

## APLICAÇÃO DA LÓGICA *FUZZY* EM ESTATÍSTICA - UMA ABORDAGEM EM MODELOS DE REGRESSÃO QUADRÁTICA

Leandro FERREIRA<sup>1</sup>  
Augusto Ramalho de MORAIS<sup>2</sup>  
Danilo Machado PIRES<sup>2</sup>  
Sérgio Martins de SOUZA<sup>2</sup>  
Giselle Borges MOURA<sup>3</sup>  
Augusto Maciel da SILVA<sup>4</sup>

- RESUMO: Com o avanço da teoria dos conjuntos *fuzzy*, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas combinando métodos estatísticos com lógica *fuzzy*. No estudo de modelos de regressão quadrática, pode haver interesse em obter um intervalo de confiança para o ponto crítico. Como o estimador do ponto crítico envolve um quociente de variáveis aleatórias, seria necessário encontrar a variância de tal estimador para a construção de intervalos de confiança. Como alternativa a construção de intervalos de confiança convencionais, o presente trabalho tem, como objetivo, apresentar diferentes análises do ponto crítico de um modelo de regressão quadrática utilizando lógica *fuzzy*. Para tanto, foram considerados dados de produção de matéria seca do sistema radicular de braquiária em função de diferentes doses de adubação fosfatada. Na primeira análise *fuzzy*, por intermédio do princípio de extensão de Zadeh, um modelo *fuzzy* de regressão quadrática foi encontrado, considerando incertezas presentes nas estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos mínimos quadrados. Dessa maneira, foram obtidos um ponto crítico *fuzzy* e intervalos de confiança *fuzzy* por intermédio de operações intervalares e  $\alpha$ -níveis. Uma segunda análise *fuzzy* foi realizada considerando a metodologia de Buckley, na qual um estimador *fuzzy* para o ponto crítico foi construído com base em um intervalo de confiança convencional. Considerando as incertezas tratadas na primeira análise *fuzzy*,

<sup>1</sup>Universidade Federal de Alfenas – UNIFAL, Instituto de Ciências Sociais Aplicadas – ICSA, CEP: 37048-395, Varginha, MG, Brasil. E-mail: [le.ferreira@gmail.com](mailto:le.ferreira@gmail.com)

<sup>2</sup>Universidade Federal de Lavras – UFLA, Departamento de Ciências Exatas – DEX, Caixa Postal: 37, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: [armorais@dex.ufla.br](mailto:armorais@dex.ufla.br) / [dmachadopires@gmail.com](mailto:dmachadopires@gmail.com) / [sergiomartinsde@gmail.com](mailto:sergiomartinsde@gmail.com)

<sup>3</sup>Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD, Faculdade de Ciências Agrárias – FCA, Caixa Postal: 533, CEP: 79804-970, Dourados, MS, Brasil. E-mail: [giborges.mg@gmail.com](mailto:giborges.mg@gmail.com)

<sup>4</sup>Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Centro de Ciências Naturais e Exatas – CCNE, Departamento de Estatística, CEP: 97105-900, Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: [augustolavras@gmail.com](mailto:augustolavras@gmail.com)

o aumento dos níveis de confiança, baseados em  $\alpha$ -níveis, resultaram em maior precisão dos intervalos de confiança *fuzzy*. Na segunda análise, a metodologia de Buckley apresentou mais informações do que uma estimativa intervalar convencional.

- PALAVRAS-CHAVE: Intervalo de confiança; lógica *fuzzy*; princípio de extensão de Zadeh; estimador *fuzzy*.

## 1 Introdução

Ao longo dos últimos anos, muitas pesquisas foram desenvolvidas combinando métodos estatísticos com lógica *fuzzy*, como no estudo de variáveis aleatórias (Gonzalez-Rodrigues *et al.*, 2006), testes de hipóteses (Grzegorzewski e Hryniewicz, 1997) e análise de regressão (Bargiela *et al.*, 2007). Uma das principais aplicações envolvendo estatística e lógica *fuzzy*, foi introduzida por Zadeh (1968), a qual propôs o estudo da probabilidade de um evento *fuzzy*. Tanaka *et al.* (1982) apresentaram a primeira regressão linear *fuzzy*, na qual consideraram a variável dependente como *fuzzy*.

A lógica *fuzzy*, também conhecida como lógica nebulosa, lógica difusa ou teoria das possibilidades, é uma extensão da lógica clássica, na qual se baseia na teoria dos conjuntos *fuzzy*. A lógica *fuzzy* foi inicialmente introduzida por Zadeh (1965), tendo como objetivo, trabalhar informações imprecisas.

De acordo com Tanaka (1997), um conjunto ou subconjunto *fuzzy*  $A$  de um conjunto universo  $U$  é definido por uma função de pertinência  $\mu_A$  representada por:

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]; \quad (1)$$

na qual  $\mu_A(x) \in [0, 1]$  é o grau de pertinência com que o elemento  $x$  de  $U$  pertence ao conjunto *fuzzy*  $A$ .

De acordo com Tsoukalas e Uhrig (1997), com qualquer conjunto *fuzzy*  $A$  pode-se associar uma coleção de conjuntos clássicos denominados de  $\alpha$  - níveis de  $A$ . Um  $\alpha$  - nível é um conjunto clássico que consiste de elementos de  $A$  na qual pertencem ao conjunto *fuzzy* com grau de pertinência maior ou igual a  $\alpha$ , isto é:

$$[A]^\alpha = \{x \in U / \mu_A(x) \geq \alpha\}; \quad (2)$$

para  $0 < \alpha \leq 1$ .

Com o objetivo de se trabalhar com operações aritméticas que envolvem incertezas, foram definidos os números *fuzzy*. Tanaka (1997) define um conjunto *fuzzy*  $A$  como número *fuzzy* quando o conjunto universo na qual  $\mu_A(x)$  está definida é o conjunto dos números reais e satisfaz as seguintes condições:

- $A$  é um conjunto convexo;
- existe pelo menos um valor de  $x$  que admite pertinência máxima ( $\mu_A(x) = 1$ );
- $\mu_A(x)$  é contínua em um dado intervalo.

Sejam  $A$  e  $B$  números *fuzzy* com  $\alpha$  - níveis dados, respectivamente, por  $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$  e  $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ . Conforme Barros e Bassanezi (2010), valem as seguintes operações intervalares:

a) A soma entre  $A$  e  $B$  é o número *fuzzy*  $A + B$ , cujos  $\alpha$  - níveis são

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]; \quad (3)$$

b) A diferença entre  $A$  e  $B$  é o número *fuzzy*  $A - B$ , cujos  $\alpha$  - níveis são

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]; \quad (4)$$

c) A multiplicação de  $\lambda$  por  $A$  é o número *fuzzy*  $\lambda A$ , cujos  $\alpha$  - níveis são

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se } \lambda < 0, \end{cases} \quad (5)$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

d) A multiplicação de  $A$  por  $B$  é o número *fuzzy*  $A.B$ , cujos  $\alpha$  - níveis são

$$[AB]^\alpha = [A]^\alpha [B]^\alpha = [\min P, \max P], \quad (6)$$

em que  $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$ ;

e) A divisão de  $A$  por  $B$  é o número *fuzzy* cujos  $\alpha$  - níveis são

$$\left[ \frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = \left[ \frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha} \right]. \quad (7)$$

O princípio de extensão de Zadeh tem como finalidade ampliar operações matemáticas do domínio clássico ao domínio *fuzzy*. De acordo com Pedrycz e Gomide (1998), sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos e  $f$  uma aplicação de  $X$  em  $Y$ . Seja  $A$  um conjunto *fuzzy* em  $X$ . O princípio de extensão afirma que a imagem de  $A$  pela função  $f$  é um conjunto *fuzzy*  $B = f(A)$  em  $Y$ , cuja função de pertinência é dada por  $\mu_B(y) = \sup_x \mu_A(x)$ .

O princípio de extensão pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis. Sejam  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  e  $Y$  conjuntos universos. Considere os conjuntos  $A_i$  em  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e uma função  $f : X \rightarrow Y$ . Os conjuntos *fuzzy*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são então transformados pela  $f$  produzindo o conjunto *fuzzy*  $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$  em  $Y$ , cuja função de pertinência é  $\mu_B(y) = \sup_x \min [\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)]$  para  $x \in X$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  e  $y = f(x)$ .

Uma das etapas importantes que envolve um estudo baseado em lógica *fuzzy*, é a etapa da defuzzificação. A defuzzificação consiste em traduzir um conjunto *fuzzy* em um número real. Existem diversos métodos de defuzzificação, sendo que o mais

utilizado é o método do Centro de Gravidade, também chamado de Centróide ou Centro de Área (Mamdani, 1974).

Em estatística, um intervalo de confiança é traduzido como uma medida de precisão, denotando incertezas presentes numa estimativa pontual. Nesse contexto, métodos baseados em lógica *fuzzy* surgem como uma alternativa para avaliar incertezas presentes em modelos estatísticos e estimadores (Buckley, 2005; Falsafain *et al.*, 2008). Em modelos de regressão quadrática, intervalos de confiança podem ser construídos para o ponto crítico utilizando diferentes metodologias, como, simulação Monte Carlo (Nunes *et al.*, 2004), metodologia *bootstrap* e inferência bayesiana (Hirschberg e Lye, 2005).

Seja o modelo de regressão quadrática com uma variável independente:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2. \quad (8)$$

Derivando-se em relação a  $x_i$ , obtém-se o estimador do ponto crítico:

$$\frac{d\hat{y}_i}{dx_i} = \frac{d(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2)}{dx_i} = \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 x_i = 0 \quad (9)$$

$$\hat{x}_i = \hat{\eta} = -\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2}; \quad (10)$$

que representa o quociente entre as variáveis aleatórias  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$ . Dessa maneira, é necessário encontrar a variância de tal quociente para se obter um intervalo de confiança para o ponto crítico.

Como alternativa aos intervalos de confiança convencionais, o presente trabalho tem, como objetivo, apresentar diferentes análises do ponto crítico de um modelo de regressão quadrática, utilizando o princípio de extensão de Zadeh, em que intervalos de confiança *fuzzy* são obtidos considerando um ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão intervalar de números *fuzzy*, e a metodologia de Buckley, em que um estimador *fuzzy* é obtido para o ponto crítico baseado em um intervalo de confiança convencional.

## 2 Metodologia

### 2.1 Análise *fuzzy* 1: Ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão de números *fuzzy*

Para a análise *fuzzy* 1, as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática foram consideradas como incertas, sendo que para isso, foram definidos os números *fuzzy*  $\tilde{\beta}_0$ ,  $\tilde{\beta}_1$  e  $\tilde{\beta}_2$  referentes às estimativas  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$ , respectivamente. Tais números *fuzzy* foram representados por meio das seguintes funções de pertinência triangulares:

$$\mu_{\tilde{\beta}_0}(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq a_0 - \delta_1 \\ \frac{a - a_0 + \delta_1}{\delta_1}, & \text{se } a_0 - \delta_1 < a \leq a_0 \\ \frac{a_0 + \delta_1 - a}{\delta_1}, & \text{se } a_0 \leq a < a_0 + \delta_1 \\ 0, & \text{se } a \geq a_0 + \delta_1 \end{cases}; \quad (11)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_1}(b) = \begin{cases} 0, & \text{se } b \leq b_0 - \delta_2 \\ \frac{b - b_0 + \delta_2}{\delta_2}, & \text{se } b_0 - \delta_2 < b \leq b_0 \\ \frac{b_0 + \delta_2 - b}{\delta_2}, & \text{se } b_0 \leq b < b_0 + \delta_2 \\ 0, & \text{se } b \geq b_0 + \delta_2 \end{cases}; \quad (12)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_2}(c) = \begin{cases} 0, & \text{se } c \leq c_0 - \delta_3 \\ \frac{c - c_0 + \delta_3}{\delta_3}, & \text{se } c_0 - \delta_3 < c \leq c_0 \\ \frac{c_0 + \delta_3 - c}{\delta_3}, & \text{se } c_0 \leq c < c_0 + \delta_3 \\ 0, & \text{se } c \geq c_0 + \delta_3 \end{cases}; \quad (13)$$

em que  $a_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$  são, respectivamente, as estimativas dos parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  obtidas via método dos mínimos quadrados que assumem grau de pertinência máximo igual a 1 em cada função de pertinência e,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  são, respectivamente, os erros padrão das estimativas  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$ .

Para realizar a discretização dos números *fuzzy*, foram considerados  $\Delta$ , como sendo um passo no intervalo de cada função de pertinência, e  $n$ , como o número de pontos a serem analisados, tendo, respectivamente, para  $\tilde{\beta}_0$ ,  $\tilde{\beta}_1$  e  $\tilde{\beta}_2$ :

$$\Delta_1 = \frac{(a_0 + \delta_1) - (a_0 - \delta_1)}{n - 1} = \frac{2\delta_1}{n - 1}; \quad (14)$$

$$\Delta_2 = \frac{(b_0 + \delta_2) - (b_0 - \delta_2)}{n - 1} = \frac{2\delta_2}{n - 1}; \quad (15)$$

$$\Delta_3 = \frac{(c_0 + \delta_3) - (c_0 - \delta_3)}{n - 1} = \frac{2\delta_3}{n - 1}. \quad (16)$$

O princípio de extensão de Zadeh foi implementado utilizando a linguagem de programação C++, sendo que as análises gráficas foram realizadas por meio do *software* GNUPLOT 4.6. Para tanto, foi considerado o seguinte modelo, denominado de modelo *fuzzy* de regressão quadrática:

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + F(\tilde{\beta}_1) + F(\tilde{\beta}_2); \quad (17)$$

em que:

$$\tilde{\beta}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{\beta}_0}(a_i)}{a_i}; \quad (18)$$

$$F(\tilde{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{\beta}_1}(b_i)}{b_i x}; \quad (19)$$

$$F(\tilde{\beta}_2) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{\beta}_2}(c_i)}{c_i x^2}. \quad (20)$$

Assim, de acordo com Pedrycz e Gomide (1998), obteve-se a seguinte função de pertinência de  $\tilde{y}$ :

$$\mu_{(\tilde{\beta}_0 + F(\tilde{\beta}_1) + F(\tilde{\beta}_2))}(z) = \max_{\{(a,b,c):a+b+c=z\}} \min [\mu_{\tilde{\beta}_0}(a), \mu_{\tilde{\beta}_1}(b), \mu_{\tilde{\beta}_2}(c)]. \quad (21)$$

Em seguida, para obter uma curva representativa do modelo *fuzzy*, foi utilizado o método de defuzzificação do Centro de Gravidade para cada valor de  $x$ .

Considerando que as estimativas  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$  são incertas, surge o ponto crítico *fuzzy* baseado na divisão de números *fuzzy*, que é dado por:

$$\tilde{\eta} = -\frac{\tilde{\beta}_1}{2\tilde{\beta}_2}. \quad (22)$$

Com o objetivo de determinar  $\tilde{\eta}$  em termos de  $\alpha$ -níveis, foram realizadas operações intervalares de multiplicação e divisão conforme Barros e Bassanezi (2010), obtendo:

$$\begin{aligned} [\tilde{\eta}]^\alpha &= -\frac{[\tilde{\beta}_1]^\alpha}{2[\tilde{\beta}_2]^\alpha} = -\frac{[\beta_{11}^{(\alpha)}; \beta_{12}^{(\alpha)}]}{2[\beta_{21}^{(\alpha)}; 2\beta_{22}^{(\alpha)}]} = -\left[\frac{\beta_{11}^{(\alpha)}}{2\beta_{22}^{(\alpha)}}; \frac{\beta_{12}^{(\alpha)}}{2\beta_{21}^{(\alpha)}}\right] = \\ &= \left[-\frac{\beta_{12}^{(\alpha)}}{2\beta_{21}^{(\alpha)}}; -\frac{\beta_{11}^{(\alpha)}}{2\beta_{22}^{(\alpha)}}\right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Dessa maneira, os  $\alpha$ -níveis obtidos foram denominados de intervalos de confiança *fuzzy* com  $\alpha\%$  de confiança para o ponto crítico *fuzzy*.

## 2.2 Análise *fuzzy* 2: Estimador *fuzzy* do ponto crítico baseado na metodologia de Buckley

A metodologia de Buckley (2005) consiste em considerar uma estimativa pontual de um determinado parâmetro como incerta, sendo que tal incerteza é definida com base em um intervalo de confiança convencional. Para isso, é estabelecida uma relação entre um conjunto composto por todos intervalos de confiança convencionais  $100(1 - \beta)\%$ , com  $0 < \beta \leq 1$ , e  $\alpha$ -níveis, com  $0 < \alpha \leq 1$ . Dessa maneira, o conjunto de intervalos de confiança convencionais é transformado em um número *fuzzy*, sendo denominado de estimador *fuzzy*.

Um estimador *fuzzy* do ponto crítico pode ser obtido de acordo com o seguinte intervalo de confiança convencional:

$$IC_{1-\beta}(\eta) = \hat{\eta} \pm t_{(v,\beta/2)} \sqrt{V(\hat{\eta})}; \quad (24)$$

em que  $v$  é o grau de liberdade do resíduo do modelo de regressão quadrática e

$$V(\hat{\eta}) = V_1 \left( -\frac{\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2} \right) = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\mu_{\hat{\beta}_1}}{\mu_{\hat{\beta}_2}} \right)^2 \left( \frac{V[\hat{\beta}_1]}{\mu_{\hat{\beta}_1}^2} + \frac{V[\hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_2}^2} - \frac{2Cov[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]}{\mu_{\hat{\beta}_1} \mu_{\hat{\beta}_2}} \right) \right];$$

como a variância do ponto crítico de acordo com Mood *et al.* (1974).

Com isso, obteve-se o seguinte estimador *fuzzy* para  $\eta$  em termos de  $\alpha$ -níveis:

$$\left( \hat{E} \right)_{\alpha} = [E_1(\alpha); E_2(\alpha)]; \quad (25)$$

$$\left( \hat{E} \right)_{\alpha} = \left[ \hat{\eta} - t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V(\hat{\eta})}; \hat{\eta} + t_{(v,\alpha/2)} \sqrt{V(\hat{\eta})} \right]; \quad (26)$$

para  $0 < \alpha \leq 1$ .

Dessa maneira, considerando as estimativas obtidas para os parâmetros via método dos mínimos quadrados, uma estimativa *fuzzy* do ponto crítico foi obtida por meio do *software* MAPLE 12.

### 2.3 Aplicação - Dados de produção de matéria seca

Para a realização deste trabalho, foram considerados dados adaptados da pesquisa desenvolvida por Santos *et al.* (2002), na qual avaliaram as respostas de fungo micorrízico arbuscular, adubações fosfatada e nitrogenada na produção e qualidade da forragem de braquiário e amendoim forrageiro consorciados. Para tanto, foi utilizado o delineamento inteiramente casualizado em um esquema fatorial 5x2x2, com 4 repetições, perfazendo um total de 20 tratamentos, sendo 5 doses de adubação fosfatada, 2 tratamentos de inoculação (inoculado e não inoculado com fungo micorrízico arbuscular) e 2 tratamentos de adubação nitrogenada (com e sem adubação nitrogenada em cobertura).

Dentre as variáveis avaliadas, a produção de matéria seca do sistema radicular do braquiário ( $\text{g.vaso}^{-1}$ ) foi influenciada significativamente pelas doses de adubação fosfatada ( $\text{mg.kg}^{-1}$ ) quando não inoculada com fungo micorrízico arbuscular e com adubação nitrogenada em cobertura. Dessa maneira, foi considerado o seguinte modelo de regressão quadrática:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i; \quad (27)$$

em que:

$y_i$  representa o  $i$ -ésimo valor observado da produção de matéria seca,  $\text{g.vaso}^{-1}$ ;  
 $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros a serem estimados;

$x_i$  representa o  $i$ -ésimo valor fixo da dose de adubação fosfatada,  $\text{mg.kg}^{-1}$ ;  
 $\varepsilon_i$  é o erro experimental associado a observação  $y_i$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ .

Como suposição básica para a realização do estudo, considerou-se que todos os parâmetros são significativamente diferentes de zero, principalmente para  $\beta_2$ .

A Figura 1 apresenta o comportamento da produção de matéria seca ( $y$ ) em função de diferentes doses de adubação fosfatada ( $x$ ).

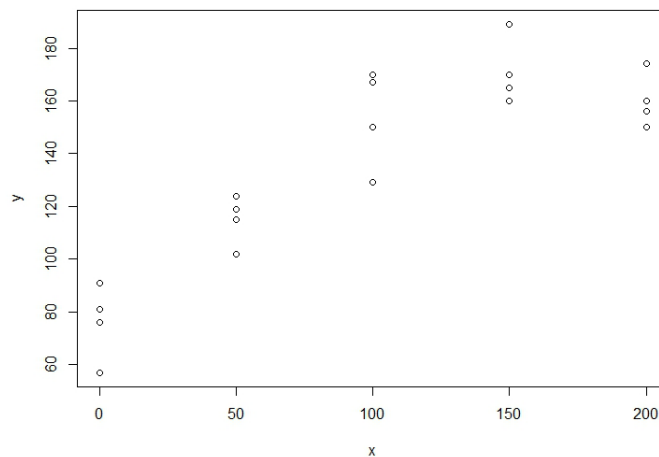


Figura 1 - Dados de produção de matéria seca ( $\text{g.vaso}^{-1}$ ) em função de diferentes doses de adubação fosfatada ( $\text{mg.kg}^{-1}$ ).

### 3 Resultados e discussão

Considerando os dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada, o modelo de regressão quadrática ajustado, de acordo com o método dos mínimos quadrados, foi igual a  $\hat{y} = 73,1929 + 1,1413x - 0,0035x^2$ , com  $R^2 = 0,9864$ , que explica 98,64% da variabilidade dos dados, denotando um modelo adequado para os dados de produção de matéria seca ( $y$ ) em função das doses crescentes ( $x$ ) de adubação fosfatada, e  $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = 182,45$ . A estimativa pontual do ponto crítico foi de 163,0429  $\text{mg.kg}^{-1}$  de adubo fosfatado, resultando na produção máxima de matéria seca.

#### 3.1 Análise fuzzy 1: Ponto crítico fuzzy baseado na divisão de números fuzzy

A Tabela 1 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática por meio do método dos mínimos quadrados e os erros padrão das



estimativas, considerando os dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada.

Tabela 1 - Estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática e respectivos erros padrão das estimativas

| Parâmetro | Estimativa | Erro padrão |
|-----------|------------|-------------|
| $\beta_0$ | 73,1929    | 6,0839      |
| $\beta_1$ | 1,1413     | 0,1441      |
| $\beta_2$ | -0,0035    | 0,0007      |

Considerando os erros padrão das estimativas como incertezas no modelo *fuzzy* de regressão quadrática, as seguintes funções de pertinência triangulares foram obtidas:

$$\mu_{\tilde{\beta}_0}(a) = \begin{cases} 0, & se & a \leq 67,1090 \\ \frac{a-67,1090}{6,0839}, & se & 67,1090 < a \leq 73,1929 \\ \frac{79,2768-a}{6,0839}, & se & 73,1929 \leq a < 79,2768 \\ 0, & se & a \geq 79,2768 \end{cases}; \quad (28)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_1}(b) = \begin{cases} 0, & se & b \leq 0,9972 \\ \frac{b-0,9972}{0,1441}, & se & 0,9972 < b \leq 1,1413 \\ \frac{1,2854-b}{0,1441}, & se & 1,1413 \leq b < 1,2854 \\ 0, & se & b \geq 1,2854 \end{cases}; \quad (29)$$

$$\mu_{\tilde{\beta}_2}(c) = \begin{cases} 0, & se & c \leq -0,0042 \\ \frac{c+0,0042}{0,0007}, & se & -0,0042 < c \leq -0,0035 \\ \frac{-0,0028-c}{0,0007}, & se & -0,0035 \leq c < -0,0028 \\ 0, & se & c \geq -0,0028 \end{cases}. \quad (30)$$

A Figura 2 apresenta a solução do modelo *fuzzy* de regressão quadrática através do princípio de extensão de Zadeh, em que a escala entre 0 e 1 representa os graus de pertinência de  $y$  (produção de matéria seca, g.vaso<sup>-1</sup>), sendo que a região amarela representa os valores de  $y$  com pertinência em torno de 1. Pode-se observar que para cada valor de  $x$  (dose de adubação fosfatada, mg.kg<sup>-1</sup>) têm-se incertezas quanto ao valor de  $y$ . Como exemplo, em  $x = 160$ , tem-se pertinência em torno de 0 para  $y = 120$  e, para  $y = 165$ , tem-se pertinência em torno de 1. Ainda pode-se verificar que incertezas quanto a  $y$  são menos presentes para valores menores de  $x$ . A Figura 3 apresenta a solução defuzzificada do modelo *fuzzy* pelo método do Centro de Gravidade e a solução clássica obtida pelo método dos mínimos quadrados.

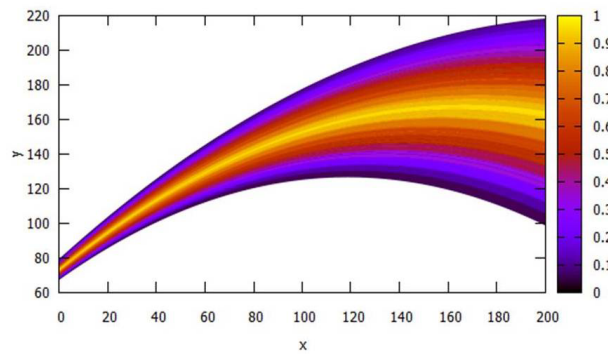


Figura 2 - Solução do modelo *fuzzy* de regressão quadrática, considerando os dados de produção de matéria seca ( $y$ ) em função de diferentes doses de adubação fosfata ( $x$ ).

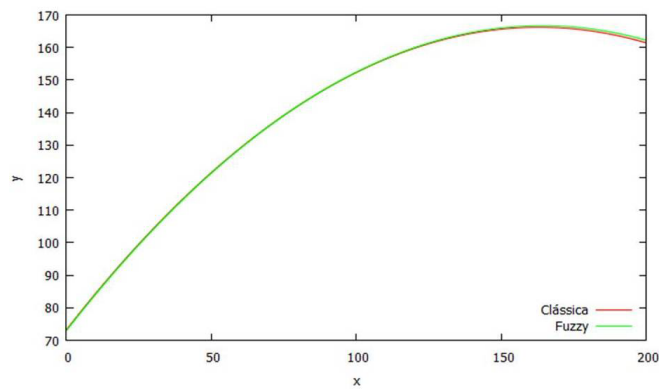


Figura 3 - Solução defuzzificada do modelo *fuzzy* de regressão quadrática e solução clássica obtida pelo método dos mínimos quadrados, considerando os dados de produção de matéria seca ( $y$ ) em função de diferentes doses de adubação fosfata ( $x$ ).

De acordo com os números *fuzzy*  $\tilde{\beta}_1$  e  $\tilde{\beta}_2$ , foi obtido o ponto crítico *fuzzy* em termos de  $\alpha$ -nível:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{\eta}]^\alpha &= \frac{[0, 1441\alpha + 0, 9972; -0, 1441\alpha + 1, 2854]}{[0, 0014\alpha + 0, 0056; -0, 0014\alpha + 0, 0084]} = \\
 &= \left[ \frac{0, 1441\alpha + 0, 9972}{-0, 0014\alpha + 0, 0084}; \frac{-0, 1441\alpha + 1, 2854}{0, 0014\alpha + 0, 0056} \right].
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Expressando  $[\tilde{\eta}]^\alpha$  em termos de função de pertinência, obteve-se:

$$\mu_{\tilde{\eta}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 118,7143 \\ \frac{0,9972-0,0084x}{-0,1441-0,0014x}, & \text{se } 118,7143 < x \leq 163,0429 \\ \frac{1,2854-0,0056x}{0,1441+0,0014x}, & \text{se } 163,0429 \leq x < 229,5357 \\ 0, & \text{se } x \geq 229,5357 \end{cases} \quad (32)$$

A Figura 4 apresenta a função de pertinência de  $\tilde{\eta}$ , representado as incertezas quanto ao ponto crítico. Como exemplo, para um ponto crítico igual a 180, tem-se grau de pertinência igual a 0,70 no conjunto  $\tilde{\eta}$ , sendo que para um ponto crítico igual a 125, tem-se grau de pertinência igual a 0,17.

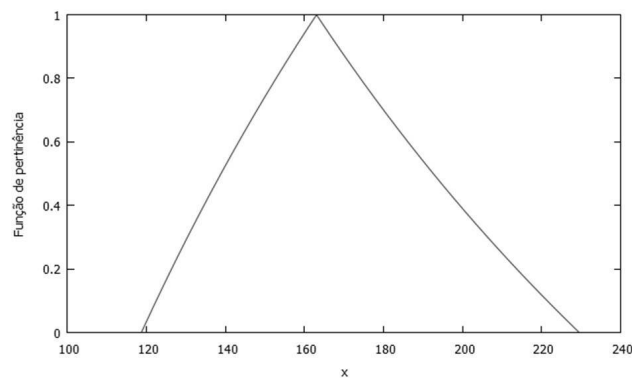


Figura 4 - Representação gráfica da função de pertinência do ponto crítico *fuzzy*.

A Tabela 2 apresenta intervalos de confiança *fuzzy* para o ponto crítico *fuzzy* para  $\alpha$ -níveis entre 0,20 e 1,00. Tem-se, por exemplo, de acordo com a definição de  $\alpha$ -nível, valores de  $x$  entre 160,4095 e 165,7294 pertencem ao conjunto clássico  $[\tilde{\eta}]^{0,95}$ ; nesse caso, o intervalo  $[\tilde{\eta}]^{0,95} = [160,4095; 165,7294]$  é definido como um intervalo de confiança *fuzzy* com 95% de confiança para o ponto crítico *fuzzy*. Com isso, têm-se 95% de possibilidade de obter aproximadamente a produção máxima de matéria seca considerando doses entre 160,4095 e 165,7294 mg.kg<sup>-1</sup> de adubação fosfatada. Para  $\alpha = 1,00$ , em que se tem a pertinência máxima,  $[\tilde{\eta}]^{1,00} = [163,0429; 163,0429]$  representa um intervalo de confiança *fuzzy* com 100% de confiança para o ponto crítico *fuzzy*, sendo que diante das incertezas consideradas, uma dose igual a 163,0429 mg.kg<sup>-1</sup> de adubação fosfatada proporciona aproximadamente a produção máxima de matéria seca, sendo que tal dose corresponde a estimativa pontual obtida utilizando o método dos mínimos quadrados. Como a maior dose de adubação fosfatada utilizada no experimento foi igual a 200 mg.kg<sup>-1</sup>, os intervalos de confiança *fuzzy* com  $\alpha$ -níveis menores do que 0,40 não fazem sentido prático, pois extrapolam o limite superior utilizado.

Diante dos resultados apresentados, operações intervalares *fuzzy* se mostram como uma alternativa apropriada para analisar estimadores, como verificado por Lee (2001).

Tabela 2 - Limites inferior ( $\eta_1^\alpha$ ) e superior ( $\eta_2^\alpha$ ) do intervalo de confiança *fuzzy* para o ponto crítico *fuzzy*, considerando  $\alpha$ -níveis entre 0,20 e 1,00

| $\alpha$ | $[\tilde{\eta}]^\alpha$ |                 |
|----------|-------------------------|-----------------|
|          | $\eta_1^\alpha$         | $\eta_2^\alpha$ |
| 0,20     | 126,3571                | 213,7041        |
| 0,25     | 128,3509                | 209,9790        |
| 0,30     | 130,3797                | 206,3405        |
| 0,35     | 132,4444                | 202,7857        |
| 0,40     | 134,5459                | 199,3117        |
| 0,45     | 136,6853                | 195,9157        |
| 0,50     | 138,8636                | 192,5952        |
| 0,55     | 141,0819                | 189,3477        |
| 0,60     | 143,3413                | 186,1708        |
| 0,65     | 145,6429                | 183,0622        |
| 0,70     | 147,9879                | 180,0198        |
| 0,75     | 150,3776                | 177,0414        |
| 0,80     | 152,8132                | 174,1250        |
| 0,85     | 155,2961                | 171,2688        |
| 0,90     | 157,8277                | 168,4708        |
| 0,95     | 160,4095                | 165,7294        |
| 1,00     | 163,0429                | 163,0429        |

### 3.2 Análise 2: Estimador *fuzzy* do ponto crítico baseado na metodologia de Buckley

De acordo com as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão quadrática, considerando os dados de produção de matéria seca em função de diferentes doses de adubação fosfatada, obteve-se a estimativa *fuzzy* do ponto crítico em termos de  $\alpha$ -níveis:

$$\left(\hat{E}\right)_\alpha = [163,0429 - t_{(15,\alpha/2)} \cdot 14,3653; 163,0429 + t_{(15,\alpha/2)} \cdot 14,3653]; \quad (33)$$

em que  $t_{(v,\alpha/2)}$  é o valor crítico da distribuição  $t$  de Student para  $v = 15$ .

Por exemplo, para  $\alpha = 0,95$ , tem-se que:

$$\left(\hat{E}\right)_{0,95} = [162,1269; 163,9589];$$

na qual, com grau de possibilidade igual a 0,95, valores do ponto crítico entre 162,1269 e 163,9589 mg.kg<sup>-1</sup> de adubação fosfatada fornecem aproximadamente a produção máxima da cultura. A Tabela 3 apresenta a estimativa *fuzzy*  $\left(\hat{E}\right)_\alpha$  do ponto crítico considerando  $\alpha$ -níveis entre 0,65 e 1,00.

A Figura 5 apresenta a função de pertinência da estimativa *fuzzy*, na qual pode-se observar que a estimativa pontual do ponto crítico obtida pelo método dos

mínimos quadrados,  $x = \hat{\eta} = 163,0429$ , apresenta grau de pertinência igual a 1,00. Dessa maneira, a estimativa *fuzzy* oferece, com certo grau de pertinência, valores do ponto crítico que resultam aproximadamente na produção máxima da cultura.

De acordo com Buckley (2005), a estimativa *fuzzy* do ponto crítico contém mais informações do que uma simples estimativa pontual ou intervalar convencional, sendo que a estimativa *fuzzy* contém a estimativa pontual  $\hat{\eta}$  e todos os  $100(1 - \beta)\%$ . Tal resultado também é enfatizado por Parchami e Mashinchi (2007), na qual utilizaram a metodologia de Buckley em índices de capacidade de processos no controle da qualidade de produtos e serviços.

Tabela 3 - Estimativa *fuzzy*  $(\hat{E})_\alpha$  do ponto crítico considerando  $\alpha$ -níveis entre 0,65 e 1,00

| $\alpha$ | $(\hat{E})_\alpha$   |
|----------|----------------------|
| 0,65     | [156,3916; 169,6942] |
| 0,70     | [157,4004; 168,6854] |
| 0,75     | [158,3807; 167,7052] |
| 0,80     | [159,3383; 166,7475] |
| 0,85     | [160,2788; 165,8070] |
| 0,90     | [161,2069; 164,8789] |
| 0,95     | [162,1269; 163,9589] |
| 1,00     | [163,0429; 163,0429] |

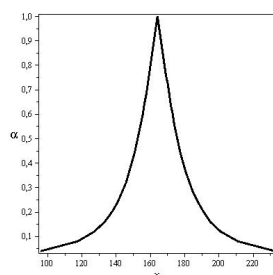


Figura 5 - Representação gráfica da função de pertinência da estimativa *fuzzy* do ponto crítico, utilizando a metodologia de Buckley.

## Conclusões

As incertezas incorporadas no modelo de regressão quadrática proporcionaram a obtenção do ponto crítico *fuzzy* considerando o princípio de extensão de Zadeh, na qual, por meio de operações aritméticas intervalares, resultou na construção de intervalos de confiança *fuzzy* satisfatórios. Diante da metodologia apresentada, o

pesquisador pode analisar incertezas advindas de especialistas e dados estatísticos no modelo de regressão, e avaliar níveis de possibilidade para se obter um intervalo para o ponto crítico.

Com base num estimador *fuzzy* para o ponto crítico, de acordo com a metodologia de Buckley, uma análise mais completa de um intervalo de confiança convencional pode ser realizada. Dessa maneira, o pesquisador pode avaliar o comportamento de tal estimador diante de diferentes incertezas.

FERREIRA, L.; MORAIS, A. R.; PIRES, D. M.; SOUZA, S. M.; MOURA, G. B.; SILVA, A. M. Application of fuzzy logic in statistics - an approach in quadratic regression models. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.30, n.4, p.461-475, 2012.

- **ABSTRACT:** *With the advancement of fuzzy set theory, many researches have been developed by combining statistical methods with fuzzy logic. In the study of quadratic regression models, there may be interest in obtaining a confidence interval for the critical point. As the critical point estimator involves a quotient of random variables, would be necessary to find the variance estimator for constructing such confidence intervals. Alternatively the construction of conventional confidence intervals, this paper has as a main goal to present different analyzes of the critical point of a quadratic regression model using fuzzy logic. Therefore, were considered data from dry matter production of signal grass at different doses of phosphorus. In the first analysis, by the Zadeh's extension principle, a fuzzy quadratic regression model was found considering uncertainties on estimates of the parameters obtained by the least squares method. Thus, a fuzzy critical point and fuzzy confidence intervals were obtained using interval operations and  $\alpha$ -cuts. A second fuzzy analysis was performed considering the Buckley's methodology, in which a fuzzy estimator to the critical point was constructed based on a conventional confidence interval. Considering the uncertainties treated in the first fuzzy analysis, the increased levels of confidence, based on  $\alpha$ -cuts, resulted in better accuracy of the fuzzy confidence intervals. In the second analysis, the Buckley's methodology provided more information than a conventional point estimate or interval.*
- **KEYWORDS:** *Confidence interval; fuzzy logic; Zadeh's extension principle; fuzzy estimator.*

## Referências

- BARGIELA, A.; PEDRYCZ, W.; NAKASHIMA, T. Multiple regression with fuzzy data. *Fuzzy Sets Syst.*, Amsterdam, v.158, n.19, p.2169-2188, 2007.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. 2.ed. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2010. 404p.
- BUCKLEY, J. J. Fuzzy statistics: hypothesis testing. *Soft Comput.*, Secaucus, v.9, n.7, p.512-518, 2005.
- FALSAFAIN, A.; TAHERI, S. M.; MASHINCHI, M. Fuzzy estimation of parameters in statistical models. *Int. J. Comput. Math. Sci.*, Chatsworth, v.2, n.2, p.79-85, 2008.

- GONZÁLEZ-RODRIGUES, G.; COLUBI, A.; GIL, A. M. A fuzzy representation of random variables: an operational tool in exploratory analysis and hypothesis testings. *Comput. Stat. Data Anal.*, Amsterdam, n.51, p.163-176, 2006.
- GRZEGORZEWSKI, P.; HRYNIEWICZ, O. Testing statistical hypotheses in fuzzy environment. *Mathw. Soft Comput.*, Granada, v.4, p.203-217, 1997.
- HIRSCHBERG, J. G.; LYE, J. N. *Inferences for the extremum of quadratic regression models*. Melbourne: The University of Melbourne, Department of Economics, 2005. p.1-23 (Research Paper, 906).
- LEE, H. T.  $C_{pk}$  index estimation using fuzzy numbers. *Eur. J. Operat. Res.*, Amsterdam, v.129, n.3, p.683-688, 2001.
- MAMDANI, E. H. Applications of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. *Proc. IEEE*, New York, v.121, n.12, p.1585-1588, 1974.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D.C. *Introduction to the theory of statistics*. 3.ed. Tokio: McGraw-Hill, 1974. 564p.
- NUNES, C. C. F.; MORAIS, A. R.; MUNIZ, J. A.; SÁFADI, T. Variâncias do ponto crítico de equações de regressão quadrática. *Ciênc. Agrotecnol.*, Lavras, v.28, n.2, p.389-396, 2004.
- PARCHAMI, A.; MASHINCHI, M. Fuzzy estimation for process capability indices. *Inf. Sci.*, Philadelphia, v.177, n.6, p.1452-1462, 2007.
- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *An introduction to fuzzy sets: analysis and design*. Cambridge: MIT, 1998. 461p.
- SANTOS, I. P. A.; PINTO, J. C.; SIQUEIRA, J. O.; MORAIS, A. R.; SANTOS, C. L. Influência do fósforo, micorriza e nitrogênio no conteúdo de minerais de *Brachiaria brizantha* e *Arachis pintoi* consorciados. *Rev. Bras. Zootec.*, Viçosa, v.31, n.2, p.605-616, 2002.
- TANAKA, K. *An introduction to fuzzy logic for practical applications*. Tokyo: Springer, 1997. 138p.
- TANAKA, H.; UEJIMA, S.; ASAI, K. Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE Trans. Syst., Man Cyber., Part A. Syst. Hum.*, New York, v.12, n.6, p.903-907, 1982.
- TSOUKALAS, C. D.; UHRIG, M. A. *Fuzzy and neural approaches in engineering*. New York: John Wiley, 1997. 587p.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *J. Inf. Control*, Rolling Meadows, v.8, p.338-353. 1965.
- ZADEH, L. A. Probability measures of fuzzy events. *J. Math. Anal. Appl.*, Maryland Heights, v.23, n.2, p.421-427, 1968.

Recebido em 26.06.2012.

Aprovado após revisão em 25.04.2013.