

UMA APLICAÇÃO SOBRE A COMPARAÇÃO DE PREVISORES CLÁSSICOS E INVERSOS NO MODELO DE CALIBRAÇÃO ESTRUTURAL NA OBTENÇÃO DE MEDIDAS INDIRETAS REALIZADAS POR MEIO DE HIPSÔMETROS E PRANCHETA DENDOMÉTRICA

Manoel DOMINGOS FILHO¹

- RESUMO: O objetivo principal desse artigo é mostrar uma aplicação da teoria dos modelos de calibração estrutural quando os dados forem desprovidos de normalidade. Mais precisamente é utilizada uma comparação dos previsores clássicos e inverso como mostrada em Domingos Filho (2000). Essa comparação é realizada utilizando o erro quadrático médio como principal critério. Um conjunto de dados numéricos é utilizado para confrontar a teoria apresentada nesse artigo com outras bem distintas mostrando assim a grande aplicabilidade dos modelos de calibração.
- PALAVRAS-CHAVE: Calibração absoluta; modelo estrutural; estimadores; previsores.

1 Introdução

Um modelo de calibração é em sua essência um modelo de regressão chamado de regressão inversa e se dá em duas etapas. Na primeira etapa do experimento de calibração amostram-se n observações da variável aleatória Y a partir de valores prefixados da variável X_i , de modo que se possa estimar uma função f que relacione de alguma forma as duas variáveis. Se a relação for linear então as variáveis X_i e Y podem se relacionar através do modelo: $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$. Numa segunda etapa, “a calibração propriamente dita”, seleciona-se uma amostra aleatória de tamanho k ($k \geq 1$) da variável Y digamos Y_0 , correspondente a um único valor de X_i desconhecido digamos X_0 . Deseja-se, então, estimar este valor desconhecido X_0 tendo como base as informações do ponto de interesse e da função estimada no experimento de calibração. O modelo de calibração estrutural linear pode ser formalmente definido como segue:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ X_i &= U_i + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ Y_0 &= \alpha + \beta U_0 + \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, n ; \end{aligned} \tag{1}$$

¹ Universidade Federal do Acre – UFAC, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET, CEP: 69915-900, Rio Branco, Acre, Brasil. E-mail: manoelufsc@yahoo.com.br

em que α e β são parâmetros desconhecidos, os erros de medidas $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k}$, $\delta_1, \dots, \delta_n$ são considerados variáveis aleatórias mutuamente independentes assim como as variáveis aleatórias U_1, \dots, U_n que também são consideradas variáveis aleatórias mutuamente independentes, com as seguintes suposições adicionais: $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0n+i}) = E(\delta_i) = 0$, os momentos $E(\varepsilon_i^j) = m_\varepsilon^j$, $E(\delta_i^j) = m_\delta^j$, $j = 2, 3, 4$ e $E(U_i^j) = E(U_{0i}^j) = m_U^j$, $j = 1, 2, 3, 4$ existem e são finitos. A variância de U_i é igual à variância de U_0 e definida como $\sigma_u^2 = m_u^2 - (m_u^1)^2$, além disso, a esperança de U_i é igual à esperança de U_0 sendo denotada por $E(U_i) = E(U_0) = m_u^1$.

É importante ressaltar que no modelo estrutural, o problema a ser considerado é um problema de previsão e não de estimação, como acontece com o modelo funcional. Um modelo de calibração é dito funcional quando os valores da variável independente forem considerados quantidades fixas ou variáveis controladas, enquanto que no modelo estrutural a variável independente é sempre uma variável aleatória definida por alguma distribuição de probabilidade. É por este motivo que no modelo estrutural a estatística utilizada para prever novos valores da variável dependente utilizando o modelo ajustado na primeira etapa de calibração, é chamada de predictor.

Os modelos de calibração têm sido objeto de estudo por muitos pesquisadores e muitos trabalhos importantes foram publicados. Dentre esses se destacam os trabalhos de Shukla (1972), Lwin (1981), Lee e Yum (1989), Bolfarine *et al.* (1997) dentre outros.

No modelo (1), as duas primeiras equações dizem respeito à primeira etapa de calibração, enquanto que a terceira equação só diz respeito à segunda etapa, também conhecida como calibração propriamente dita.

2 Metodologia

Para que se possa obter o objetivo proposto neste artigo, será apresentada inicialmente a forma matemática dos previsores propostos que serão utilizados para prever a quantidade desconhecida U_0 , assim como as expressões utilizadas para estimar os parâmetros da reta de calibração por meio da técnica de mínimos quadrados ordinários. Os previsores clássicos assim como o inverso, combinados com os estimadores de mínimos quadrados são mostrados logo em seguida e finalmente são apresentadas as expressões assintóticas dos erros quadráticos médios dos previsores da quantidade de interesse U_0 como mostrado em Shukla (1972). Por se tratar de expressões assintóticas, os previsores são comparados pelo limite das expressões mostrando que, sob certas condições, os previsores clássicos são melhores e noutras condições o predictor inverso é o melhor para prever a quantidade desconhecida U_0 . Para ilustrar a teoria um conjunto de dados é utilizado, sendo que os dados foram extraídos do artigo de Simões *et al.* (1967) que utilizaram outra técnica para analisar a eficiência de diversos instrumentos de medição.

3 Resultado e discussão

Esta seção inicia apresentando os estimadores de mínimos quadrados no modelo de calibração e os previsores clássicos e inversos. Posteriormente apresentam-se as expressões dos erros quadráticos médios dos previsores mostramos em que condições eles são melhores no sentido de ter o menor erro quadrático médio. A ênfase principal se dá no modelo estrutural com a estrutura dos erros aditiva como mostrado a seguir.

3.1 Esperanças e variâncias dos estimadores de mínimos quadrados

Como já foi dito na introdução, a primeira etapa do problema consiste em utilizar uma amostra para estimar a função que relaciona as variáveis X_i e Y_i . Já a segunda etapa utiliza a função estimada na etapa I e a partir de uma amostra de tamanho $k(k \geq 1)$ observado da variável dependente Y obtém-se uma estimativa para um único valor da variável independente, denominado U_0 .

Os previsores utilizados para prever os verdadeiros valores da quantidade desconhecida U_0 são os previsores clássicos e inversos como mostrado em Shukla (1972), Lima (1996) e Domingos Filho (2000). Isto é, os verdadeiros valores de U_0 serão previstos pela utilização das seguintes estatísticas:

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} e \hat{U}_{0I} + \hat{\gamma} + \hat{\phi} \bar{Y}_0; \quad (2)$$

em que $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\phi}$ são estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros α , β , γ e ϕ respectivamente. Fazendo uma combinação entre os previsores de U_0 propostos nesse artigo, com os estimadores usuais de mínimos quadrados dos parâmetros α , β , γ e ϕ , dados por:

$$\hat{\alpha}_Q = \bar{Y} - \hat{\beta}_Q \bar{X}, \hat{\beta}_Q = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}; \quad (3)$$

$$\hat{\gamma}_Q = \bar{X} - \hat{\phi}_Q \bar{Y}, \hat{\phi}_Q = \frac{S_{xy}}{S_{yy}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}; \quad (4)$$

obtêm-se as seguintes expressões para os previsores:

$$\hat{U}_{0CQ} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_Q}{\hat{\beta}_Q} e \hat{U}_{0IQ} + \hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0. \quad (5)$$

Os previsores \hat{U}_{0CQ} e \hat{U}_{0IQ} são denominados previsores clássicos e inversos de U_0 respectivamente, combinados com os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros α , β , γ e ϕ . A seguir são apresentadas as expressões analíticas dos erros quadráticos médios desses previsores.

3.2 Erro quadrático médio dos previsores propostos

Nesta subsecção são mostradas as expressões assintóticas dos erros quadráticos médios dos previsores seguindo a metodologia desenvolvida por Domingos Filho (2000). Para efeito de comparação são considerados três previsores. O predictor clássico combinado com estimadores de mínimos quadrados, o predictor clássico combinado com estimadores consistentes e o predictor inverso combinado também combinado com estimadores consistentes da reta de calibração.

3.2.1 Erro quadrático médio do predictor clássico combinado com estimadores de mínimos quadrados

Como pode ser constatado em Domingos Filho (2000), o erro quadrático médio do predictor clássico combinado com os estimadores de mínimos quadrados ordinário é dado pela seguinte expressão:

$$EQM[\hat{U}_{0CQ}] = \frac{\sigma_u^2}{L^2} + \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_u^2}{L^2} \right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) \frac{\sigma_\varepsilon^2 (L+1)^2}{\beta^2 L^2} + \frac{3m_2^u (L+1)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2 L^4} - \frac{2(m_1^u)^2 C_{xy,xx}}{\beta \sigma_u^4} - \frac{(m_1^u)^2 V_{xx}}{L^2 \sigma_\delta^4} - \frac{2m_2^u (L+1)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2 L^3} + \frac{3\sigma_\varepsilon^2 (L+1)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{k \beta^4 L^4} - \frac{3(m_1^u)^2 (L+1)^2 V_{xy}}{\beta^2 L^2 \sigma_u^4} + \frac{2(m_1^u)^2 (L+1) V_{xy}}{\beta^2 L \sigma_u^4} + \frac{4(m_1^u)^2 (L+1) C_{xy,xx}}{\beta L \sigma_u^4} - \frac{2m_2^u (L+1)^3 \text{Vício}(\hat{\beta}_Q)}{\beta L^3} + \frac{2m_2^u (L+1)^2 \text{Vício}(\hat{\beta}_Q)}{\beta L^2} - \frac{2\sigma_\varepsilon^2 (L+1)^3 \text{Vício}(\hat{\beta}_Q)}{k \beta^3 L^3} + O(n^{-2}); \quad (6)$$

em que $L = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\delta^2}$.

3.2.2 Erro quadrático médio do predictor clássico combinado com estimadores consistente

Se na equação (3) for introduzido a constante $k_u = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}$, então aqueles estimadores passam a satisfazer a propriedade de serem estimadores consistentes, o que é sempre desejável para um estimador. A constante k_u é conhecida como Coeficiente de Atenuação e possui um papel importante na análise de modelos de regressão com erros nas variáveis. Notadamente a constante acima varia de zero até um e isso nos diz informa o quanto que um modelo de calibração se aproxima ou se afasta de um modelo sem/com

erros. Quanto mais próximo da unidade, menores serão os erros de mensuração e quanto mais distante da unidade, maiores serão os erros de mensuração.

Em Domingos Filho (2000) é demonstrado que a expressão do erro quadrático médio do predictor clássico quando combinado com estimadores consistentes é:

$$EQM(\hat{U}_{0C}) = \frac{\sigma_{\delta}^2}{n} + \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) - \frac{(m_1^u)^2 V_{xy}}{\beta^2 \sigma_{\delta}^4 L^2} - \frac{(m_1^u)^2 V_{xx}}{\sigma_{\delta}^4 (L+1)^2} + \frac{3\sigma_{\varepsilon}^2 (L+1)^2 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{k \beta^4 L^2} + \frac{m_2^u (L+1)^2 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2 L^2} - \frac{2\sigma_{\varepsilon}^2 (L+1) \text{Vicio}(\hat{\beta}_Q)}{k \beta^2 L} + \frac{2(m_1^u)^2 C_{xy,xx}}{\beta \sigma_{\delta}^4 L (L+1)^2} + O(n^{-2}). \quad (7)$$

3.2.3 Erro quadrático médio do predictor inverso

A expressão analítica do erro quadrático médio do predictor inverso encontra-se também demonstrada em Domingos Filho (2000) sendo denotado por:

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2 Z^2}{(Z+1)^2} + \frac{\sigma_u^2 + \sigma_{\delta}^2}{n} - \frac{\sigma_u^2 Z}{n(Z+1)} + \frac{2(m_1^u)^2 Z}{(Z+1)} + \frac{\sigma_u^2 Z}{k(Z+1)^2} + \text{Var}(\hat{\phi}_Q) \left(\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{k} + \sigma_{\varepsilon}^2 Z + \beta^2 (m_1^u)^2 \right) + \frac{2\beta \text{Vicio}(\hat{\phi}_Q)}{(Z+1)} \left(\frac{\sigma_u^2}{k} + \sigma_u^2 Z + (m_1^u)^2 Z \right) - \frac{\beta^2 (m_1^u)^2 V_{xy}}{\sigma_{\varepsilon}^4 (Z+1)^2} - \frac{3(m_1^u)^2 Z^2 V_{yy}}{\sigma_{\varepsilon}^4 (Z+1)^4} - 2\beta m_2^u E(\hat{\phi}_Q) + \frac{4\beta (m_1^u)^2 Z C_{xy,yy}}{\sigma_{\varepsilon}^4 (Z+1)^3} + \frac{2(m_1^u)^2 Z V_{yy}}{\sigma_{\varepsilon}^4 (Z+1)^3} + \frac{2\beta m_1^u C_{\bar{u},xy}}{\sigma_{\varepsilon}^2 (Z+1)} - \frac{2\beta m_1^u Z C_{\bar{u},xy}}{\sigma_{\varepsilon}^2 (Z+1)^2} - \frac{2\beta (m_1^u)^2 C_{xy,yy}}{\sigma_{\varepsilon}^4 (Z+1)^2} - \frac{2\beta m_1^u C_{\bar{u},xy}}{\sigma_{\varepsilon}^2 (Z+1)^2} + O(n^{-2}); \quad (8)$$

onde: $Z = \frac{\beta^2 \sigma_u^2}{\sigma_{\varepsilon}^2}$.

As estatísticas: $\text{Var}(\hat{\beta}_Q)$, V_{xy} , V_{xx} , $C_{xy,xx}$, $C_{xy,yy}$, $C_{\bar{u},xy}$, $\text{Vicio}(\hat{\beta}_Q)$ e $\text{Vicio}(\hat{\phi}_Q)$ que aparecem nas expressões (6), (7) e (8) são aquelas mostradas em Domingos Filho (2000).

3.3 Comparação analítica dos predictores

O critério utilizado para comparar os predictores propostos nesse artigo, se dará por meio do erro quadrático médio, isto é, o predictor com menor erro quadrático médio será considerado o melhor. Para tanto, nós faremos o estudo do erro quadrático médio considerando três procedimentos os quais são: predictor clássico combinado com estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros da curva de calibração; predictor inverso combinado com estimadores de mínimos quadrados e o predictor clássico consistente. Para realizar a análise do erro quadrático médio tomamos como base as

expressões (6), (7) e (8) e calculamos o limite dessas expressões, para obter os seguintes resultados:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \frac{\sigma_u^2}{L^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2(L+1)^2}{k\beta^2L^2} = \frac{\sigma_\delta^2}{TZ} + \frac{\sigma_\delta^2(1+TZ)^2}{kTZ^2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_u^2}{(Z+1)^2} + \frac{\sigma_u^2Z}{k(Z+1)^2} = \frac{\sigma_\delta^2TZ}{(Z+1)^2} + \frac{\sigma_\delta^2TZ^2}{k(Z+1)^2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0C}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} = \frac{\sigma_\delta^2T}{k};$$

em que $T = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\beta^2\sigma_\delta^2}$. Portanto, no limite temos que:

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0C}) = \frac{\sigma_\delta^2}{TZ} + \frac{\sigma_\delta^2(1+TZ)^2}{kTZ^2} - \frac{\sigma_\delta^2T}{k} = \frac{\sigma_\delta^2T}{kL^2}(1+2L) + \frac{\sigma_\delta^2}{L} > 0;$$

de onde se conclui que $EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

Confrontando o previsor inverso com o previsor clássico consistente em termos de limite de seus erros quadráticos médios temos que:

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) - EQM(\hat{U}_{0C}) = \frac{\sigma_\delta^2TZ}{(1+Z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2TZ^2}{k(1+Z)^2} - \frac{\sigma_\delta^2T}{k} = \frac{\sigma_\delta^2T}{k(1+Z)^2}(Z(k-2)-1);$$

de modo que, se $k > 2$ e $Z > \frac{1}{(k-2)}$, então $EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$. Entretanto, se $k \leq 2$, então $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0C})$.

Estes resultados mostram que quando n é grande e $k \leq 2$, o previsor inverso de U_0 é melhor que o previsor clássico consistente, que por sua vez é melhor que o previsor clássico combinado com estimadores de mínimos quadrados, no sentido de se ter o erro quadrático médio menor, ou seja:

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CQ}).$$

Vamos analisar agora o comportamento dos previsores quando o tamanho da amostra n , na primeira etapa de calibração e o tamanho da amostra k na segunda etapa tende ao infinito.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \frac{\sigma_\delta^2}{TZ};$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_\delta^2TZ}{(Z+1)^2};$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0C}) = 0;$$

ou seja, no limite temos a seguinte configuração:

$$EQM(\hat{U}_{OCQ}) - EQM(\hat{U}_{OIQ}) = \frac{\sigma_{\delta}^2}{TZ} - \frac{\sigma_{\delta}^2 TZ}{(Z+1)^2} = \frac{\sigma_{\delta}^2}{TZ(Z+1)^2} (1 + 2Z + Z^2(1 - T^2));$$

de modo que, se $0 < T < 1$, ou $\sigma_{\varepsilon}^2 < \beta^2 \sigma_{\delta}^2$, então $EQM(\hat{U}_{OIQ}) < EQM(\hat{U}_{OCQ})$.

Observa-se, portanto, que o previsor clássico combinado com os estimadores consistentes dos parâmetros α e β é consistente, ao passo que os outros dois previsores não apresentam tal propriedade. Além disso, a comparação entre o previsor clássico combinado com estimadores de mínimos quadrados e o previsor inverso irá depender dos parâmetros β , σ_{ε}^2 e σ_{δ}^2 .

3.4 Aplicação

Os dados que utilizaremos neste exemplo para comparar os previsores propostos acima, foram retirados do artigo de Simões *et al.* (1967). Naquele artigo, os autores propuseram utilizar diversos instrumentos para medir a altura de árvores. A experiência consistiu na medição da altura de 10 árvores de *Eucalyptus saligna*, com idade de 7 anos, plantados em solo de cerrado utilizando um espaçamento de 2,50m por 1,60m. Para tanto, realizou-se um ensaio onde foram utilizados 5 aparelhos diferentes, sendo que cada aparelho foi operado por 4 observadores distintos. Os aparelhos utilizados no ensaio foram: a Trena (X), o hipsômetro de Blume-Leiss (Y_1), o hipsômetro de Haga (Y_2), o hipsômetro de Weise (Y_3) e a Prancheta Dendométrica (Y_4). Cada observador trabalhou com todos os aparelhos realizando duas medições de cada árvore. Uma vez medida a altura de cada árvore com os hipsômetros e a prancheta dendométrica, estas foram abatidas e sua medida real foi tomada com a trena.

Neste caso, a trena foi considerada o instrumento de medida construída com erro experimental desprezível sendo, portanto, o instrumento padrão utilizado para confrontar com os demais aparelhos a serem calibrados. Faz-se necessário ressaltar que a trena mesmo sendo considerada um instrumento construído com erro desprezível, as medidas por ela obtidas, são medidas que contém algum tipo de erro. A Tabela 1 apresenta, para cada árvore, a média e a variância amostral (entre parênteses), calculadas utilizando-se as duas medições obtidas pelos quatro observadores.

Como o artigo aborda a questão dos modelos de calibração linear, então uma condição que necessita ser verificada é a condição de linearidade no relacionamento entre as variáveis X_t e Y_{it} , para $i = 1, 2, 3$ e 4 e $t = 1, 2, \dots, 10$. Esta condição pode ser facilmente verificada graficamente através de um diagrama de dispersão, ou ainda pelo cálculo do coeficiente de correlação linear. Nas figuras que se seguem, são mostrados os relacionamentos entre as variáveis em questão, assim como o valor dos coeficientes de correlação.

Tabela 1 – Média e variância amostral das medições da altura de cada árvore

Árvore (t)	Trena (X_t)	Hipsômetro de Blume-Leiss (Y_{1t})	Hipsômetro de Haga (Y_{2t})	Hipsômetro de Weise (Y_{3t})	Prancheta Dendométrica (Y_{4t})
1	21,3625 (0,0114)	22,2000 (0,4857)	22,6875 (0,2780)	22,3750 (0,8393)	22,2625 (0,3741)
2	19,0500 (0,0000)	21,0000 (0,1058)	21,1750 (0,2164)	20,6250 (0,6964)	20,5125 (0,5926)
3	23,2625 (0,0058)	22,9875 (0,3575)	22,9500 (0,4828)	22,9625 (0,4827)	23,0750 (1,3278)
4	20,3000 (0,0046)	20,9000 (0,1257)	21,6750 (0,2850)	20,6125 (0,7213)	20,6875 (0,7698)
5	19,9500 (0,0000)	19,5875 (1,4107)	21,5375 (1,5627)	20,2500 (0,6429)	20,6000 (0,4686)
6	19,2875 (0,0049)	19,7750 (0,1664)	20,6875 (0,1213)	19,6875 (0,0669)	19,4750 (0,3993)
7	17,4250 (0,0052)	16,9125 (0,2116)	17,2000 (0,2857)	17,6750 (0,3164)	17,8250 (0,9964)
8	14,4250 (0,0052)	14,6875 (0,0788)	15,0200 (0,3182)	14,5250 (0,0764)	14,4250 (0,1650)
9	21,9250 (0,0169)	20,6500 (0,4475)	21,4250 (0,7621)	20,8125 (0,4241)	20,9250 (0,2078)
10	14,6500 (0,0249)	14,2250 (0,0294)	15,4125 (0,1755)	14,3125 (0,3184)	14,3375 (0,2767)

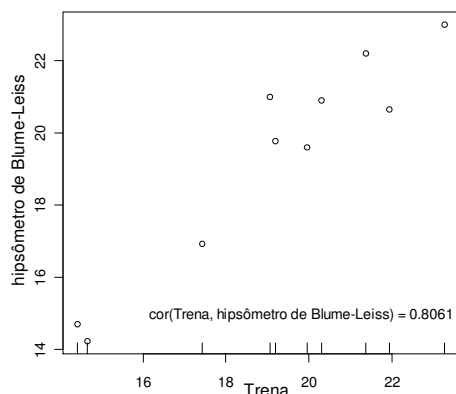


Figura 1 – Trena versus hipsômetro de Blume-Leiss

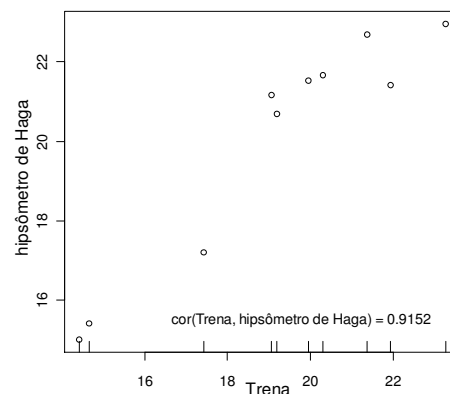


Figura 2 – Trena versus hipsômetro de Haga

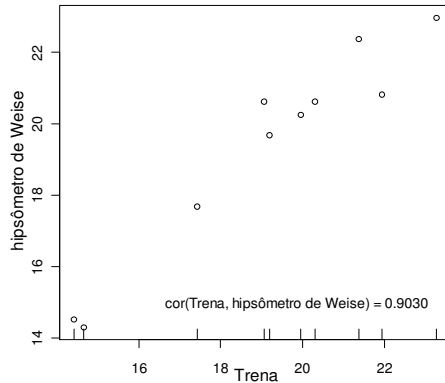


Figura 3 – Trena versus hipsômetro de Weisse

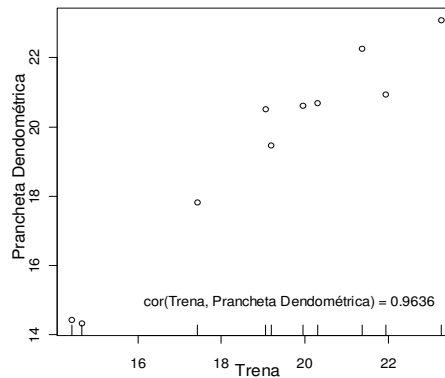


Figura 4 – Trena versus Prancheta Dendométrica

Como pode ser observada nas Figuras 1 a 4, a relação entre cada uma das variáveis dependentes (os hipsômetros) com a variável independente (a Trena), possui forte relação linear. Em todos os casos, o coeficiente de correlação linear estimado com base nos dados, foi superior a oitenta por cento. Com isso, a condição de linearidade no modelo parece estar satisfeita e o modelo de calibração estrutural parece ser adequado.

Como o predictor clássico consistente supõe que o coeficiente de atenuação seja conhecido ou possível de ser estimado, e como nesse exemplo há réplicas nas variáveis, então, uma estimativa para k_u foi obtida calculando inicialmente a variância de X_t obtendo-se $\sigma_x^2 = 2,92592$ como estimativa de $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_\delta^2$. Como estimativa de σ_δ^2 foi utilizada a média das variâncias amostrais obtidas para cada árvore, utilizando a trena como instrumento de medição, mostradas na Tabela 1, obtendo-se $\hat{\sigma}_\delta^2 = 0,00784448$. Finalmente obtemos uma estimativa para a variância de U_t fazendo uso da equação $\hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_\delta^2 = 2,9180256$ e assim, obtivemos uma estimativa para o coeficiente de atenuação dada por $\hat{k}_u = 0,99730$.

Nessa aplicação os pares $\{(X_t, Y_t), t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ serão utilizados como observações previamente estabelecidas no experimento de calibração, e X_t será tratado como o valor desconhecido de U_0 , enquanto que Y_t será designada como a observação de Y_0 . Esse procedimento será repetido para $i = 1, \dots, n$. Isso faz com que seja possível estabelecer uma comparação entre os predictores e o valor observado (verdadeiro) de U_0 . Para verificarmos o comportamento de cada predictor será utilizada a média dos desvios quadráticos, dada por Lwin e Maritz (1980), a qual é denotada por:

$$\sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{U}_{0t})^2}{n}; \quad (9)$$

em que \hat{U}_{0t} denota o predictor de X_t (valor desconhecido de U_0).

Nas tabelas que se seguem, estão dispostos os valores de X_t , medidos pela trena e os valores de Y_{jt} , medidos pelos outros instrumentos, assim como os valores dos previsores: clássico consistente, clássico combinados com mínimos quadrados e o previsor inverso também combinado com mínimos quadrados. Na última linha de cada uma das tabelas a seguir, é apresentada a média dos desvios quadráticos para cada previsor proposto.

Tabela 2 – Medidas obtidas pela trena e pelo hipsômetro de Blume-Leiss

Árvore (t)	X_t	Y_{1t}	\hat{U}_{0C}	\hat{U}_{0CQ}	\hat{U}_{0IQ}
1	21,3625	22,2000	22,2692	22,2783	21,9734
2	19,0500	21,0000	21,0878	21,0923	21,0059
3	23,2625	22,9875	22,7451	22,7561	22,3288
4	20,3000	20,9000	20,8573	20,8622	20,7014
5	19,9500	19,5875	19,4057	19,4066	19,3785
6	19,2875	19,7750	19,6921	19,6935	19,6463
7	17,4250	16,9125	16,6677	16,6294	16,8718
8	14,4250	14,6875	14,5578	14,5438	15,1796
9	21,9250	20,6500	20,2921	20,2960	20,2076
10	14,6500	14,2250	13,6304	13,6140	14,3652
Média dos desvios quadráticos			1,0357	1,0418	0,9593

Tabela 3 – Medidas obtidas pela trena e pelo hipsômetro de Haga

Árvore (t)	X_t	Y_{2t}	\hat{U}_{0C}	\hat{U}_{0CQ}	\hat{U}_{0IQ}
1	21,3625	22,6875	22,1064	22,1150	21,8053
2	19,0500	21,1750	20,5523	20,5560	20,4602
3	23,2625	22,9500	21,8804	21,8890	21,6179
4	20,3000	21,6750	21,0127	21,0180	20,8385
5	19,9500	21,5375	20,8899	20,8948	20,7385
6	19,2875	20,6875	19,9687	19,9709	19,8987
7	17,4250	17,2000	16,0613	16,0524	16,3278
8	14,4250	15,0200	13,7374	13,7213	14,5346
9	21,9250	21,4250	20,4349	20,4392	20,3267
10	14,6500	15,4125	14,2985	14,2839	14,9799
Média dos desvios quadráticos			1,1252	1,1317	1,0053

Tabela 4 – Medidas obtidas pela trena e pelo hipsômetro de Weise

Árvore (<i>t</i>)	X_t	Y_{3t}	\hat{U}_{0C}	\hat{U}_{0CQ}	\hat{U}_{0IQ}
1	21,3625	22,3750	22,3756	22,3849	22,1836
2	19,0500	20,6250	20,5667	20,5705	20,5200
3	23,2625	22,9625	22,5861	22,5936	22,3245
4	20,3000	20,6125	20,4194	20,4232	20,3372
5	19,9500	20,2500	20,0499	20,0525	19,9925
6	19,2875	19,6875	19,4911	19,4920	19,4713
7	17,4250	17,6750	17,4389	17,4337	17,5559
8	14,4250	14,5250	14,1322	14,1172	14,6170
9	21,9250	20,8125	20,3719	20,3760	20,3218
10	14,6500	14,3125	13,6244	13,6081	14,1120
Média dos desvios quadráticos			0,7404	0,7452	0,6665

Tabela 5 – Medidas obtidas pela trena e pela prancheta dendométrica

Árvore (<i>t</i>)	X_t	Y_{4t}	\hat{U}_{0C}	\hat{U}_{0CQ}	\hat{U}_{0IQ}
1	21,3625	22,2625	22,1505	22,1592	21,9922
2	19,0500	20,5125	20,3933	20,3966	20,3569
3	23,2625	23,0750	22,6350	22,6456	22,4019
4	20,3000	20,6875	20,4541	20,4579	20,3826
5	19,9500	20,6000	20,3988	20,4024	20,3349
6	19,2875	19,4750	19,2192	19,2194	19,2158
7	17,4250	17,8250	17,6041	17,5993	17,6935
8	14,4250	14,4250	14,0179	14,0026	14,4407
9	21,9250	20,9250	20,4448	20,4491	20,4029
10	14,6500	14,3375	13,7312	13,7155	14,1396
Média dos desvios quadráticos			0,6281	0,6323	0,5642

Observando as tabelas acima, pode-se ver um comportamento semelhante entre os previsores clássico combinado com estimadores de mínimos quadrados e clássico combinado com estimadores consistentes, uma vez que o coeficiente de atenuação k_u é próximo de 1 (um). O predictor inverso combinado com estimadores de mínimos quadrados apresentou um comportamento melhor que os previsores clássicos para todos os instrumentos utilizados na medição das árvores. Os resultados mostram também que o

instrumento com menor desvio médio quadrático foi a prancheta dendométrica. Na sequência, temos o hipsômetro de Weise, seguido pelo hipsômetro de Blume-Leiss e por último, o hipsômetro de Haga. Os resultados obtidos nesse artigo usando a teoria de modelos de calibração linear estrutural são semelhantes aos resultados obtidos no artigo de Simões *et al.* (1967), mostrando assim a ampla aplicabilidade dos modelos de calibração.

CONCLUSÕES

Nesse artigo foram propostos três previsores para a quantidade de interesse U_0 , os quais foram denominados por: predictor clássico com mínimos quadrados, predictor inverso com mínimos quadrados e predictor clássico consistente. Este último foi assim denominado por se tratar de uma combinação do predictor clássico de U_0 com os estimadores consistentes de α e β . Foi realizado também um estudo de caso utilizando dados referentes a medições das alturas de eucaliptos por meio de hipsômetros, trena e prancheta dendométrica. Este artigo teve como objetivo principal verificar qual dos previsores propostos é o melhor para estimar U_0 , seguindo a metodologia utilizada por Shukla (1972) e Domingos Filho (2000).

A conclusão principal é que quando o tamanho da amostra n tende ao infinito ($n \rightarrow \infty$) e $k \leq 2$, o predictor inverso combinado com mínimos quadrados é melhor que os demais previsores, por ser aquele que possui o menor erro quadrático médio. Quando o tamanho das amostras n e k tendem ao infinito, o predictor clássico combinado com estimadores consistentes é consistente, enquanto que os outros dois previsores não apresentam tal propriedade. Outra conclusão interessante é que quando n e k tendem ao infinito temos que, se $0 < T < 1$ ou $\sigma_\varepsilon^2 < \beta^2 \sigma_\delta^2$, então o predictor inverso é melhor que o predictor clássico combinado com os estimadores de mínimos quadrados.

Os resultados provenientes do estudo de caso mostram concordância com os resultados analíticos, além de não divergir das conclusões obtidas pelos pesquisadores Simões *et al.* (1967).

DOMINGOS FILHO, M. An application on the comparison of classic and inverse forecasters in structural calibration to obtain indirect measures through hypsometers and clipboard dendométrica. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.30, n.2, p.292-304, 2012.

- **ABSTRACT:** *The main objective of this article is to show an application of theory of models of structural calibration when the data will be unprovided of normality. More necessarily a comparison of the classic preview finders and inverse as shown in Domingos Filho (2000). This comparison is carried through using the average quadratic error as main criterion. A numerical data set is used to collate the theory presented in this article with other well distinct ones being thus shown the great applicability of the calibration models.*
- **KEYWORDS:** *Absolute calibration; structural model; estimators; preview finders.*

REFERÊNCIAS

- BOLFARINE, H.; LIMA, C. R. O. P.; SANDOVAL, M. C. Linear calibration in functional regression models. *Commun. Stat. Theory Methods*, Philadelphia, v.26, p.2307-2328, 1997.
- DOMINGOS FILHO, M. *Calibração absoluta estrutural sem a suposição de normalidade*. 2000. 123f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.
- LIMA, C. R. O. P. *Calibração absoluta com erros nas variáveis*. 1996. 223f. Tese (Doutorado em Estatística) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.
- LEE, S. H.; YUM, B. J. Large sample comparisons of calibration procedures when both measurements are subject to error: the unreplicated case. *Commun. Stat. Theory Methods*, Philadelphia, v.18, p.3821-3840, 1989.
- LWIN, T. Discussion of Hunter and Lamboy's 1981 paper. *Technometrics*, Baltimore, v.23, p.339-341, 1981.
- LWIN, T.; MARITZ, J. S. A note on the problem of statistical calibration. *Applied Statistics. J. Royal Stat. Soc.*, v. 29, 135-141, 1980.
- SHUKLA, G.K. On the problem of calibration. *Technometrics*, Baltimore, v.14, p.537-553, 1972.
- SIMÕES, J. W.; MELLO, N. A.; BARBIN, D. Eficiência dos aparelhos e influência do operador na medição de altura total das árvores. *Solo*, Piracicaba, v.59, n.2, p.57-63, 1967.

Recebido em 23.05.2012

Aprovado após revisão 14.11.2012