E^*[V_{T-1}].$$

Juntando os resultados em (i) e (ii) tem-se:

$$max\{\frac{1}{(1+r)^{T-2}} E^*[V_{T-2}], \ldots, \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T]\} = \frac{1}{(1+r)^T} E^*[V_T].$$

Esse padrão se mantém para valores decrescentes de j, de maneira que se pode concluir que:

$$X_0(K) = max\{V_0, (1+r)^{-1} E^*[V_1], \ldots, (1+r)^{-T} E^*[V_T]\}$$
$$= (1+r)^{-T} E^*[V_T].$$

Conclusão: uma opção americana de compra se comporta da mesma maneira que uma opção europeia no sentido que o melhor exercício se dá no tempo final T e, portanto, da mesma maneira pode ser tratada, tanto no que diz respeito ao seu preço de arbitragem quanto ao seu portfólio de hedge.

4.4 Valor de arbitragem de uma opção americana de venda no modelo de 1 passo

No modelo de 1 passo esse valor é dado por:

$$
\begin{aligned}
X_0(K) &= max\{V_0, (1+r)^{-1}E^*[V_1]\} \\
&= max\{(K-S_0)^+, (1+r)^{-1}\sum_{j=0}^{1}(K-u^j d^{1-j}S_0)^+(p^*)^j(q^*)^{1-j}\}.
\end{aligned}
$$

O que se verifica é que as funções acima se interceptam para algum valor de K entre dS_0 e uS_0. No que segue adota-se a notação $X_0^j(K) = (1+r)^{-j}E^*[V_j]$.

Se $K = S_0$,

$$
\left.
\begin{aligned}
X_0^1(S_0) &= (1+r)^{-1}(S_0 - dS_0)(q^*) = \frac{S_0 q^*}{1+r}(1-d) > 0 \\
X_0^0(S_0) &= (S_0 - S_0)^+ = 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \boxed{X_0^0(K) < X_0^1(K)}
$$

Se $K = uS_0$,

$$
X_0^1(uS_0) = \frac{1}{1+r}(uS_0 - dS_0)q^* = \frac{S_0 q^*}{1+r}(u-d) = \frac{S_0}{1+r}\frac{u-(1+r)}{u-d}(u-d) \Rightarrow
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_0^1(uS_0) &= S_0\left(\frac{u}{1+r} - 1\right) \\
X_0^0(uS_0) &= (uS_0 - S_0)^+ = (uS_0 - S_0) = S_0(u-1)
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \boxed{X_0^0(K) > X_0^1(K)}
$$

Existe assim algum valor de $K \in [S_0, uS_0]$ em que $X_0^0(K)$ e $X_0^1(K)$ se interceptam (Figura 5).

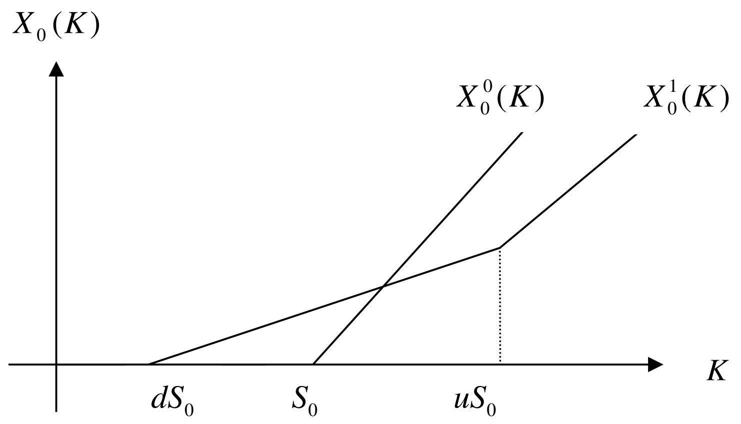

Figura 5 - Opção americana de venda no modelo de 1 passo.

Dado, portanto, um preço de exercício *K*, o valor de arbitragem de uma opção americana de venda, $X_0(K)$, no modelo binomial de um passo, só pode ser determinado comparando-se os valores de $X_0^0(K)$ e $X_0^1(K)$.

4.5 Valor de arbitragem de uma opção americana de venda no modelo de T passos.

O resultado obtido no modelo de um passo pode ser um complicador na determinação do valor de arbitragem, visto que, segundo a teoria de arbitragem, esse valor é dado pelo valor inicial capaz de estabelecer um portfólio que reproduza o valor de exercício da opção em qualquer tempo. Na impossibilidade de se replicarem todos os valores possíveis, estabelece-se um super-hedge, ou seja, um portfólio capaz de replicar o maior dentre todos os valores de exercício. Para opções de compra isso foi simplificado pela constatação de que o maior valor de exercício acontece no tempo final. No caso presente, já se viu que, mesmo no caso simples do modelo de 1 passo, isto não acontece. Então, com a finalidade de verificar se isto não passa de uma situação particular do modelo de 1 passo, e ainda de buscar alguma regularidade que possa simplificar a determinação do maior valor de exercício, examina-se o valor de arbitragem de uma opção americana de venda, supondo que o exercício se dê em um tempo *t* qualquer. Com a mesma notação usada em 4.4 esse valor é dado por:

$$X_0^t = (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^{t} (K - u^j d^{t-j} S_0)^+ \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j}.$$

O que se constata é que, para diferentes valores de t, as funções X_0^t se interceptam em algum valor de *K*.

Para todo $t \in \{0,1,...,T\}$ e $K \in (d^t S_0, d^{t-1} S_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} X_0^t = \dfrac{1}{(1+r)^t}(K - d^t S_0)(q^*)^t > 0 \\ X_0^{t-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X_0^t > X_0^{t-1}. \tag{7}$$

Para $K = u^T S_0$.

$$X_0^t = (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^{t} (u^T S_0 - u^j d^{t-j} S_0)^+ \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^t} [\sum_{j=0}^{t} u^T S_0 \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j} - \sum_{j=0}^{t} u^j d^{t-j} S_0 \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j})]$$

$$= \frac{u^T S_0}{(1+r)^t} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (p^*)^j (q^*)^{t-j} - S_0 \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (\frac{up^*}{1+r})^j (\frac{dq^*}{1+r})^{t-j}$$

$$= S_0[\frac{u^T}{(1+r)^t} - 1]. \tag{8}$$

Esse último resultado mostra que, para $K = u^T S_0$, X_0^t é uma função decrescente de t, ou seja, $X_0^t(u^T S_0) < X_0^{t-1}(u^T S_0)$. O que se conclui, comparando-se este último resultado com (7), é que, para diferentes valores de t, as funções X_0^t se interceptam.

Confirma-se então o que já se podia antever, dado o resultado do modelo de um passo: preço de arbitragem de opção americana de venda não é trivial. A complicação está em que, para se estabelecer o valor inicial do portfólio de hedge é preciso comparar o valor de exercício da opção no tempo inicial com os valores arbitrais da opção no tempo seguinte. Acontece que nenhum desses valores arbitrais está bem estabelecido, visto que a situação se repete, ou seja, o estabelecimento de qualquer um deles depende do valor de exercício da opção naquele momento e dos possíveis valores arbitrais do tempo seguinte. A conclusão é que, em se tratando de opções americanas de venda, o único caminho para se chegar ao valor de arbitragem inicial exato é pela construção de toda a árvore de hedge a partir do tempo final, visto que, este último é o único tempo em que se conhece exatamente o valor de arbitragem da opção. Não se trata realmente de um grande problema tendo em vista os recursos computacionais usualmente disponíveis. O algoritmo de construção do portfólio de Hedge é dado por:

$$X_T = (K - S_T)^+$$

$$X_t = max\{(K - S_t)^+, (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} \mid \mathcal{G}_t]\};$$

e o melhor tempo de exercício é o primeiro tempo em que o valor do portfólio coincide com o valor de exercício da opção. Isto significa que, caso o portador da opção deixe passar esse tempo, o vendedor (emissor) pode "consumir" o valor correspondente a:

$$(K - S_t)^+ - (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} \mid \mathcal{G}_t];$$

visto que, se:

$$X_t = max\{(K - S_t)^+, (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} \mid \mathcal{G}_t]\} = (K - S_t)^+;$$

segue que:

$$(K - S_t)^+ \geq (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} \mid \mathcal{G}_t];$$

e, como o valor necessário para reproduzir os valores arbitrais futuros é dado por:

$$(1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} \mid \mathcal{G}_t];$$

a diferença:

$$(K - S_t)^+ - (1+r)^{-1} E^*[X_{t+1} \mid \mathcal{G}_t];$$

pode ser consumida.

Conclusão

O problema do estabelecimento do preço de arbitragem de opções americanas, que usualmente é tratado com argumentos financeiros (Black e Scholes, 1973) ou via uma abordagem não trivial, usando o conceito de Martin Gales (Williams, 2002), pode também ser abordado de maneira elementar, através da teoria de funções convexas. Mais especificamente, partindo-se do fato de que o valor de arbitragem de uma opção americana, quando exercida em um tempo futuro qualquer, é uma função convexa do preço de exercício, é possível, de uma maneira extremamente simples, chegar-se às mesmas conclusões obtidas via Martin Gales ou teoria econômica, ou seja, que opções americanas de compra se comportam como opções europeias e que o mesmo não acontece com opções americanas de venda.

SOUZA, D. J.; CHAVES, L. M. Convex functions in the options arbitrage pricing theory using binomial models. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.30, n.2, p.223-238, 2012.

- *ABSTRACT: In this work, elementary mathematical tools, based on convex functions properties, are used to derive the arbitrage price for American options. Markets are considered complete and discrete in time and stock prices are supposed to behave according to binomial models.*

- *KEYWORDS: Option; binomial model; arbitrage; derivative.*

Referências

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, Amsterdam, v.81, n.3, p.637-659, 1973.

COX, J. C.; ROOS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. *J. Financ. Econ.*, Lausanne, v.7, n.3, p.229-263, 1979.

HULL, J. C. *Options, futures and other derivatives*. 7.ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2009. 814p.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. Manage. Sci.*, New York, v.4, n.1, p.141-183, 1973.

SHREVE, S. E. *Stochastic calculus and finance.* New York: Springer, 2004. v.1.

WILLIAMS, D. *Probability with martingales.* 6.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 272p.

Recebido em 27.02.2012

Aprovado após revisão 03.09.2012