ESTIMADORES DE MÍNIMOS QUADRADOS NO MODELO DE CALIBRAÇÃO ESTRUTURAL SEM SUPOSIÇÃO DE NORMALIDADE

Manoel DOMINGOS FILHO[1]

- RESUMO: Esse artigo tem por objetivo principal em mostrar um estudo detalhado das propriedades dos estimadores de mínimos quadrados sobre os parâmetros do modelo de calibração estrutural, quando a suposição de normalidade nos erros de mensuração e nas variáveis for suprimida. Como a distribuição dos estimadores de mínimos quadrados não possui momentos finitos, Kendall e Stuart (1952), então os resultados apresentados nesse artigo são aproximações para a esperança e variância da distribuição assintótica destes estimadores. Inicialmente será apresentada e demonstrada a forma analítica das expressões assintóticas das esperanças e variâncias dos estimadores e posteriormente será realizada uma investigação sobre os estimadores obtidos para verificar se eles satisfazem as propriedades de serem não viesados e consistentes.

- PALAVRAS-CHAVE: Calibração absoluta; modelo estrutural; estimadores; coeficiente de atenuação.

1 INTRODUÇÃO

Uma importante aplicação de um modelo de regressão é fazer previsão ou estimar novos valores da variável dependente, a partir de valores observados ou atribuídos à variável independente. Para que essas previsões sejam boas é essencial que os parâmetros envolvidos no modelo de regressão tenham estimadores que satisfaçam algumas propriedades tais como não-viés e consistência. Como um modelo de calibração é em sua essência um modelo de regressão, chamado de regressão inversa, então os valores da variável independente podem ser estimados a partir de valores observados da variável dependente. O modelo de calibração linear pode ser formalmente definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, \ i = 1,2,...,n \\ Y_{0i} &= \alpha + \beta X_0 + \varepsilon_{0i}, \ i = n+1,...,n+k; \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$; $\varepsilon_{0n+1},...,\varepsilon_{0n+k}$ são erros de medidas que são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância constante σ_ε^2. As quantidades

[1] Universidade Federal do Acre – UFAC, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET, CEP: 69915-900, Rio Branco, AC, Brasil. E-mail: *manoelufsc@yahoo.com.br*

$X_1,...,X_n$ são consideradas constantes conhecidas enquanto que α, β, X_0 e σ_ε^2 são parâmetros desconhecidos.

Um dos fatores que motivou o estudo as propriedades dos estimadores de mínimos quadrados no modelo de calibração estrutural é o fato de que neste tipo de modelo, a variável independente é considerada uma variável aleatória determinada por alguma distribuição de probabilidade. Além disso, considerou-se a calibração absoluta, porque nesse tipo de calibração um instrumento ou uma técnica de medida sujeita a erro é calibrado versus outra medida padrão que é conhecida, ou então é feita com erro experimental desprezível. A consideração de que o Coeficiente de Atenuação seja uma constante conhecida tem por objetivo a obtenção de estimadores assintoticamente consistentes. Na prática o Coeficiente de Atenuação nem sempre será conhecido, mas em muitas situações ele pode ser estimado, principalmente se os dados forem obtidos com réplicas.

Os modelos de calibração têm sido objeto de estudo por muitos pesquisadores e muitos trabalhos importantes foram publicados. Dentre esses se destacam os trabalhos de Shukla (1972) que utilizou expansões em série de Taylor e supondo que os erros do modelo fossem normalmente distribuídos, obteve aproximações de primeira ordem das esperanças, variâncias e erros quadráticos médios dos estimadores clássicos e inverso. O objetivo de Shukla era comparar qual dos estimadores (clássico ou inverso) é o melhor, utilizando o erro quadrático médio como critério de comparação.

Lwin (1981) obteve expressões aproximadas para os erros quadráticos médios dos estimadores sob o modelo de calibração sem a suposição de que os erros fossem normalmente distribuídos. Ele admitiu apenas que a distribuição dos erros pertencesse a uma família de distribuições com o quarto momento finito.

Lee e Yum (1989) fizeram comparações através de expressões aproximadas para o erro quadrático médio de alguns procedimentos utilizados no problema de calibração. Estes procedimentos são baseados na estimação de máxima verossimilhança e de mínimos quadrados ordinários combinados com os estimadores clássico e inverso, assumindo que a razão das variâncias dos erros de medida fosse conhecida, com apenas uma observação na segunda etapa do modelo.

Bolfarine *et al.* (1997) estudaram este modelo quando $k \geq 1$ e mostraram que as expressões obtidas por Lee e Yum (1989) estavam incorretas até a ordem n^{-1} para o caso em que $k = 1$ onde k é o tamanho da amostra na segunda etapa de calibração.

Considerando o modelo de calibração funcional, Bolfarine *et al.* (1999) estudaram o comportamento dos estimadores clássico e inverso combinados com os estimadores de mínimos quadrados, sob a suposição de que uma das variâncias dos erros de medida fosse conhecida. Os estimadores propostos foram comparados analiticamente e via estudos de simulação, obtendo resultados semelhantes aos de Shukla (1972). A seguir, será apresentada a expressão pela qual os verdadeiros valores de X_i serão previstos (estimados).

É importante ressaltar que o problema de calibração é usualmente caracterizado por duas variáveis, as quais são X_i e Y_i, supostamente relacionadas por meio de uma função f conhecida, de tal forma que Y_i seja um valor obtido com um erro de observação ε_i, e X_i

é uma quantidade fixa ou controlada, portanto sem erro de medida, definida em um intervalo I denominado de intervalo de calibração.

Na primeira etapa do experimento de calibração, amostram-se n observações da variável aleatória Y_i, a partir de valores prefixados de X_i, de modo que se possa estimar a função f que relaciona as duas variáveis. Portanto, X_i e Y_i podem se relacionar através do modelo $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$. Numa segunda etapa, "a calibração propriamente dita", seleciona-se uma amostra aleatória de tamanho $k(k \geq 1)$ da variável Y_i, digamos Y_0, correspondente a um único valor de X_i desconhecido, digamos X_0. Deseja-se, então, estimar este valor desconhecido X_0 baseado nas informações do ponto de interesse e da função estimada no experimento de calibração.

Exemplo. Considere uma partícula que se move em movimento uniforme a partir de um ponto de referência, segundo a equação, $S = \alpha + \beta X$, onde S é à distância percorrida num determinado intervalo de tempo X_i. É assumido que o tempo possa ser observado sem erro de medida. Entretanto, à distância S não pode ser medida exatamente, de modo que podemos somente observar o valor de Y onde $Y = S + \varepsilon$, ou seja, a verdadeira distância percorrida S mais um erro aleatório ε. Uma amostra de tamanho n é obtida pelo pesquisador prefixando o tempo X_i e observando as distâncias Y_i correspondentes. Assim, o pesquisador pode estimar o modelo $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$. Tendo o pesquisador observado que a partícula se moveu uma distância Y_0, ele quer saber qual foi o tempo necessário X_0 para que a partícula percorresse essa distância Y_0.

Dessa forma, conduziu-se este estudo com o objetivo de comparar e avaliar a robustez dos estimadores de mínimos quadrados nos modelos de calibração estrutural sem a suposição de normalidade, onde se utilizou um estudo de simulação Monte Carlo para confirmar os resultados obtidos analiticamente.

2 Metodologia

Para que se possam obter as expressões assintóticas para a esperança e a variância dos estimadores, serão considerados os previsores clássicos e inversos da quantidade de interesse U_0 como mostrado em Shukla (1972). Em outras palavras, uma vez estabelecida a expressão matemática dos previsores, faz-se expansão em série de Taylor em torno de um ponto conveniente, para obter as expressões da esperança e da variância assintótica e conseqüentemente o vício ou viés dos estimadores. Como os resultados esperados são todos assintóticos, então a análise do vício e da consistência dos estimadores será realizada através do limite desses estimadores quando o tamanho da amostra tende ao finito, tanto primeira como na segunda etapa de calibração.

3 Resultado e discussão

Nesta seção serão apresentados os estimadores de mínimos quadrados no modelo de calibração e será realizada uma discussão detalhada de suas propriedades. A ênfase principal se dá no modelo estrutural com a estrutura dos erros da forma aditiva como mostrado a seguir.

3.1 Esperanças e variâncias dos estimadores de mínimos quadrados

Inicialmente esta subseção vai apresentar o modelo de calibração linear estrutural em sua forma aditiva nos erros de mensuração.

Formalmente o modelo de calibração linear estrutural pode ser definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., n \\ X_i &= U_i + \delta_i,\ i = 1, 2, ..., n \\ Y_{0i} &= \alpha + \beta U_0 + \varepsilon_{0i},\ i = n+1, ..., n+k; \end{aligned} \tag{2}$$

em que α e β são parâmetros desconhecidos, os erros de medidas $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$, $\varepsilon_{0n+1},...,\varepsilon_{0n+k}$, $\delta_1,...,\delta_n$ e as variáveis aleatórias $U_1,...,U_n$ são considerados mutuamente independentes, com as seguintes suposições adicionais: $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0n+i}) = E(\delta_i) = 0$ e os momentos $E(\varepsilon_i^j) = m_j^{\varepsilon}$, $E(\delta_i^j) = m_j^{\delta}$, $j = 2, 3, 4$ e $E(U_i^j) = E(U_{0i}^j) = m_j^u$, $j = 1, 2, 3, 4$ existem e são finitos. A variância de U_i é igual à variância de U_0 e é definida como $\sigma_u^2 = m_u^2 - (m_1^u)^2$ e a esperança de U_i é igual à esperança de U_0 sendo denotada por $E(U_i) = E(U_0) = m_1^u$.

É importante ressaltar ainda que para o modelo de calibração estrutural, o problema a ser considerado é um problema de previsão e não de estimação, como acontece com o modelo de calibração funcional. Isto quer dizer que no modelo de calibração estrutural a estatística utilizada para prever novos valores da variável dependente utilizando o modelo ajustado na primeira etapa de calibração, é chamada de previsor e não estimador, pelo fato da variável U_i ser considerada uma variável aleatória caracterizada por uma determinada distribuição de probabilidade.

No modelo (2), as duas primeiras equações dizem respeito à primeira etapa de calibração, enquanto que a terceira equação só diz respeito à segunda etapa de calibração, também conhecida como calibração propriamente dita. Como já foi dito na introdução, a primeira etapa do problema consiste em utilizar uma amostra para estimar a função que relaciona as variáveis X_i e Y_i. Já a segunda etapa utiliza a função estimada na etapa I e a partir de uma amostra de tamanho $k(k \geq 1)$ observado da variável dependente Y_i obtém-se uma estimativa para um único valor da variável independente, denominado por U_0. Os previsores utilizados para prever os verdadeiros valores da quantidade desconhecida U_0

são os previsores clássicos e inversos como mostrado em Shukla (1972) e Lima (1996), combinados com estimadores dos parâmetros α, β, γ e ϕ. Isto é, os verdadeiros valores de U_0 serão previstos pela utilização das seguintes estatísticas:

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \qquad e \qquad \hat{U}_{0I} + \hat{\gamma} + \hat{\phi}\bar{Y}_0; \tag{3}$$

em que $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\phi}$ são estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros α, β, γ e ϕ, respectivamente. Fazendo uma combinação entre os previsores, clássico e inverso de U_0 com os estimadores usuais de mínimos quadrados dos parâmetros α, β, γ e ϕ, dados por:

$$\hat{\alpha}_Q = \bar{Y} - \hat{\beta}_Q \bar{X}, \qquad \hat{\beta}_Q = \frac{S_{xy}}{S_{xx}},\ \hat{\gamma}_Q = \bar{X} - \hat{\phi}_Q \bar{Y} \quad e \quad \hat{\phi}_Q = \frac{S_{xy}}{S_{yy}}; \tag{4}$$

obtêm-se as seguintes expressões para os previsores:

$$\hat{U}_{0CQ} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_Q}{\hat{\beta}_Q} \ \text{ e } \ \hat{U}_{0IQ} + \hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0;$$

onde: $\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$ e $\dfrac{S_{xy}}{S_{yy}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$.

Os previsores $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são denominados previsores clássicos e inversos de U_0, respectivamente, combinados com os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros α, β, γ e ϕ. Para que esses previsores sejam considerados boas estatísticas no sentido de oferecer resultados confiáveis e estatisticamente consistentes com a realidade da variável U_0 se fazem necessário que os estimadores de mínimos quadrados satisfaçam algumas propriedades desejáveis tais como: serem não-viesados e consistentes. A seguir são apresentados os resultados analíticos para as expressões da esperança e da variância dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros da reta de calibração.

Teorema 1. Sob as condições estabelecidas no modelo (2) tem-se que:

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta L}{(L+1)} + \frac{2\beta L(L-1)}{n(L+1)^3} + \frac{\beta L[m_4^{\delta} - (m_2^{\delta})^2]}{n\sigma_u^4(L+1)^3} - \frac{\beta L^2 \Sigma}{n\sigma_u^4(L+1)^3} + O(n^{-2});$$

$$Var(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta^2 L^4 \Gamma}{n\sigma_u^4(L+1)^4} + \frac{\beta^2 L^2 \Theta + m_2^{\varepsilon}\sigma_u^2 + m_2^{\delta} m_2^{\varepsilon}}{n\sigma_u^4(L+1)^2} - \frac{2\beta^2 L^3 \mathrm{A}}{n\sigma_u^4(L+1)^3} + O(n^{-2});$$

em que: $\Sigma = m_4^u - (m_2^u)^2 - 4m_1^u m_3^u + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4$;

$$\Gamma = m_4^u + 4m_2^u m_2^\delta + m_4^\delta - 4m_1^u m_3^u - 4m_2^\delta (m_1^u)^2 + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4 - (m_2^u)^2 - (m_2^\delta)^2;$$

$$\Theta = m_4^u - 4m_1^u m_3^u + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4 - (m_2^u)^2 + m_2^u m_2^\delta - m_2^\delta (m_1^u)^2;$$

$$\mathrm{A} = m_4^u - 4m_1^u m_3^u + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4 - (m_2^u)^2 + 2m_2^\delta \sigma_u^2 \text{ e } L = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\delta^2}.$$

Demonstração: Observe que o estimador $\hat{\beta}_Q$ dado em (4) é função dos momentos amostrais (S_{xy}, S_{xx}). Assim, se $\hat{\beta}_Q$ for expandido em série de Taylor até ordem n^{-2}, em torno do ponto $a = (E(S_{xy}), E(S_{xx}))$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\hat{\beta}_Q = f(a) + \frac{(S_{xy} - E(S_{xy}))}{1!} \frac{\partial \hat{\beta}_Q}{\partial S_{xy}}\Big|_a + \frac{(S_{xx} - E(S_{xx}))}{1!} \frac{\partial \hat{\beta}_Q}{\partial S_{xx}}\Big|_a + \frac{(S_{xy} - E(S_{xy}))^2}{2!} \frac{\partial^2 \hat{\beta}_Q}{\partial S_{xy}^2}\Big|_a +$$
$$+ \frac{(S_{xx} - E(S_{xx}))^2}{2!} \frac{\partial^2 \hat{\beta}_Q}{\partial S_{xx}^2}\Big|_a + (S_{xy} - E(S_{xy}))(S_{xx} - E(S_{xx})) \frac{\partial^2 \hat{\beta}_Q}{\partial S_{xy} \partial S_{xx}}\Big|_a + O_p(n^{-2});$$

onde após fazer a substituição do ponto a nas derivadas acima, obtém-se uma nova expressão para $\hat{\beta}_Q$ a qual é dada por:

$$\hat{\beta}_Q = \frac{\beta L}{(L+1)} + \left(\frac{1}{\sigma_\delta^2 (L+1)} + O(n^{-1})\right) \frac{(S_{xy} - E(S_{xy}))}{1!} + \left(\frac{-\beta L}{\sigma_\delta^2 (L+1)^2} + O(n^{-1})\right) \frac{(S_{xx} - E(S_{xx}))}{1!} +$$
$$\left(\frac{2\beta L}{\sigma_\delta^4 (L+1)^3} + O(n^{-1})\right) \frac{(S_{xx} - E(S_{xx}))}{2!} + \left(\frac{-1}{\sigma_\delta^4 (L+1)^2} + O(n^{-1})\right) \times$$
$$(S_{xy} - E(S_{xy}))(S_{xx} - E(S_{xx})) + O_p(n^{-2}).$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtêm-se os seguintes resultados:

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta L}{(L+1)} + \frac{2\beta L Var(S_{xx})}{\sigma_\delta^4 (L+1)^3} - \frac{Cov(S_{xy}, S_{xx})}{\sigma_\delta^4 (L+1)^2} + O(n^{-2}); \tag{5}$$

$$Var(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta^2 L^2 Var(S_{xx})}{\sigma_\delta^4 (L+1)^4} + \frac{Var(S_{xy})}{\sigma_\delta^4 (L+1)^2} - \frac{2\beta L Cov(S_{xy}, S_{xx})}{\sigma_\delta^4 (L+1)^3} + O(n^{-2}). \tag{6}$$

Para obter o valor da esperança e da variância nas expressões (5) e (6) acima em sua forma mais explícita, basta substituir nessas expressões os resultados das variâncias e covariâncias dos segundos momentos amostrais apresentados por Domingos Filho *et al.* (2011) os quais são:

$$Var(S_{xx}) = \Psi + O(n^{-2}); \tag{7}$$

$$Var(S_{xy}) = \Upsilon + \Lambda + O(n^{-2}); \tag{8}$$

$$Cov(S_{xy}, S_{xx}) = \mathrm{H} + O(n^{-2}); \tag{9}$$

em que: $\Psi = \dfrac{m_4^u + 4\sigma_u^2 m_2^\delta + m_4^\delta - 4m_1^u m_3^u + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4 - (m_2^u)^2 - (m_2^\delta)^2}{n}$;

$\Upsilon = \dfrac{\beta^2 [m_4^u - 4m_1^u m_3^u + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4 - (m_2^u)^2]}{n}$;

$\Lambda = \dfrac{\beta^2 m_2^\delta \sigma_u^2 + m_2^u m_2^\varepsilon - m_2^\varepsilon (m_1^u)^2 + m_2^\delta m_2^\varepsilon}{n}$;

$\mathrm{H} = \dfrac{\beta [m_4^u - 4m_1^u m_3^u + 8m_2^u (m_1^u)^2 - 4(m_1^u)^4 - (m_2^u)^2] + 2m_2^\delta \sigma_u^2}{n}$.

Com a substituição de (7) – (9) em (5) e (6), obtém-se, após alguma álgebra, o resultado desejado.

Teorema 2. Sob as condições estabelecidas no modelo (2) tem-se que:

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{Z}{\beta(Z+1)} + \frac{A+B}{n\sigma_\varepsilon^6 (Z+1)^3} + O(n^{-2});$$

$$Var(\hat{\phi}_Q) = \frac{C}{n\sigma_\varepsilon^4 (Z+1)^2} - \frac{D}{n\beta\sigma_\varepsilon^4 (Z+1)^3} + \frac{E}{n\beta^2 \sigma_\varepsilon^4 (Z+1)^4} + O(n^{-2});$$

onde: $A = 2\beta^3 \sigma_u^4 \sigma_\varepsilon^2 + \beta\sigma_u^2 [m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2] - \beta^3 m_2^\varepsilon [m_4^u - (m_2^u)^2]$;

$B = 4\beta^3 m_2^\varepsilon m_1^u [m_3^u - 2m_1^u m_2^u + (m_1^u)^3] - 2\beta\sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^4$;

$C = \beta^2 [m_4^u - 4m_1^u (m_3^u - 2m_1^u m_2^u + (m_1^u)^3) - (m_2^u)^2 + m_2^\delta \sigma_u^2] + m_2^\varepsilon \sigma_u^2 + m_2^\varepsilon m_2^\delta$;

$D = 2Z\{\beta^3 [m_4^u - 4m_1^u (m_3^u - 2m_1^u m_2^u + (m_1^u)^3) - (m_2^u)^2] + 2\beta m_2^\varepsilon \sigma_u^2\}$;

$E = Z^2 [\beta^4 (m_4^u - (m_2^u)^2) + 4\beta^2 m_2^\varepsilon \sigma_u^2 - (m_2^\varepsilon)^2 - 4\beta^4 m_1^u (m_3^u - 2m_1^u m_2^u + (m_1^u)^3) + m_4^\varepsilon]$;

$Z = \dfrac{\beta^2 \sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$.

Demonstração: Observe que o estimador $\hat{\phi}_Q$ dado em (4) é função dos momentos amostrais (S_{xy}, S_{yy}). Portanto, se $\hat{\phi}_Q$ for expandido em série de Taylor até ordem n^{-2}, em torno do ponto $a = (E(S_{xy}), E(S_{yy}))$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\hat{\phi}_Q = f(a) + \frac{(S_{xy} - E(S_{xy}))}{1!}\frac{\partial \hat{\phi}_Q}{\partial S_{xy}}\Big|_a + \frac{(S_{yy} - E(S_{yy}))}{1!}\frac{\partial \hat{\phi}_Q}{\partial S_{yy}}\Big|_a + \frac{(S_{xy} - E(S_{xy}))}{2!}\frac{\partial^2 \hat{\phi}_Q}{\partial S_{xy}^2}\Big|_a +$$
$$\frac{(S_{yy} - E(S_{yy}))^2}{2!}\frac{\partial^2 \hat{\phi}_Q}{\partial S_{yy}^2}\Big|_a + (S_{xy} - E(S_{xy}))(S_{yy} - E(S_{yy}))\frac{\partial^2 \hat{\phi}_Q}{\partial S_{xy}\partial S_{yy}}\Big|_a + O_p(n^{-2}).$$

Após fazer a substituição do ponto a nas derivadas da expressão acima, obtém-se uma nova expressão para $\hat{\phi}_Q$ a qual é dada por:

$$\hat{\phi}_Q = \frac{\beta\sigma_u^2}{\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{(\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)} + O(n^{-1})\right)(S_{xy} - E(S_{xy})) + \left(\frac{-\beta\sigma_u^2}{(\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)^2} + O(n^{-1})\right)\times$$
$$(S_{yy} - E(S_{yy})) + \left(\frac{2\beta\sigma_u^2}{(\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)^3} + O(n^{-1})\right)\frac{(S_{yy} - E(S_{yy}))^2}{2} + \left(\frac{-1}{(\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)} + O(n^{-1})\right)\times$$
$$(S_{xy} - E(S_{xy}))\times(S_{yy} - E(S_{yy})) + O(n^{-2}).$$

Portanto, tomando a esperança e a variância da expressão acima, obtém-se após alguma álgebra às seguintes expressões:

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{Z}{\beta(Z+1)} + \frac{Zvar(S_{yy})}{\beta\sigma_\varepsilon^4(Z+1)^3} - \frac{Cov(S_{xy}, S_{yy})}{\sigma_\varepsilon^4(Z+1)^2} + O(n^{-2}); \qquad (10)$$

$$Var(\hat{\phi}_Q) = \frac{var(S_{xy})}{(\beta^2\sigma_u^4 + \sigma_\varepsilon^2)^2} + \frac{\beta^2\sigma_u^4 var(S_{yy})}{(\beta^2\sigma_u^4 + \sigma_\varepsilon^2)^4} - \frac{2\beta\sigma_u^2 Cov(S_{xy}, S_{yy})}{(\beta^2\sigma_u^4 + \sigma_\varepsilon^2)^3} + O(n^{-2}) \qquad (11)$$

Segundo Domingos Filho *et al.* (2011), as expressões das variâncias e covariâncias assintóticas contidas nas expressões (10) e (11) são dadas por:

$$Var(S_{yy}) = \Omega + O(n^{-2}); \qquad (12)$$

em que: $\Omega = \dfrac{4\beta^2\sigma_u^2 m_2^\varepsilon + \beta^4(m_4^u - (m_2^u)^2) - (m_2^\varepsilon)^2 - 4\beta^4 m_1^u(m_3^u - 2m_1^u m_2^u + (m_1^u)^3) + m_4^\varepsilon}{n}$.

$$Cov(S_{xy}, S_{yy}) = \theta + O(n^{-2}); \tag{13}$$

em que: $\theta = \dfrac{\beta^3[m_4^u - 4m_1^u(m_3^u - 2m_1^u m_2^u + (m_1^u)^3) - (m_2^u)^2] + 2\beta m_2^\varepsilon \sigma_u^2}{n}$.

Com a substituição de (8), (12) e (13) nas expressões (10) e (11), obtém-se, após alguma álgebra, o resultado desejado.

Teorema 3. Sob o modelo (2) e com a suposição de que o coeficiente de atenuação $k_u = \dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}$ seja conhecido, tem-se que:

$$\hat{\beta}_C = \frac{\hat{\beta}_Q}{k_u} = \frac{S_{xy}}{k_u S_{xx}} \quad e \quad \hat{\alpha}_C = \bar{Y} - \hat{\beta}_C \bar{X} \; ; \tag{14}$$

são estimadores fortemente consistentes para os parâmetros β e α, respectivamente.

Demonstração: Sejam $X_1Y_1, X_2Y_2, \ldots,$ variáveis aleatórias independentes com a esperança e a variância sendo escritas da seguinte forma:

$$E(X_iY_i) = \alpha m_1^u + \beta m_2^u \, ;$$

$$Var(X_iY_i) = \alpha^2[m_2^u + m_2^\delta - (m_1^u)^2] + \beta^2[m_4^u - (m_2^u)^2 + m_2^\varepsilon m_2^\delta] +$$
$$+ m_2^\varepsilon m_2^u + m_1^u m_2^\delta + 2\alpha\beta m_3^u + 2\alpha\beta m_1^u m_2^\delta - \beta^2(m_1^u m_2^\delta)^2;$$

para $i = 1, 2, \ldots,$ de modo que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{Var(X_iY_i)}{n^2} < \infty$.

Pela primeira lei forte dos grandes números de Kolmogorov, conclui-se que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_iY_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \alpha m_1^u + \beta m_2^u$.

Similarmente, mostra-se facilmente que a estatística $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{Y_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \alpha + \beta m_1^u$;

$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} m_1^u$; $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i^2}{n} \xrightarrow{q.c.} m_2^u + m_2^\delta$; $S_{xx} \xrightarrow{q.c.} m_2^u + m_2^\delta - (m_1^u)^2$ e $S_{xy} \xrightarrow{q.c.} \beta[m_2^u - (m_1^u)^2]$.

Note que os estimadores $\hat{\beta}_C$ e $\hat{\alpha}_C$ são funções contínuas dos momentos amostrais $(\bar{X}, \bar{Y}, S_{xx} \text{ e } S_{xy})$, exceto quando $S_{xx} = 0$. Então, segue-se de (14) que $\lim_{n\to\infty} \hat{\beta}_C = \beta$ e $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_C = \alpha$, com probabilidade 1 (um), o que prova a consistência forte destes estimadores.

Teorema 4. Sob o modelo (2) com a suposição de que a constante k_u, seja conhecida, segue-se que:

$$\hat{\phi}_C = \frac{k_u S_{xx}}{S_{xy}} \quad e \quad \hat{\gamma}_C = \bar{X} - \hat{\phi}_C \bar{Y}\ ; \tag{15}$$

são estimadores fortemente consistentes para os parâmetros ϕ e γ.

Demonstração: De forma semelhante ao Teorema 3 mostram-se facilmente os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i Y_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\phi}(m_2^u - \gamma m_1^u)\ ; \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} m_1^u\ ; \quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\phi}(m_1^u - \gamma)\ ;$$

onde: $\gamma = \frac{-\alpha}{\beta}$ e $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{n} \xrightarrow{q.c.} m_2^u + m_2^\delta$.

A prova da consistência forte desses estimadores vem do fato deles serem funções contínuas dos momentos amostrais $(\bar{X}, \bar{Y}, S_{xy} \text{ e } S_{xx})$. Isto é, com probabilidade um, temos que $\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}_C = \phi$ e $\lim_{n\to\infty} \hat{\gamma}_C = \gamma$.

Outros estimadores consistentes dos parâmetros α, β, γ e ϕ poderiam ser encontrados, porém, seria necessário o conhecimento, por exemplo, de m_2^ξ, o que na prática não é algo comum.

Observe-se que $\hat{\phi}_C = \frac{1}{\hat{\beta}_C}$, o que implica na igualdade dos previsores clássico e inverso combinados com estimadores consistentes, isto é,

$$\hat{U}_{0IC} = \gamma_C + \hat{\phi}_C \bar{Y}_0 = \frac{-\hat{\alpha}_C}{\hat{\beta}_C} + \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_C} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_C}{\hat{\beta}_C} = \hat{U}_{0C}.$$

A constante k_u que aparece nas expressões dos Teoremas 3 e 4, é denominada de Coeficiente de Atenuação, e mede o quanto da variabilidade de X_i é explicada pela variabilidade de U_i, uma vez que ela é definida como: $k_u = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}$. Claramente pode-se observar que esta constante está compreendida no intervalo [0,1] e quanto mais próxima da unidade estiver k_u, significa que menores serão os erros de medida da variável independente X_i. Conseqüentemente, quanto mais afastado estiver da unidade, maiores serão esses erros de mensuração. Na construção deste artigo, esta constante k_u é considerada conhecida ou possível de ser estimada. Na prática esta constante não é conhecida, a priori, mas pode ser estimada facilmente se houver réplicas na obtenção dos dados observados. Uma função muito importante do coeficiente de atenuação reside no fato dele nos dizer o quanto que o modelo de calibração com erros nas variáveis se afasta ou se aproxima de um modelo sem erros na variável independente X_i.

No próximo Teorema são obtidas aproximações de primeira ordem da esperança e variância assintótica do estimador consistente $\hat{\beta}_C$.

Teorema 5. Sob o modelo (2) e com a suposição de que o coeficiente de atenuação k_u seja conhecido tem-se que:

$$E(\hat{\beta}_C) = \beta + \frac{2\beta(L-1)}{n(L+1)^2} + \frac{F}{n\sigma_u^4(L+1)^2} + O(n^{-2});$$

$$Var(\hat{\beta}_C) = \frac{G}{n\sigma_\delta^4 L^2} + \frac{H}{n\sigma_\delta^4(L+1)^2} - \frac{J}{n\sigma_\delta^4(L+1)} + O(n^{-2});$$

em que: $F = \beta L[L(m_4^\delta - (m_2^\delta)^2) - m_4^u + (m_2^u)^2 + 4m_1^u(m_3^u + (m_1^u))^3 - 2m_1^u m_2^u]$;

$$G = \beta^2[m_4^u - 4m_1^u(m_3^u - 2m_2^u m_1^u + (m_1^u)^3) - (m_2^u)^2 + m_2^\delta\sigma_u^2] + m_2^\varepsilon\sigma_u^2 + m_2^\varepsilon m_2^\delta;$$

$$H = \beta^2[m_4^u + 4\sigma_u^2 m_2^\delta + m_4^\delta - 4m_1^u(m_3^u - 2m_2^u m_1^u + (m_1^u)^3) - (m_2^u)^2 - (m_2^\delta)^2];$$

$$J = 2\beta^2[m_4^u + 2\sigma_u^2 m_2^\delta - 4m_1^u(m_3^u - 2m_2^u m_1^u + (m_1^u)^3) - (m_2^u)^2.$$

Demonstração: Como já foi visto anteriormente em (14), $\hat{\beta}_C = \dfrac{\hat{\beta}_Q}{k_u}$. Portanto, para obter a esperança e a variância assintótica de $\hat{\beta}_C$ basta multiplicar a esperança e a variância de $\hat{\beta}_Q$ obtidas pelo Teorema 1, por $\dfrac{1}{k_u}$ e $\dfrac{1}{k_u^2}$, respectivamente, que o resultado do lema fica demonstrado.

A seguir, será realizado um estudo sobre o vício dos estimadores apresentados nos Teoremas 1, 2 e 5, uma vez que nos Teoremas 3 e 4 já mostramos que os estimadores são consistentes.

3.2 Estudo do vício dos estimadores

Observando os resultados apresentados nos Teoremas 1, 2 e 5 vê-se claramente que todos os estimadores propostos são viesados para estimar os parâmetros do modelo de calibração. Será realizado a seguir o estudo analítico dos vícios dos estimadores através de procedimentos como seguem.

No Teorema 1 foi utilizado o estimador clássico de mínimos quadrados de onde se obtém a seguinte expressão assintótica para o vício do estimador $\hat{\beta}_Q$:

$$Vício(\hat{\beta}_Q)=\frac{2\beta L(L-1)}{n(L+1)^3}+\frac{\beta L[m_4^\delta-(m_2^\delta)^2]-W}{n\sigma_u^4(L+1)^3}+O(n^{-2})\ ; \tag{16}$$

onde: $W=\beta L^2[m_4^u-(m_2^u)^2-4m_1^u m_3^u+8m_2^u(m_1^u)^2-4(m_1^u)^4]$.

Calculando o limite da expressão acima obtemos: $\lim_{n\to\infty} Vício(\hat{\beta}_Q)=0$. Portanto, mesmo sendo viesado, tem-se que assintoticamente o estimador clássico de mínimos quadrados é um estimador não viesado para o parâmetro β.

No Teorema 2 foi utilizado o estimador inverso de mínimos quadrados para estimar o coeficiente de inclinação da reta de calibração de onde se obtém a seguinte expressão assintótica para o vício do estimador $\hat{\phi}_Q$:

$$Vício(\hat{\phi}_Q)=\frac{M+N}{n\sigma_\varepsilon^6(Z+1)^3}+O(n^{-2})\ ; \tag{17}$$

em que: $M=2\beta^3\sigma_u^4\sigma_\varepsilon^2+\beta\sigma_u^2[m_4^\varepsilon-(m_2^\varepsilon)^2]-\beta^3 m_2^\varepsilon[m_4^u-(m_2^u)^2]$ **e**

$$N=4\beta^3 m_2^\varepsilon m_1^u[m_3^u-2m_1^u m_2^u+(m_1^u)^3]-2\beta\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^4\ .$$

Ao realizar o cálculo do limite da expressão acima se obteve o seguinte resultado: $\lim_{n\to\infty} Vício(\hat{\phi}_Q)=0$. Portanto, o estimador inverso de mínimos quadrados é um estimador assintoticamente não viesado para estimar o coeficiente de inclinação reta de calibração.

No Teorema 5 foi utilizado o estimador clássico consistente de mínimos quadrados para estimar o coeficiente de inclinação da reta de calibração obtendo a seguinte expressão assintótica para o vício do estimador $\hat{\beta}_C$:

$$Vício(\hat{\beta}_C)=\frac{2\beta(L-1)}{n(L+1)^2}+\Delta+O(n^{-2})\ ; \tag{18}$$

em que: $\Delta=\frac{\beta L[L(m_4^\delta-(m_2^\delta)^2)-m_4^u+(m_2^u)^2+4m_1^u(m_3^u+(m_1^u))^3-2m_1^u m_2^u]}{n\sigma_u^4(L+1)^2}$.

Seguindo a metodologia aplicada nos Teoremas 1 e 2, isto é, calculando o limite da expressão acima obtemos o seguinte resultado: $\lim_{n \to \infty} Vício(\hat{\beta}_C) = 0$. Portanto, o estimador clássico consistente de mínimos quadrados é um estimador não viesado assintoticamente para estimar o coeficiente de inclinação reta de calibração.

3.3 Análise da consistência dos estimadores

Nos Teoremas 1, 2 e 5 foram apresentadas e demonstradas expressões assintóticas das variâncias dos estimadores, sendo que no Teorema 5 foi utilizado o estimador clássico consistente para o parâmetro β. Embora as expressões das variâncias convirjam para zero quando o tamanho da amostra n tende ao infinito, isto não é uma condição necessária e suficiente para que os estimadores sejam consistentes. A consistência dos estimadores é obtida com a inclusão do coeficiente de atenuação nas expressões dos mesmos, como demonstrado nos Teoremas 3 e 4. Portanto, o coeficiente de atenuação desempenha um papel muito importante junto aos estimadores de mínimos quadrados no modelo de calibração.

4 Simulação Monte Carlo

A seguir são apresentados alguns estudos de simulação com o objetivo de verificar o comportamento dos estimadores e fazer comparações das aproximações obtidas para os vícios estudados analiticamente.

Todas as simulações foram realizadas utilizando o Programa Computacional R versão 2.10.1 e executadas num microcomputador PC Pentium Dual Core, 2.8 GHz. Na realização dos estudos 1.000 amostras foram geradas de acordo com o modelo (2), com $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m_1^u = 15$, $\sigma_u^2 = 9$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, $\sigma_\delta^2 = 0{,}1$ e $\sigma_\delta^2 = 10$, para $n = 10, 30$ e 100. Além disso, os vetores $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, ..., \varepsilon_{0n+k})$ e $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n)$ foram gerados a partir das distribuições *t*-Student (simétrica) e gama (assimétrica) e o vetor $U = (U_1, ..., U_n)$ foi gerado a partir de distribuições normal (simétrica) e gama (assimétrica).

Para cada amostra foram calculados os estimadores $\hat{\beta}_Q$, $\hat{\phi}_Q$ e $\hat{\beta}_C$. Como o estimador clássico consistente $\hat{\beta}_C$ depende do conhecimento de k_u, esse estimador também foi calculado considerando-se um valor errado k_u^*, com o objetivo de verificar o quanto o comportamento desse estimador é afetado quando se usa um valor errado para o coeficiente de atenuação. Os vícios aproximados dos estimadores $\hat{\beta}_Q$, $\hat{\phi}_Q$ e $\hat{\beta}_C$, dados em (16), (17) e (18), foram obtidos para cada especificação do modelo.

4.1 Simulação do modelo com distribuição *t*-student

Na simulação desse modelo, os vetores $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\delta}$ foram gerados a partir de uma distribuição *t*-Student com 5 graus de liberdade, o vetor $\boldsymbol{U}$ foi gerado a partir de uma distribuição normal e os resultados são mostrados nas tabelas que se seguem. Em todas as tabelas a abreviação "Emp." significa valor empírico e a abreviação "Aprox." significa valor aproximado.

Tabela 1 – Vício dos estimadores: $\alpha = 0,\ \beta = 1$; $\sigma_u^2 = 9$; $\sigma_\delta^2 = 0,1$; $k_u^* = 0,5$; $k_u = 0,99$

n	$\hat{\beta}_C$			$\hat{\beta}_Q$		$\hat{\phi}_Q$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	0,0021	0,0043	0,0022	0,0020	0,0023	0,0208	0,0228
30	0,0007	0,0014	0,0007	0,0007	0,0007	0,0069	0,0075
100	0,0002	0,0004	0,0002	0,0002	0,0002	0,0021	0,0022

Tabela 2 – Média dos estimadores: $\alpha = 0;\ \beta = 1;\ \sigma_u^2 = 9;\ \sigma_\delta^2 = 0,1;\ k_u^* = 0,5;\ k_u = 0,99$

n	$E(\hat{\beta}_C)$			$E(\hat{\beta}_Q)$		$E(\hat{\phi}_Q)$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	1,0021	2,0058	1,0161	0,9890	1,0049	0,9208	0,8544
30	1,0007	2,0019	1,0146	0,9891	1,0022	0,9069	0,8456
100	1,0002	2,0004	1,0116	0,9892	1,0005	0,9021	0,8420

Com as especificações do modelo acima e pelos estudos realizados em (3.1) e (3.2) tem-se que os vícios e as esperanças aproximadas, quando $n \to \infty$, são:

$$\begin{aligned} &Vício(\hat{\beta}_C) \to 0 \ \ e \ \ E(\hat{\beta}_C) \to 1,0000 \\ &Vício(\hat{\beta}_Q) \to 0 \ \ e \ \ E(\hat{\beta}_Q) \to 1,0040 \\ &Vício(\hat{\phi}_Q) \to 0 \ \ e \ \ E(\hat{\phi}_Q) \to 0,8286. \end{aligned} \tag{20}$$

Observando os resultados apresentados nas Tabelas 1 e 2 onde se utilizou o valor $0,1$ para a variância do erro de medida δ, nota-se que há tendência em direção aos valores teóricos e no geral os valores empíricos e simulados estão próximos exceto para o estimador inverso que mostra uma diferença considerável entre os valores empíricos e simulados para as esperanças dos estimadores. Nota-se ainda que a utilização de um valor errado para o coeficiente de atenuação afeta profundamente o desempenho do estimador clássico consistente, principalmente na obtenção dos valores esperados dos estimadores.

Nas Tabelas 3 e 4 são mostrados os resultados da simulação quando o valor da variância do erro δ passa de 0,1 para 10 unidades fazendo com que o valor do coeficiente de atenuação seja igual a 0,47 e, portanto menor que $k_u^* = 0,5$.

Tabela 3 – Vício dos estimadores: $\alpha = 0,\ \beta = 1\,; \sigma_u^2 = 9\,; \sigma_\delta^2 = 10\,;\ k_u^* = 0,5;\ k_u = 0,47$

n	$\hat{\beta}_C$			$\hat{\beta}_Q$		$\hat{\phi}_Q$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	0,0021	-0,0160	-0,0169	0,0020	-0,0080	0,0208	0,0035
30	0,0007	-0,0053	-0,0056	0,0006	-0,0027	0,0069	0,0012
100	0,0002	-0,0013	-0,0017	0,0001	-0,0008	0,0021	0,0003

Tabela 4 – Média dos estimadores: $\alpha = 0;\ \beta = 1;\ \sigma_u^2 = 9;\ \sigma_\delta^2 = 10;\ k_u^* = 0,5$ e $k_u = 0,47$

n	$E(\hat{\beta}_C)$			$E(\hat{\beta}_Q)$		$E(\hat{\phi}_Q)$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	1,0021	1,9964	1,1097	0,9910	0,9951	0,9208	0,4565
30	1,0007	1,9957	1,1008	0,9947	0,9992	0,9069	0,4563
100	1,0002	1,9913	1,0095	0,9992	0,9992	0,9021	0,4549

Com as especificações do modelo acima e pelos resultados dos estudos realizados em (3.1) e (3.2), tem-se que os vícios e as esperanças assintóticas dos estimadores propostos, neste caso são:

$$\begin{aligned} &Vício(\hat{\beta}_C) \to 0 \ \ e \ \ E(\hat{\beta}_C) \to 1,0 \\ &Vício(\hat{\beta}_Q) \to 0 \ \ e \ \ E(\hat{\beta}_Q) \to 0,9 \\ &Vício(\hat{\phi}_Q) \to 0 \ \ e \ \ E(\hat{\phi}_Q) \to 0,9. \end{aligned} \tag{21}$$

Quando a variância dos erros de mensuração δ passa de 0,1 para 10 pode-se notar que esse aumento na variância faz com que a diferença entre o valor da esperança empírica e da esperança simulada ou aproximada seja maior, principalmente para o estimador clássico consistente e o estimador inverso. Pode-se observar também que, quando as distribuições dos vetores U e ε são simétricos, pelos resultados (16), (17) e (18) tem-se que os vícios empíricos e aproximados dos três estimadores convergem muito rapidamente para zero, o que é desejável. Observa-se ainda que o uso de um valor incorreto para o coeficiente de atenuação neste caso não afeta seriamente o desempenho do estimador clássico consistente, mesmo porque os valores (correto e incorreto) estão bem próximos. Veja que o valor esperado simulado desse estimador difere bastante do valor esperado empírico. Também pode ser observado que o vício do estimador inverso é o maior entre todos eles, e a diferença entre o valor esperado empírico e simulado também é a maior entre os estimadores.

4.2 Simulação do modelo com distribuição gama

Na realização dessa simulação, os vetores $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\delta}$ foram gerados a partir de uma distribuição gama re-centrada com $E(\varepsilon) = E(\delta) = 0$ e o vetor $\boldsymbol{U}$ também foi gerado a partir de uma distribuição gama, e os resultados são mostrados nas tabelas a seguir.

Tabela 5 – Vício dos estimadores: $\alpha = 0;\ \beta = 1;\ \sigma_u^2 = 9;\ \sigma_\delta^2 = 0,1;\ k_u^* = 0,5;\ k_u = 0,99$

n	$\hat{\beta}_C$			$\hat{\beta}_Q$		$\hat{\phi}_Q$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	0,7605	1,5178	0,7692	-0,0002	-0,0002	0,0035	0,0034
30	0,2535	0,5063	0,2567	0,0006	0,0013	0,0012	0,0011
100	0,0760	0,1521	0,0769	0,0000	0,0000	0,0003	0,0003

Tabela 6 – Média dos estimadores: $\alpha = 0;\ \beta = 1;\ \sigma_u^2 = 9;\ \sigma_\delta^2 = 0,1;\ k_u^* = 0,5$ e $k_u = 0,99$

n	$E(\hat{\beta}_C)$			$E(\hat{\beta}_Q)$		$E(\hat{\phi}_Q)$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	1,7601	3,5225	1,7756	0,9887	0,9974	0,9035	0,8971
30	1,2535	2,5042	1,2667	0,9889	0,9993	0,9012	0,8959
100	1,0761	2,1520	1,0881	0,9890	1,0001	0,9003	0,8934

Observando que as expressões obtidas para o vício e para a esperança dos estimadores dependem apenas dos parâmetros do modelo, temos que tanto o vício quanto a esperança teórica, quando $n \to \infty$, são os mesmos dados em (20).

Observando os resultados apresentados nas Tabelas 5 e 6 onde se utilizou mais uma vez o valor $0,1$ para a variância do erro de medida δ, nota-se que há tendência em direção aos valores teóricos à medida que o tamanho da amostra aumenta e no geral os valores empíricos e simulados estão próximos exceto para o estimador inverso que mostra maior distância entre os valores empíricos e simulados para as esperanças dos estimadores. Nota-se ainda que a utilização de um valor errado para o coeficiente de atenuação afeta profundamente o desempenho do estimador clássico consistente, tanto na obtenção dos valores esperados dos estimadores quanto na obtenção dos vícios. Pode-se notar também que os vícios do estimador clássico consistente são sempre superiores aos vícios dos demais estimadores. Nas tabelas que se seguem, são mostrados os resultados da simulação quando aumentamos o valor da variância do erro δ de 0,1 para 10.

Tabela 7 – Vício dos estimadores: $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\sigma_u^2 = 9$; $\sigma_\delta^2 = 10$; $k_u^* = 0,5$ e $k_u = 0,47$

n	$\hat{\beta}_C$			$\hat{\beta}_Q$		$\hat{\phi}_Q$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	0,0854	0,1705	0,5853	0,0568	0,0023	0,0035	0,0568
30	0,0285	0,0569	0,1941	0,0189	0,0008	0,0012	0,0006
100	0,0085	0,0171	0,0584	0,0057	0,0002	0,0003	0,0002

Tabela 8 – Média dos estimadores: $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\sigma_u^2 = 9$; $\sigma_\delta^2 = 10$; $k_u^* = 0,5$ e $k_u = 0,47$

n	$E(\hat{\beta}_C)$			$E(\hat{\beta}_Q)$		$E(\hat{\phi}_Q)$	
	Emp.	Emp. c/ k_u^*	Aprox.	Emp.	Aprox.	Emp.	Aprox.
10	1,0855	2,1657	1,6969	0,9011	1,0034	0,9035	0,8262
30	1,0285	2,0569	1,3099	0,9032	1,0016	0,9012	0,8234
100	1,0085	2,0167	1,1701	0,9034	1,0000	0,9003	0,8252

As expressões obtidas para os vícios e para os valores esperados dos estimadores não dependem das distribuições de probabilidade das variáveis envolvidas nem da quantidade de interesse U_0. Com isso, temos que os valores tanto do vício quanto da esperança são os mesmos que obtivemos em (21). Quando a variância dos erros de mensuração passa de $\sigma_\delta^2 = 0,1$ para $\sigma_\delta^2 = 10$ vemos que os valores tanto dos vícios quanto das esperanças tendem em direção aos valores teóricos à medida que o tamanho da amostra aumenta. Neste caso pode-se observar que apenas o vício do estimador clássico consistente apresenta diferença significativa entre valor empírico e simulado.

Quanto à esperança, vê-se que o estimador clássico consistente assim como o inverso apresenta diferença significativa entre valor empírico e simulado. Nota-se mais uma vez que o uso de um valor incorreto para o coeficiente de atenuação afeta o desempenho do estimador clássico consistente no sentido de superestimar o valor do vício e da esperança.

Conclusões

Destaca-se a seguir as principais conclusões decorrentes dos resultados analíticos e via simulação de dados apresentados por meio dos Teoremas de 1 a 5.

Nota-se que todos os estimadores propostos para estimar os parâmetros da reta de calibração são estimadores viesados. Contudo, os vieses são controláveis uma vez que assintoticamente eles convergem para zero.

Nota-se também que com introdução do coeficiente de atenuação na expressão dos estimadores clássico e inverso, tanto o estimador clássico quanto o inverso satisfazem a propriedade de consistência, o que é desejável.

Observa-se ainda que o estimador clássico além de ser consistente quando combinado com o coeficiente de atenuação é também assintoticamente não viesado, satisfazem assim duas propriedades importantes dos estimadores.

Além disso, as simulações de dados revelam a robustez dos estimadores obtidos analiticamente, no sentido de evidenciar que os resultados numéricos são concordantes com os resultados algébricos. Além disso, as simulações evidenciaram que a utilização do coeficiente de atenuação errado, prejudica o desempenho dos estimadores.

DOMINGOS FILHO, M. Least squares estimators in models of structural calibration, without assumption of normality. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.30. n.2, p.239-257, 2012.

- *ABSTRACT: This article has for main objective in show a detailed study of the properties of estimators of minimums squared on the parameters of model of structural calibration, when the assumption of normality in the errors of measurement and the variable will be suppressed. As the distribution of the estimators of squared minimums it does not possess finite moments, Kendall and Stuart (1952) then the results presented in this article are approaches for the hope and variance of the asymptotic distribution of these estimators. Initially will be presented and demonstrated to the analytical form of asymptotic expressions of hopes and variances of estimators and later an inquiry on the gotten estimators will be carried through to verify if they satisfy the properties to be not biased and consistent.*

- *KEYWORDS: Absolute calibration; structural model; estimators; attenuation coefficient.*

Referências

BOLFARINE, H., LIMA, C. R. O. P.; SANDOVAL, M. C. Linear calibration in functional regression models. *Commun. Stat. Theory Methods*, Philadelphia, v.26, n.10, p.2307-2328, 1997.

BOLFARINE, H.; LIMA, C. R. O. P.; SANDOVAL, M. C. Linear calibration in functional regression models with one the variances known. *S. Afr. Stat. J.*, Pretoria, v.33, p.95-116, 1999.

DOMINGOS FILHO, M.; LIMA, C. R. O. P.; SANDOVAL, M. C.; BRAGA, A. S. Variâncias e covariâncias assintóticas dos segundos momentos amostrais no modelo de Calibração estrutural absoluta sem suposição de Normalidade. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.29, n.4, p.571-582, 2011.

KENDALL, M. G.; STUART, A. *The advanced theory of statistics*. London: Griffin, 1952. v.1.

LEE, S. H.; YUM, B. J. Large sample comparisons of calibration procedures when both measurements are subject to error: the unreplicated case. *Commun. Stat. Theory Methods*, Philadelphia, v.18, p.3821-3840, 1989.

LIMA, C. R. O. P. *Calibração absoluta com erros nas variáveis*. 1996. Tese (Doutorado em Estatística) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

LWIN, T. Discussion of Hunter and Lamboy's 1981 paper. *Technometrics*, Baltimore, v.23, p.339-341, 1981.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. *R: a language and environment for statistical computing*. R: Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. Disponível em: <http://www.R- Project.org>. Acesso em: dez. 2007.

SHUKLA, G. K. On the problem of calibration. *Technometrics*, Baltimore, v.14, p.537-553, 1972.

Recebido em 11.05.2012

Aprovado após revisão 05.09.2012