DISTRIBUIÇÕES MULTIVARIADAS DAS ESTATÍSTICAS DO TESTE DE DUNNETT NÃO-CENTRAL

Siomara Cristina BROCH[1]
Daniel Furtado FERREIRA[2]

▪ RESUMO: O teste de Dunnett é um teste utilizado para comparar simultaneamente a média de tratamentos em teste com a média de um tratamento controle, considerando que as amostras são aleatórias e independentes, oriundas de variáveis com distribuições normais. A limitação para o uso deste teste é a dificuldade em se obter as probabilidades da distribuição t multivariada e os valores dos quantis da estatística, pois o teste pode ser aplicado em situações balanceadas e não-balanceadas, unilateral ou bilateral, com infinitas possibilidades de correlações entre as comparações. Este artigo apresenta uma demonstração para as distribuições t multivariadas não-centrais relacionadas com as estatísticas do teste de Dunnett considerando um vetor de não-centralidade $\boldsymbol{\delta}$. Inicialmente é apresentada a distribuição do máximo e a distribuição do máximo do módulo da normal multivariada não-central. A partir dessas distribuições obtém-se a distribuição t multivariada não-central. A função da distribuição do máximo da t multivariada não-central e do máximo do módulo da t multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$ é utilizada no teste de Dunnett unilateral e bilateral, respectivamente, quando os graus de liberdade são finitos. Quando os graus de liberdade tendem ao infinito, as funções de distribuição recaem na distribuição do máximo da normal multivariada não-central e do máximo do módulo da normal multivariada não-central.

▪ PALAVRAS-CHAVE: Comparações múltiplas com um controle; distribuição t multivariada não-central; *software R*.

[1]Instituto Federal Farroupilha – IFF, CEP: 98130-000, Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: *siomarabroch@jc.iffarroupilha.edu.br*
[2]Universidade Federal de Lavras – UFLA, Departamento de Ciências Exatas, Lavras, MG, Brasil. E-mail: *danielff@dex.ufla.br*. Bolsista CNPq.

1 Introdução

Em algumas áreas de pesquisa, como na experimentação farmacológica, agrícola, biológica e de alimentos, dentre outras, é comum os pesquisadores terem interesse em comparar simultaneamente a média dos tratamentos com a média de um tratamento padrão, denominado de controle. Um exemplo típico ocorre no uso de delineamentos como o de blocos aumentados. Neste tipo de experimento são avaliados muitos tratamentos e um tratamento controle. O objetivo é verificar quais destes tratamentos em teste superam em desempenho o tratamento controle. Nesses casos, quando as amostras são aleatórias e independentes, oriundas de variáveis com distribuições normais, um teste muito utilizado é o teste de Dunnett.

A grande vantagem do uso do teste de Dunnett é que se trata de um procedimento de inferências simultâneas que mantém a probabilidade do erro tipo I no nível nominal α para todo o conjunto de comparações. Isto porque o teste considera um ajuste da multiplicidade de comparações possibilitando que as taxas de erro tipo I por experimento sejam controladas em um nível de significância exato α. A estatística deste teste também é utilizada para determinar os intervalos de confiança dos verdadeiros valores das diferenças entre a média de cada um dos tratamentos em teste e o tratamento controle, com um valor $1-\alpha$ de coeficiente de confiança conjunto.

O teste de Dunnett pode ser ser unilateral ou bilateral, aplicado em situações balanceadas ou não-balanceadas. Consideram-se balanceadas, para a aplicação do teste de Dunnett, aqueles experimentos em que todos os tratamentos em teste têm o mesmo tamanho amostral, podendo diferir ou não do tamanho da amostra do tratamento controle. Já os experimentos não-balanceadas são aqueles nos quais os tratamentos podem ter qualquer tamanho amostral.

A distribuição da estatística para comparar médias com a testemunha considera a variável aleatória $\boldsymbol{S} = \widehat{\sigma}/\sigma$, em que a variância do erro $\widehat{\sigma}^2$ (variância residual amostral) está associada a ν graus de liberdade e tem distribuição independente à das médias. Os diversos contrastes considerados simultaneamente não são independentes, devido à presença do tratamento controle como um tratamento comum à todos eles. Assim, pode haver diferentes correlações entre os contrastes dos tratamentos em teste com o tratamento controle. As correlações podem assumir infinitos valores no intervalo [0,1].

As estatísticas utilizadas no teste de Dunnett têm distribuição normal ou t multivariadas dependendo dos graus de liberdade da variância amostral. Se ν é finito tem-se uma distribuição t multivariada e se ν tende para o infinito a distribuição é normal multivariada. Além disso, para cada valor de ν, das correlações e do nível de significância do teste tem-se uma diferente distribuição multivariada para a estatística.

Neste artigo, é apresentada a obtenção detalhada das distribuições t multivariadas não-centrais relacionadas com as estatísticas do teste de Dunnett considerando um vetor de não-centralidade $\boldsymbol{\delta}$. Inicialmente obteve-se a distribuição do máximo e do máximo do módulo da normal multivariada não-central. A partir dessas distribuições chega-se a distribuição t multivariada não-central aplicável às estatísticas do teste de Dunnett.

Optou-se por considerar as estatísticas dos testes para as distribuições não-centrais por serem mais abrangentes, recaindo no caso central quando o parâmetro de não-centralidade for o vetor nulo. Além disso, as distribuições não-centrais possibilitam a ampliação do uso das rotinas para a avaliação do poder do teste, sem a necessidade de uso de simulação.

2 Distribuição do máximo e do máximo do módulo da normal multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$

Para obter a distribuição das estatísticas do teste de Dunnett é necessário obter primeiro a distribuição $max(\mathbf{Z}) = \max\limits_i(Z_i)$, que é utilizada para os testes unilaterais e a distribuição do $max(|\mathbf{Z}|) = \max\limits_i(|Z_i|)$ que é utilizada para os testes bilaterais, sendo $\mathbf{Z}$ um vetor aleatório com distribuição normal padrão multivariado, ou seja, possui distribuição normal multivariada com média $\mathbf{0}$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\rho}$, para $i = 1, 2, \ldots, r$. Nesse caso, $\boldsymbol{\rho}$ é uma matriz de correlação $r \times r$.

A função de distribuição acumulada de $\mathbf{Z}$ é definida em termos da função de distribuição de probabilidade conjunta das r variáveis aleatórias dada por

$$\begin{aligned}\Phi_{Z_1,Z_2,\ldots,Z_r}(z_1, z_2, \ldots, z_r) &= P(\mathbf{Z} < \mathbf{z}) = P(Z_1 < z_1, Z_2 < z_2, \ldots, Z_r < z_r)\\ &= \int_{-\infty}^{z_1} \cdots \int_{-\infty}^{z_r} \phi_{Z_1,\ldots,Z_r}(u_1, \ldots, u_r) du_1 \ldots du_r,\end{aligned}$$

em que $\phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}; \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} |\boldsymbol{\rho}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}^\top \boldsymbol{\rho}^{-1}\mathbf{z})\right\}$.

Do mesmo modo, a distribuição do $max(\mathbf{Z})$ e, de forma similar a do $max(|\mathbf{Z}|)$, recaem em integrais de r-dimensões. Essas integrais podem ser reduzidas se os Z_i's puderem ser expressos como combinações lineares de variáveis aleatórias normais padrões independentes. A escolha dessas combinações lineares deve recair em um fator obtido de $\boldsymbol{\rho}_{r\times r}$.

Teorema 2.1. ***Função de distribuição do máximo da normal multivariada não-central***
Considerando o vetor aleatório normal multivariado $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_r, Y_0)^\top$, *em que cada* Y_i *é uma variável aleatória independente e distribuída como normal padrão. Então* $\mathbf{Y} \sim \mathbb{N}_{r+1}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.
Usando a matriz de combinações lineares dada por

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda_1^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda_2^2} & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda_3^2} & \ldots & 0 & -\lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{1-\lambda_r^2} & -\lambda_r \end{pmatrix}, \tag{1}$$

e um vetor de constantes $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)^\top$ *pode-se obter a transformação* $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\delta}$*, em que* $\mathbf{Z} \sim \mathbb{N}_r(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\rho})$ *cuja matriz* $\boldsymbol{\rho}$ *satisfaz a condição de estrutura de correlação produto*

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 & \ldots & \lambda_1\lambda_r \\ \lambda_2\lambda_1 & 1 & \lambda_2\lambda_3 & \ldots & \lambda_2\lambda_r \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & 1 & \ldots & \lambda_3\lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r\lambda_1 & \lambda_r\lambda_2 & \lambda_r\lambda_3 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

em que $\rho_{ij} = \lambda_i\lambda_j$ *para* $1 \leq i \neq j \leq r$*, com* λ_i *e* $\lambda_j \in (-1,1)$*.*
Então, o máximo do vetor $\mathbf{Z}$*, dado por* $Z = \max_i Z_i$*, tem a seguinte função de distribuição de probabilidade:*

$$F_Z(z; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{r} \Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) \right] \phi(y) dy, \tag{3}$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$*.*

Demonstração:
Considerando as hipóteses, tem-se a transformação $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\delta}$, ou seja

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda_1^2} & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda_2^2} & \ldots & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{1-\lambda_r^2} & -\lambda_r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda_1^2}Y_1 - \lambda_1 Y_0 + \delta_1 \\ \sqrt{1-\lambda_2^2}Y_2 - \lambda_2 Y_0 + \delta_2 \\ \vdots \\ \sqrt{1-\lambda_r^2}Y_r - \lambda_r Y_0 + \delta_r \end{pmatrix}.$$

Assim, $E(\mathbf{Z}) = E(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\delta}) = E(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y}) + \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Lambda}E(\mathbf{Y}) + \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}$

$$\Rightarrow E(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_r \end{pmatrix}$$

e $\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \text{Cov}(\mathbf{\Lambda Y} + \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{\Lambda}\text{Cov}(\mathbf{Y})\mathbf{\Lambda}^\top = \mathbf{\Lambda}.\mathbf{I}\mathbf{\Lambda}^\top = \mathbf{\Lambda\Lambda}^\top$, ou seja

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{1-\lambda_1^2}\right]^2 + \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \dots & \lambda_1\lambda_r \\ \lambda_2\lambda_1 & \left[\sqrt{1-\lambda_2^2}\right]^2 + \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2\lambda_r \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \dots & \lambda_3\lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r\lambda_1 & \lambda_r\lambda_2 & \dots & \left[\sqrt{1-\lambda_r^2}\right]^2 + \lambda_r^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 & \dots & \lambda_1\lambda_r \\ \lambda_2\lambda_1 & 1 & \lambda_2\lambda_3 & \dots & \lambda_2\lambda_r \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & 1 & \dots & \lambda_3\lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r\lambda_1 & \lambda_r\lambda_2 & \lambda_r\lambda_3 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\rho}.$$

Logo, o vetor aleatório $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ..., Z_r)^\top$, cuja forma geral do i-ésimo termo é

$$Z_i = \sqrt{1-\lambda_i^2}Y_i - \lambda_i Y_0 + \delta_i, \quad com \quad 1 \leq i \leq r,$$

tem distribuição normal multivariada $\mathbf{Z} \sim \mathbb{N}_r(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\rho})$ e a função de densidade de $\mathbf{Z}$ é dada por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\rho}) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} |\boldsymbol{\rho}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta})^\top \boldsymbol{\rho}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta})\right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_{Z_i}(z; \delta_i, \lambda_i) &= P(Z_i \leq z) \\ &= P\left(\sqrt{1-\lambda_i^2}Y_i - \lambda_i Y_0 + \delta_i \leq z\right) \\ &= P\left(Y_i \leq \frac{\lambda_i Y_0 + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right). \end{aligned}$$

Cada $Y_i \sim \mathbb{N}(0{,}1)$, mas a acumulada $F_{Z_i}(z)$ depende de Y_0, que é uma variável aleatória. Condicionando ao conhecimento do valor de Y_0 que será denotado por y tem-se

$$F_{Z_i}(z; \delta_i, \lambda_i | Y_0 = y) = P\left(Y_i \leq \frac{\lambda_i Y_0 + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \middle| Y_o = y\right) \quad = P\left(Y_i \leq \frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right).$$

Logo, usando o resultado de probabilidades condicionais [**?**] [**?**], tem-se

$$F_{Z_i}(z; \delta_i, \lambda_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \phi(y) dy.$$

Usando o resultado da distribuição do máximo de variáveis aleatórias independentes, tem-se

$$P(Z_1 \leq z, Z_2 \leq z, \ldots, Z_r \leq z) = P\left(\max_i Z_i \leq z\right) = \prod_{i=1}^{r} \Phi\left(\frac{\lambda_i Y_0 + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right),$$

com $Z = \max_i Z_i$ tem-se que

$$F_Z(z; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{r} \Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right] \phi(y) dy,$$

como se queria mostrar. ∎

Esta função da distribuição do máximo da normal multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$ é utilizada no teste de Dunnett unilateral quando os graus de liberdade são infinitos, ou seja, quando se conhece a variância residual.

Teorema 2.2. ***Função densidade do máximo da normal multivariada não-central***
Dadas as mesmas condições do teorema 2.1, o máximo do vetor $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\delta}$*, sendo* $Z = \max_i Z_i$*, tem a seguinte função densidade de probabilidade:*

$$f_Z(z; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \Phi\left(\frac{\lambda_k y + z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\} \phi(y) dy, \tag{4}$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ *e* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)^\top$.

Demonstração:
A função densidade de probabilidade do máximo da normal multivariada não-central, $Z = \max_i(Z_i)$, é obtida derivando-se (3) em relação a z, ou seja

$$f_Z(z; \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right] \phi(y) dy \right\}.$$

A derivada do produto de funções é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[f_1(q)\overbrace{f_2(q)\ldots f_r(q)}^{Q_{-1}}]}{\partial q} &= f_1'(q).Q_{-1}(q) + f_1(q)Q_{-1}' \\
&= f_1'(q).Q_{-1}(q) + f_1(q)[f_2'(q).Q_{-1,-2}(q) + f_2(q)Q_{-1,-2}'(q)],
\end{aligned}$$

com $Q_{-1,-2}(q) = f_3(q)\dots f_r(q)$

$$\frac{\partial[f_1(q)f_2(q)\dots f_r(q)]}{\partial q} = f_1'(q).Q_{-1}(q) + f_2'(q).Q_{-2}(q) + f_1(q)f_2(q)Q_{-1,-2}'(q),$$

com $Q_{-2}(q) = f_1(q)f_3(q)\dots f_r(q)$

$$\frac{\partial[f_1(q)f_2(q)\dots f_r(q)]}{\partial q} = f_1'(q).Q_{-1}(q) + f_2'(q).Q_{-2}(q) + f_1(q)f_2(q)[f_3'(q)Q_{-1,-2,-3}(q)$$

$+f_3(q)Q_{-1,-2,-3}'(q)]$, com $Q_{-1,-2,-3}(q) = f_4(q)\dots f_r(q)$

$$\frac{\partial[f_1(q)f_2(q)\dots f_r(q)]}{\partial q} = f_1'(q).Q_{-1}(q) + f_2'(q).Q_{-2}(q) + f_3'(q).Q_{-3}(q) + f_1(q)f_2(q)\times$$

$\times f_3(q)Q_{-1,-2,-3}'(q)$, com $Q_{-3}(q) = f_1(q), f_2(q), f_4(q), \dots, f_r(q)$

e, de forma generalizada

$$\frac{\partial[f_1(q)f_2(q)\dots f_r(q)]}{\partial q} = \sum_{i=1}^{r} f_i'(q) \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} f_k(q). \tag{5}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_Z(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right]\phi(y)dy\right\}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Phi\left(\frac{\lambda_k y + z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}\phi(y)dy, \end{aligned}$$

como se queria mostrar. ■

Teorema 2.3. ***Função de distribuição do máximo do módulo da normal multivariada não-central***
Dadas as mesmas condições do teorema 2.1, o máximo do módulo do vetor $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\delta}$ *dado por* $|Z| = \max_i |Z_i|$ *tem a seguinte função de distribuição de probabilidade:*

$$F_{|Z|}(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right]\right\}\phi(y)dy, \tag{6}$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ *e* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)^\top$.

Demonstração:
De modo similar ao demonstrado no teorema 2.1, porém usando o resultado da distribuição do máximo do módulo de uma variável aleatória dado por

$$P(|Z_1| \leq z, |Z_2| \leq z, \dots, |Z_r| \leq z) = P\left(\max_i |Z_i| \leq z\right) = P(-z \leq \max_i Z_i \leq z)$$

que equivale a

$$P\left(\max_i |Z_i| \leq z\right) = \prod_{i=1}^{r} P\left(\frac{\lambda_i Y_0 - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \leq Y_i \leq \frac{\lambda_i Y_0 + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right).$$

Logo, considerando $|Z| = \max_i |Z_i|$, tem-se

$$F_{|Z|}(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right]\right\}\phi(y)dy,$$

como se queria mostrar. ■

A função da distribuição do máximo do módulo da normal multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$ é utilizada no teste de Dunnett bilateral quando os graus de liberdade tendem ao infinito.

Teorema 2.4. ***Função densidade do máximo do módulo da normal multivariada não-central***
Dadas as mesmas condições do teorema 2.1, o máximo do vetor $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\delta}$ *dado por* $|Z| = \max_i(|Z_i|)$ *tem a seguinte função densidade de probabilidade:*

$$f_{|Z|}(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\left(\left[\phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) + \phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_k y + z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k y - z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}\phi(y)dy. \quad (7)$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ *e* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)^\top$.

Demonstração:
A função densidade de probabilidade de $|Z| = \max_i(|Z_i|)$ é obtida derivando-se (6) em relação a z. Usando a diretiva (5) obtém-se

$$f_{|z|}(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right]\phi(y)dy\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\left(\left[\phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right] - \left[\phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\frac{-1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right]\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_k y + z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k y - z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}\phi(y)dy.$$

Assim, a função de densidade do máximo da normal multivariada não-central é

$$f_{|Z|}(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\Bigg\{\left(\left[\phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) + \phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\right)$$

$$\times \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_k y + z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k y - z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\Bigg\}\phi(y)dy.$$

como se queria mostrar. ■

3 Distribuição do máximo e do máximo do módulo da t multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$

Para se obter a distribuição do máximo da t multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$, de forma semelhante às distribuições centrais toma-se $\mathbf{T} = [T_1, T_2, \ldots, T_r]^\top$ um vetor aleatório definido por

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}, \tag{8}$$

em que $S = \sqrt{U/\nu} = \widehat{\sigma}/\sigma$ é uma variável aleatória com distribuição de uma raiz de qui-quadrado dividido pelos graus de liberdade ν, cuja função densidade de probabilidade é dada pela equação

$$f(s;\nu) = \frac{\nu^{\nu/2}}{2^{(\nu/2)-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})} s^{\nu-1} e^{-\nu s^2/2}, \quad s \geq 0. \tag{9}$$

que é independentemente distribuída em relação a $\mathbf{Z}$.

Tomando-se

$$\max_i(T_i) = \frac{\max_i(Z_i)}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}} \tag{10}$$

e chamando de $Z = \max_i(Z_i)$ e $D = \max_i(T_i)$, a variável aleatória de interesse é $D = Z/S$, em que cada $D_i = Z_i/S \sim t_\nu(\delta_i)$ (distribuição t univariada não-central com ν graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ_i).

Teorema 3.1. ***Função densidade do máximo da t multivariada não-central***
Dado o vetor aleatório $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_r)^\top$ definido em (8), o máximo do vetor $\mathbf{T}$, dado por $D = \max_i(T_i)$ e definido em (10), tem a seguinte função densidade de

probabilidade:

$$f_D(d;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)=\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\phi\left(\frac{\lambda_i y+sd-\delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\frac{s}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Phi\left(\frac{\lambda_k y+sd-\delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}\right]\phi(y)f(s;\nu)dyds. \qquad (11)$$

em que $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ *e* $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r)^\top$.

Demonstração:
Para obter a função densidade de probabilidade de $D=\max_i(T_i)$, inicialmente deve-se obter a função densidade conjunta de Z e de S. Como $Z=\max_i(Z_i)$ e S são independentes, a função densidade conjunta de Z e S é obtida pelo produto de $f_Z(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})$ e $f_S(s;\nu)$, dadas, respectivamente, pelas funções (4) e (9), ou seja

$$f_{Z,S}(z,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\phi\left(\frac{\lambda_i y+z-\delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Phi\left(\frac{\lambda_k y+z-\delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}\phi(y)$$
$$\times f(s;\nu)dy.$$

Utilizando as transformações $Z=DS$ e $S=S$, cujo Jacobiano é dado por

$$\mathbf{J}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial d} & \frac{\partial z}{\partial s}\\ \frac{\partial s}{\partial d} & \frac{\partial s}{\partial s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} s & d\\ 0 & 1\end{vmatrix}=s,$$

e $|\mathbf{J}|=|s|=s$, obtém-se a função densidade conjunta de $D=\max_i(T_i)$ e S, dada por $f_{D,S}(d,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)=f_{Z,S}(z,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)\times|\mathbf{J}|$, ou seja

$$f_{D,S}(d,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\phi\left(\frac{\lambda_i y+sd-\delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Phi\left(\frac{\lambda_k y+sd-\delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}$$
$$\times\phi(y)f(s;\nu)sdy. \qquad (12)$$

A função densidade de probabilidade de $D=\max_i(T_i)$ é a marginal da densidade conjunta $f_{D,S}(d,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)$, obtida integrando-se (12) em relação a variável s, que varia de $[0,\infty)$, chegando-se a

$$f_D(d;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)=\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\left\{\phi\left(\frac{\lambda_i y+sd-\delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right)\frac{s}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Phi\left(\frac{\lambda_k y+sd-\delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right)\right]\right\}\right]\phi(y)f(s;\nu)dyds,$$

como se queria mostrar. ■

Teorema 3.2. ***Função de distribuição do máximo da*** t ***multivariada não-central***
Dado o vetor aleatório $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_r)^\top$ *definido em* (8), *o máximo do vetor* $\mathbf{T}$, *representado por* $D = \max_i(T_i)$ *e definido em* (10), *tem a seguinte função de distribuição de probabilidade:*

$$F_D(d; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \nu) = \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \prod_{i=1}^r \Phi\left(\frac{\lambda_i y + sd - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) \phi(y)dy \right] f(s;\nu)ds, \qquad (13)$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ *e* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)^\top$.

Demonstração:
A função de distribuição de probabilidade da variável $D = \max_i(T_i)$ é obtida integrando-se a função densidade $f_D(d; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \nu)$, dada por (11), em relação a d, da seguinte forma

$$\begin{aligned} F_D(d; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \nu) = \int_{-\infty}^d \Bigg\{ \int_0^\infty \Bigg[\int_{-\infty}^\infty \sum_{i=1}^r \Bigg\{ \phi\left(\frac{\lambda_i y + sw - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) \frac{s}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \\ \times \left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^r \Phi\left(\frac{\lambda_k y + sw - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}} \right) \right] \Bigg\} \Bigg] \Bigg\} \phi(y) f(s;\nu) dydsdw, \end{aligned}$$

obtendo-se

$$F_D(d; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \nu) = \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \prod_{i=1}^r \Phi\left(\frac{\lambda_i y + sd - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) \phi(y)dy \right] f(s;\nu)ds,$$

como se queria mostrar. ■

A função da distribuição do máximo da t multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$ é utilizada no teste de Dunnett unilateral quando os graus de liberdade são finitos.

Teorema 3.3. ***Função densidade e função de distribuição do máximo do módulo da*** t ***multivariada***
Tomando o vetor aleatório $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_r)^\top$ *dado em* (8), *define-se o máximo do módulo do vetor* $\mathbf{T}$ *como*

$$\max_i(|T_i|) = \frac{\max_i(|Z_i|)}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}.$$

Considerando $|Z| = \max_i(|Z_i|)$, $S = \sqrt{U/\nu}$ *uma variável aleatória com distribuição* $\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}$, *cuja função densidade de probabilidade é dada pela equação (9) e a variável aleatória de interesse* $|D| = \max_i(|T_i|)$, *a função densidade de probabilidade de* $|D|$ *é*

$$\begin{aligned} f_{|D|}(|d|;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{i=1}^r \Bigg\{ \Bigg(\Bigg[\phi\left(\frac{\lambda_i y + |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) + \phi\left(\frac{\lambda_i y - |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \Bigg] \\ \times \left(\frac{s}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \Bigg) \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^r \left[\Phi\left(\frac{\lambda_k y + |d|s - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k y - |d|s - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) \right] \Bigg\} \\ \times \phi(y) f(s;\nu) dy ds. \end{aligned} \quad (14)$$

e a sua função de distribuição é dada por

$$\begin{aligned} F_{|D|}(|d|;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_0^\infty \Bigg\{ \int_{-\infty}^\infty \prod_{i=1}^r \left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_i y - |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \right] \\ \times \phi(y) dy \Bigg\} f(s;\nu) ds, \end{aligned} \quad (15)$$

em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ *e* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)^\top$.

Demonstração:
Para obter a função densidade de probabilidade de $|D| = \max_i(|T_i|)$, inicialmente deve-se obter a função densidade conjunta de $|Z|$ e de S. Como $|Z|$ e S são independentes, a função densidade de probabilidade conjunta de $|Z|$ e S é dada por $f_{|Z|,S}(z,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = f_{|Z|}(z;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}) \times f_S(s;\nu)$, ou seja

$$\begin{aligned} f_{|Z|,S}(z,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_{-\infty}^\infty \sum_{i=1}^r \Bigg\{ \Bigg(\Bigg[\phi\left(\frac{\lambda_i y + z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) + \phi\left(\frac{\lambda_i y - z - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \Bigg] \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\right) \Bigg) \\ \times \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^r \left[\Phi\left(\frac{\lambda_k y + z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k y - z - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right) \right] \Bigg\} \phi(y) f(s;\nu) dy. \end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade conjunta de $|D| = \max_i(|T_i|)$ e S é obtida através da transformação $|D| = |Z|S$ e $S = S$, cujo Jacobiano é s, resultando em $f_{|D|,S}(|d|,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = f_{|Z|,S}(z,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) \times |\mathbf{J}|$, ou seja

$$f_{|D|,S}(|d|,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\Bigg\{\Bigg(\Bigg[\phi\Bigg(\frac{\lambda_i y + |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg) + \phi\Bigg(\frac{\lambda_i y - |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\Bigg]$$
$$\times\Bigg(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\Bigg)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Bigg[\Phi\Bigg(\frac{\lambda_k y + |d|s - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\Bigg) -$$
$$-\,\Phi\Bigg(\frac{\lambda_k y - |d|s - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\phi(y)f(s;\nu)s\,dy. \qquad (16)$$

A função densidade de $|D|$ é a marginal da densidade conjunta $f_{|D|,S}(|d|,s;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu)$, obtida quando se integra (16) em relação a variável s, que varia de $[0,\infty)$, chegando-se a

$$f_{|D|}(|d|;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\Bigg\{\Bigg(\Bigg[\phi\Bigg(\frac{\lambda_i y + |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg) + \phi\Bigg(\frac{\lambda_i y - |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\Bigg]$$
$$\times\Bigg(\frac{s}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\Bigg)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Bigg[\Phi\Bigg(\frac{\lambda_k y + |d|s - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\Bigg) - \Phi\Bigg(\frac{\lambda_k y - |d|s - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}$$
$$\times\,\phi(y)f(s;\nu)\,dy\,ds,$$

que é a expressão (14), como se queria mostrar.

A função de distribuição de probabilidade da variável $|D| = \max_i(|T_i|)$ é obtida integrando-se (14) em relação a d, da seguinte forma

$$F_{|D|}(|d|;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_{-\infty}^{|d|}\Bigg\{\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\Bigg\{\Bigg(\Bigg[\phi\Bigg(\frac{\lambda_i y + ws - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg) + \phi\Bigg(\frac{\lambda_i y - ws - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\Bigg]$$
$$\times\frac{s}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}\Bigg[\Phi\Bigg(\frac{\lambda_k y + ws - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\Bigg) - \Phi\Bigg(\frac{\lambda_k y - ws - \delta_k}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\phi(y)f(s;\nu)\,dy\,ds\Bigg\}dw$$

resultando em

$$F_{|D|}(|d|;\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\nu) = \int_{0}^{\infty}\Bigg\{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\Bigg[\Phi\Bigg(\frac{\lambda_i y + |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg) - \Phi\Bigg(\frac{\lambda_i y - |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}}\Bigg)\Bigg]$$
$$\times\,\phi(y)\,dy\Bigg\}f(s;\nu)\,ds,$$

que é a expressão (15), como se queria mostrar. ■

A função da distribuição do máximo do módulo da t multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$ é utilizada no teste de Dunnett bilateral quando os graus de liberdade são finitos.

4 Conclusões

Neste artigo mostrou-se como obter os pontos críticos superiores α da distribuição das estatísticas do teste unilateral e bilateral de Dunnett não-central, com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$,considerando uma matriz de correlação $\boldsymbol{\rho}$ que satisfaz a estrutura de correlação produto. Os valores de d ou $|d|$ são os que atendem as equações

$$F_D(d; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \nu) = \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \Phi\left(\frac{\lambda_i y + sd - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) \phi(y) dy \right] f(s;\nu) ds = 1 - \alpha$$

e

$$F_{|D|}(|d|; \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \nu) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \left[\Phi\left(\frac{\lambda_i y + |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) - \Phi\left(\frac{\lambda_i y - |d|s - \delta_i}{\sqrt{1-\lambda_i^2}} \right) \right] \times \phi(y) dy \right\} f(s;\nu) ds = 1 - \alpha,$$

respectivamente para o teste unilateral e bilateral. Estas são, respectivamente, a função da distribuição do máximo da t multivariada não-central e do máximo do módulo da t multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$. Elas são utilizadas no teste de Dunnett unilateral e bilateral, respectivamente, quando os graus de liberdade são finitos. Quando os graus de liberdade tendem ao infinito, as funções de distribuição recaem na distribuição do máximo da normal multivariada não-central e do máximo do módulo da normal multivariada não-central com parâmetro de não-centralidade $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$.

Foram propostos e implementados no *software* R, com sucesso, algoritmos para a obtenção da função de distribuição, da função densidade e da inversa da função de distribuição, para obtenção de quantis das distribuições do máximo e do máximo do módulo da normal e da t multivariadas utilizando quadraturas para a resolução das integrais múltiplas. A biblioteca *nCDunnett* encontra-se disponibilizada para instalação em todas as versões *R* iguais ou superiores a 2.15.0, com livre acesso por todos os usuários do programa no mundo. Esta biblioteca possibilita que qualquer pesquisador possa aplicar corretamente o teste de Dunnett, independente do valor da correlação entre comparações, sem dependência de tabelas limitadas disponíveis na literatura.

BROCH, S. C.; FERREIRA, D. F. Distributions of statistics from the non-central Dunnett test. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.31, n.4, p.501-515, 2013.

▪ *ABSTRACT: The Dunnett test is used to compare all the treatments with a control, considering random and independent samples, derived from normal distribution variables. The limitation to the use of this test is the difficulty in obtaining the probabilities of multivariate t distribution and the statistical quantiles values, because the test can be applied in balanced and unbalanced, unilateral or bilateral situations, with infinite correlation possibilities between the comparisons. This paper presents a demonstration to non-central multivariate t distribution related with statistics by Dunnett test, considering a vector of non-centrality* $\boldsymbol{\delta}$*. Initially, the distribution of the maximum and the maximum module of non-central normal multivariate is presented. From these distributions comes to non-central multivariate t distribution. The function of the distribution of the maximum non-central multivariate t and the maximum module non-central multivariate t with* $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}$ *non-centrality parameter is used in unilateral and bilateral Dunnett's test, respectively, when the degrees of freedom are finite. When the degrees of freedom tend to infinity, the distribution functions fall in the maximum of non-central multivariate normal distribution and in the maximum module of non-central multivariate normal.*

▪ *KEYWORDS: Multiple comparisons with a control; distribution t non-central multivariate; software R.*

Referências

HOCHBERG, Y.; TAMHANE, A. C. *Multiple Comparisons Procedures.* New York: John Wiley & Sons, 1987. 450p.

DUNNETT, C. W. A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control, *Journal of the American Statistical Association*, v.50, n.272, p.1096-1121, 1955.

HSU, J. C. *Multiple Comparisons:* theory and methods. New York: Chapman & Hall/CRC, 1999. 277 p.

BROCH, S. C. *Aspectos teóricos e computacionais das estatísticas do teste de Dunnett não-central.* 2013. 240p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2013.

KOLMOGOROV, A.N. *Foundations of the Theory of probability*, New York: Chelsea Publishing Company, Second English Edition, 1956, 84 p. Disponível em <http://www.matematik.com/Kolmogorov/index.html>.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the theory of statistics*, Singapore: McGraw-Hill, 3^{rd}, 1974, 564p.

Recebido em 02.12.2013.

Aprovado após revisão em 27.01.2014.