

DISCRIMINAÇÃO ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES *ODD* WEIBULL E WEIBULL

Josmar MAZUCHELI¹
Francisco LOUZADA²

- RESUMO: Em problemas de discriminação entre distribuições encaixadas os testes mais utilizados são o da razão de verossimilhanças, Wald e Escore. Sob a hipótese nula assintoticamente esses três testes têm distribuição qui-quadrado com d graus liberdade, em que d indica a diferença entre o número de parâmetros das distribuições em julgamento. Neste artigo são conduzidos estudos de simulações Monte Carlo com o objetivo de se avaliar o poder desses testes quando o interesse recai em discriminar a distribuição *Odd* Weibull da distribuição Weibull. A distribuição *Odd* Weibull foi recentemente proposta por Cooray (2006) e definida por um parâmetro de escala e dois outros que governam a forma das funções de densidade e de risco. De acordo com os valores dos parâmetros de forma tem-se como casos particulares as distribuições *Odd* exponencial, Weibull e exponencial. A distribuição *Odd* Weibull generaliza a distribuição Weibull acomodando também riscos em forma de banheira e unimodal.
- PALAVRAS-CHAVE: Distribuição *Odd* Weibull; função de risco; poder; teste da razão de verossimilhanças; teste de Wald; teste escore.

1 Introdução

Na análise de dados de sobrevivência é notório que as tradicionais distribuições de probabilidade exponencial, Weibull, gama, log-normal, log-logística, entre outras, possuem limitações quanto às formas acomodadas por suas funções de risco. Por

¹Universidade Estadual de Maringá – UEM, Departamento de Estatística, CEP: 87020-900, Maringá, PR, Brasil. E-mail: jmazucheli@gmail.com

²Universidade de São Paulo – USP, ICMC, Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, CEP: 13566-590, São Carlos, SP, Brasil. E-mail: louzada@icmc.usp.br

exemplo, embora a distribuição Weibull a dois parâmetros seja descrita na literatura como flexível, (LAWLESS, 2003), sua função de risco é restrita às formas monótona crescente, constante e monótona decrescente. No entanto, não é incomum situações em que o fenômeno em estudo ou técnicas formais sugiram risco com comportamento não monótono como por exemplo unimodal ou em forma de banheira. A limitação intrínseca a distribuição Weibull e nas demais supracitadas tem feito com estas sejam generalizadas ou extendidas obtendo-se assim uma infinidade de novas distribuições. Seguramente, graças a sua popularidade, a distribuição Weibull, a dois parâmetros, é a que mais tem sofrido generalizações. Esta afirmação pode ser observada consultando-se Almalki e Nadarajah (2014) ou os livros: “*Generalized Weibull distributions*” (LAI, 2014), “*Using the Weibull Distribution*” (MCCOOL, 2012), “*The Weibull Distribution: A Handbook*” (RINNE, 2009) ou “*Weibull Models*” (MURTHY; XIE; JIANG, 2004).

Uma destas generalizações, e considerada neste artigo, foi introduzida por Cooray (2006) e nomeada de família de distribuições *Odd Weibull*. É importante enfatizar que embora na literatura seja geralmente usado o termo distribuição Weibull, a mesma é uma família de distribuições pois possui como casos particulares as distribuições exponencial e Rayleigh.

Para uma variável aleatória não negativa T com função de densidade de probabilidade $f(t | \Psi)$, de distribuição acumulada $F(t | \Psi)$ e de sobrevivência $S(t | \Psi) = 1 - F(t | \Psi)$ tem-se a família de distribuições *Odd* cuja função de distribuição é definida por:

$$G(t | \Theta) = \frac{[F(t | \Psi)]^\beta}{[F(t | \Psi)]^\beta + [S(t | \Psi)]^\beta} \quad (1)$$

e naturalmente para $\beta = 1$ tem-se $G(t | \Theta) = F(t | \Psi)$, $-\infty < \beta < +\infty$. O vetor Ψ tem como coordenadas os parâmetros que caracterizam $f(t | \Psi)$ e por consequência $F(t | \Psi)$ e $S(t | \Psi)$ enquanto que $\Theta = \Psi \cup \beta$.

Assim como a família de distribuições Marshall-Olkin, (MARSHALL; OLKIN, 1997), a família *Odd* é outra alternativa usada para a extensão de distribuições existentes. Várias outras alternativas de extensão são discutidas, por exemplo, em Gupta e Kundu (2009).

Derivando a expressão $G(t | \Theta)$ com relação a t tem-se a função de densidade de probabilidade da família *Odd* e escrita na forma:

$$g(t | \Theta) = \frac{\beta f(t | \Psi) [F(t | \Psi) S(t | \Psi)]^{\beta-1}}{\left\{ [F(t | \Psi)]^\beta + [S(t | \Psi)]^\beta \right\}^2} \quad (2)$$

e pela razão entre $g(t | \Theta)$ e $1 - G(t | \Theta)$ tem-se a função de risco:

$$h(t | \Theta) = \frac{\beta f(t | \Psi) [F(t | \Psi)]^{\beta-1}}{S(t | \Psi) \left\{ [F(t | \Psi)]^\beta + [S(t | \Psi)]^\beta \right\}} \quad (3)$$

Originalmente, Cooray (2006) considera como distribuição base a distribuição Weibull, definindo assim a família de distribuições *Odd Weibull*. Neste caso, para $\beta = 1$ tem-se a distribuição Weibull e para $\beta = -1$ tem-se a distribuição Fréchet, também chamada de Weibull inversa.

Em particular, considerando-se a função de distribuição da distribuição Weibull com vetor de parâmetros $\Psi = (\theta, \lambda)$ e parametrizada na forma $F(t | \Psi) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]$, tem-se a família de distribuições *Odd Weibull* com $G(t | \Theta)$ e $g(t | \Theta)$ escritas explicitamente como:

$$G(t | \Theta) = \frac{\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]\right\}^\beta}{\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]\right\}^\beta + \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]^\beta} \quad (4)$$

e

$$g(t | \Theta) = \frac{\beta\lambda t^{\lambda-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]^\beta \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]\right\}^{\beta-1}}{\theta^\lambda \left(\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]\right\}^\beta + \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]^\beta\right)^2} \quad (5)$$

em que $\theta > 0$ é o parâmetro de escala enquanto que $\beta > 0$ e $\lambda > 0$ são parâmetros que determinam as formas das funções de densidade e de risco.

De (4) ou (5) é fácil observar as seguintes distribuições como casos particulares: (i) exponencial quando $\lambda = 1$ e $\beta = 1$, (ii) *Odd* exponencial quando $\lambda = 1$ e $\beta \neq 1$ (iii) Weibull quando $\beta = 1$ e $\lambda \neq 1$. Para a escolha adequada de λ tem-se também a distribuição *Odd* Rayleigh. É importante notar que a versão inversa destas distribuições são obtidas quando $\beta = -1$, (JIANG; XIE; TANG, 2008).

Usando novamente o fato de que a função de risco pode ser obtida pela razão entre as funções de densidade e de sobrevivência tem-se para a variável aleatória T com distribuição *Odd Weibull* a expressão da função de risco:

$$h(t | \Theta) = \frac{\beta\lambda t^{\lambda-1} \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]\right\}^{\beta-1}}{\theta^\lambda \left(\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]\right\}^\beta + \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right]^\beta\right)} \quad (6)$$

cujo comportamento, governado pelos valores de β e λ , abrange as formas constante, crescente, decrescente, unimodal ou em forma de banheira (ver Cooray 2006 e 2012).

Uma vez que a distribuição Weibull não é flexível o suficiente para modelar riscos não monótonos, a distribuição *Odd Weibull* pode ser uma boa alternativa para a análise de dados de sobrevivência. Como apontando por Cooray (2006), além da flexibilidade de sua função de risco a distribuição *Odd Weibull* pode ser usada para discriminar a distribuição *Odd Weibull* (*Odd* exponencial) da distribuição Weibull (exponencial). Neste sentido, neste artigo é conduzido um estudo de simulação para avaliar o poder dos testes razão de verossimilhanças, Wald e Escore usados quando o interesse recai em discriminar a distribuição *Odd Weibull* (*Odd* exponencial)

da distribuição Weibull (exponencial). Esta discriminação consiste em testar as hipóteses $H_0 : \beta = 1$ versus $H_1 : \beta \neq 1$ quando $\lambda = 1$ (exponencial versus *Odd* exponencial) e $H_0 : \beta = 1$ versus $H_1 : \beta \neq 1$ quando $\lambda \neq 1$ (Weibull versus *Odd* Weibull). Um estudo similar considerando a família Marshall-Olkin Weibull foi apresentado em Caroni (2010).

Na Seção 2 apresenta-se a função de verossimilhança do modelo *Odd* usada na obtenção das estimativas dos parâmetros de interesse. Os testes da razão de verossimilhanças, Wald e Escore são descritos na Seção 3. Na Seção 4 o poder desses testes são avaliados via simulações Monte Carlo considerando-se diversos cenários. Os cenários adotados abrangem as diferentes formas acomodadas pela função de risco. Algumas considerações na Seção 4 finaliza este artigo.

A contribuição deste trabalho diz respeito ao fato de que, em princípio, outros estudos não compararam o poder dos testes da razão de verossimilhanças, Wald e Escore quando usados na discriminação entre a distribuição *Odd* Weibull (*Odd* exponencial) e a Weibull (exponencial). Apesar da flexibilidade da função de risco da família *Odd* Weibull a mesma tem sido pouco considerada na literatura. Neste sentido, acreditamos que este trabalho, apesar de não apresentar inovações metodológicas, torna-se útil na escolha do teste mais poderoso, principalmente em situações em se tem disponíveis amostras consideradas pequenas.

2 A função de verossimilhança

Seja $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ uma amostra aleatória de n tempos de sobrevivência provenientes de uma distribuição pertencente à família de distribuições *Odd*. Sem perda de generalidades, considerando a ausência de observações censuradas e que $f(t_i) = f(t_i | \Psi)$, $F(t_i) = F(t_i | \Psi)$ e $S(t_i) = S(t_i | \Psi)$ tem-se de (2) a função de verossimilhança:

$$L(\Theta | \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta f(t_i) [F(t_i) S(t_i)]^{\beta-1}}{\{[F(t_i)]^\beta + [S(t_i)]^\beta\}^2}, \quad (7)$$

cujo logaritmo fica escrito na forma:

$$l(\Theta | \mathbf{t}) = n \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log f(t_i) + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \log [F(t_i) S(t_i)] - 2 \sum_{i=1}^n \log \{[F(t_i)]^\beta + [S(t_i)]^\beta\}.$$

Tomando como distribuição base a distribuição Weibull tem-se explicitamente o logaritmo da função de verossimilhança da distribuição *Odd* Weibull dado por:

$$\begin{aligned}
l(\Theta | \mathbf{t}) &= n \log(\beta) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left\{ \exp \left[\left(\frac{t_i}{\theta} \right)^\lambda \right] - 1 \right\} \\
&\quad - n\lambda \log(\theta) + n \log(\lambda) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \theta n \bar{t} \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 + \left\{ \exp \left[\left(\frac{t_i}{\theta} \right)^\lambda \right] - 1 \right\}^\beta \right\},
\end{aligned} \tag{8}$$

em que $\Theta = (\theta, \lambda, \beta)$ e $n\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i$.

As estimativas de máxima verossimilhança de $\Theta = (\theta, \beta, \lambda)$, denotadas por $\hat{\Theta} = (\hat{\theta}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$, são obtidas resolvendo-se, numericamente, o sistema de equações normais com equações: $U_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\Theta | \mathbf{t}) = 0$, $U_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\Theta | \mathbf{t}) = 0$ e $U_\beta = \frac{\partial}{\partial \beta} l(\Theta | \mathbf{t}) = 0$. As inferências sobre os parâmetros ou funções destes podem ser conduzidas a partir da normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança.

Como alternativa a maximização de (8), o vetor de parâmetros Θ pode ser estimado sob o ponto de vista da inferência Bayesiana, (IBRAHIM; CHEN; SINHA, 2001). Em Jiang, Xie e Tang (2008) a estimação foi conduzida via método gráfico. Estas metodologias não são empregadas neste artigo.

3 Testes de hipóteses

Uma vez que a distribuição *Odd Weibull* tem como casos particulares as distribuições *Odd* exponencial quando $\lambda = 1$, Weibull quando $\beta = 1$ e exponencial quando $\lambda = 1$ e $\beta = 1$, considere o interesse em testar a hipótese nula $H_0 : \beta = 1$ versus a alternativa $H_1 : \beta \neq 1$ utilizando-se os testes da razão de verossimilhanças (S_1), Wald (S_2) e Escore (S_3).

O teste da razão de verossimilhanças exige que sejam maximizadas as funções log-verossimilhanças do modelo restrito $l_r = l_r(\hat{\theta}, \hat{\lambda}, \beta = 1 | \mathbf{t})$ e do modelo completo $l_c = l_c(\hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{\beta} | \mathbf{t})$. Sob a hipótese nula a estatística:

$$S_1 = -2(l_c - l_r) \tag{9}$$

tem distribuição assintótica qui-quadrado com um grau de liberdade, (LEHMANN; CASELLA, 1998; COX; HINKLEY, 1974).

O teste de Wald é baseada nas estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese alternativa e por isso requer apenas o ajuste do modelo completo, $l_c = l_c(\hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{\beta} | \mathbf{t})$. Com há apenas uma restrição, sob hipótese nula a estatística do

teste de Wald é definida por:

$$S_2 = \frac{(\hat{\beta} - 1)^2}{\hat{I}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}^{-1}} \quad (10)$$

em que $\hat{I}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}^{-1} = \text{var}(\hat{\beta})$ provém do inverso da matriz de informação observada, \mathbf{I}_{Θ} , localmente nas estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\lambda}$. Sob hipótese nula S_2 tem assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade.

O teste **Escore** é obtido por meio da avaliação de U_{β} e \mathbf{I}_{Θ} sob a hipótese nula. A estatística do teste é dada por:

$$S_3 = U_{\tilde{\beta}}^2 \times \tilde{I}_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}^{-1},$$

em que, $U_{\tilde{\beta}} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} l(\Theta | \mathbf{t}) \right|_{\beta=\tilde{\beta}}$ e $\tilde{I}_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}^{-1}$ são calculados localmente em $\tilde{\beta} = 1$ e $\tilde{\theta}, \tilde{\lambda}$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob H_0 . Sob hipótese nula, S_3 tem assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade. Pela definição do teste Escore observa-se facilmente que ele é o que requer menor esforço computacional entretanto sob a hipótese nula, a matriz de informação pode ser singular, (FREEDMAN, 2007; ENGLE, 1984).

É importante ressaltar que estes três testes são assintoticamente equivalentes, mas podem diferir em pequenas amostras, (BUSE, 1982). O comportamento do poder destes três testes, em dois cenários, são estudados via simulações Monte Carlo na próxima seção. Todas as simulações foram realizadas com a linguagem de programação *Ox*, (DOORNIK, 2007) usando a função *MaxBFGS* na obtenção das estimativas de máxima verossimilhança.

4 Estudo de simulação

Nesta seção, para cada um dos testes descritos anteriormente, são apresentados os resultados do estudo de simulação considerando-se diferentes valores de n , θ , λ e β . Foram considerados dois cenários. No primeiro tem-se a discriminação entre as distribuições *Odd* exponencial e exponencial enquanto que segundo tem-se a discriminação entre a *Odd* Weibull e Weibull. Em específico:

Cenário 1: $n = (20, 50, 100, 200)$, $\lambda = 1.0$, $\theta = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ e $\beta = 0.5 (0.01), \dots, 2.0$ (λ conhecido, θ e β , ambos, desconhecidos). Neste cenário tem-se H_0 : exponencial(θ) versus H_1 : *Odd* exponencial(θ, β).

Cenário 2: $n = (20, 50, 100, 200)$, $\theta = 1.0$, $\lambda = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ e $\beta = 0.5 (0.01), \dots, 2.0$ (θ, λ e β desconhecidos). Neste cenário tem-se H_0 : Weibull(θ, λ) versus H_1 : *Odd* Weibull(θ, λ, β).

Para cada combinação de n e dos parâmetros, em ambos os cenários, foram simuladas $B = 100.000$ amostras sob a hipótese alternativa. Os valores $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ foram gerados usando a função percentil da distribuição *Odd Weibull* dada por:

$$Q(u) = G^{-1}(u | \Theta) = \theta \left\{ \log \left[1 + \left(\frac{u}{1-u} \right)^\beta \right] \right\}^{\frac{1}{\lambda}},$$

em que $0 < u < 1$ e $G(\cdot | \Theta)$ é definida em 4.

As Figuras 1 e 2 exibem, para os cenários 1 e 2 respectivamente, os comportamentos das curvas poder dos três testes considerando-se níveis de significância de 5% e 1%.

Para melhor descrever o comportamento das curvas e avaliar a possível influência dos parâmetros θ e λ (cenários 1 e 2, respectivamente) tem-se nas Tabelas 1 e 2 as áreas sob as curvas para todos os testes e ambos os níveis de significância. As áreas sob as curvas foram calculadas a partir da aplicação do método dos trapézios.

Tabela 1 - Área sob a curva poder – *Odd* exponencial versus exponencial

λ	n	Nível de Significância de 5%			Nível de Significância de 1%		
		S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3
0.5	20	0.2434	0.4379	0.2704	0.0748	0.2756	0.1805
	50	0.4184	0.5265	0.3787	0.1885	0.3269	0.2294
	100	0.6484	0.6908	0.5906	0.3950	0.4664	0.3583
	200	0.9034	0.9096	0.8658	0.6875	0.7032	0.6214

Tabela 2 - Área sob a curva poder – *Odd Weibull* versus Weibull

λ	n	Nível de Signif. 5%			Nível de Signif. 1%		
		S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3
0.5	20	0.2434	0.4379	0.2704	0.0748	0.2756	0.1805
	50	0.4184	0.5265	0.3787	0.1885	0.3269	0.2294
	100	0.6484	0.6908	0.5906	0.3950	0.4664	0.3583
	200	0.9034	0.9096	0.8658	0.6875	0.7032	0.6214
1.0	20	0.2444	0.4358	0.2704	0.0754	0.2732	0.1805
	50	0.4192	0.5260	0.3787	0.1894	0.3263	0.2294
	100	0.6490	0.6908	0.5906	0.3958	0.4663	0.3583
	200	0.9036	0.9097	0.8658	0.6879	0.7033	0.6214
1.5	20	0.2448	0.4342	0.2704	0.0757	0.2714	0.1805
	50	0.4194	0.5255	0.3787	0.1896	0.3257	0.2294
	100	0.6491	0.6906	0.5906	0.3960	0.4661	0.3583
	200	0.9037	0.9097	0.8658	0.6880	0.7033	0.6214
2.0	20	0.2450	0.4329	0.2805	0.1753	0.2719	0.1818
	50	0.4139	0.5198	0.3748	0.1865	0.3224	0.2278
	100	0.6408	0.6824	0.5835	0.3895	0.4600	0.3544
	200	0.8939	0.8998	0.8562	0.6786	0.6940	0.6130

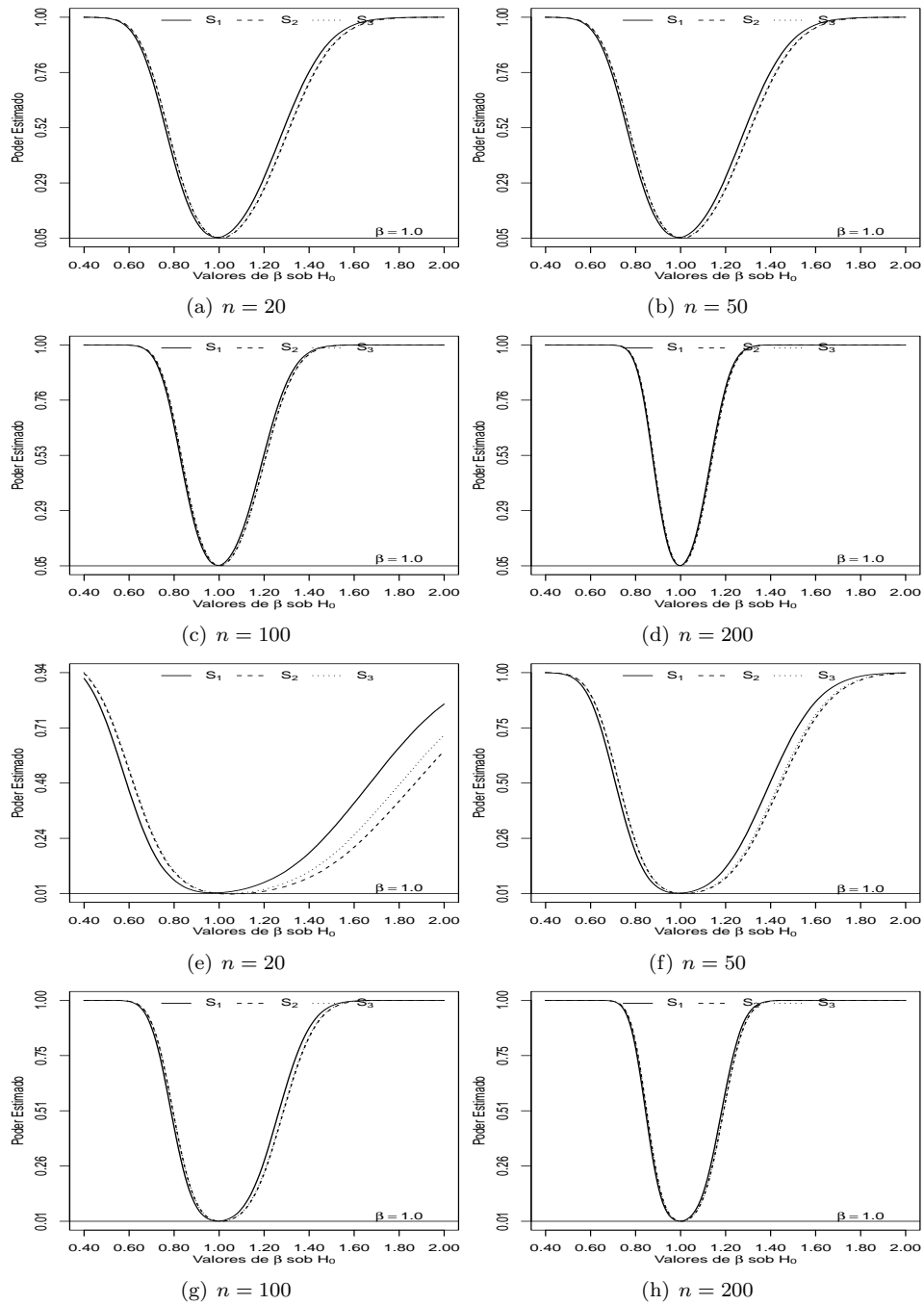


Figura 1 - Curva poder estimada para diferentes valores de n e $\theta = 0.5$ (gráficos (a) a (d): nível de significância de 5% e gráficos (e) a (h): nível de significância de 1%).

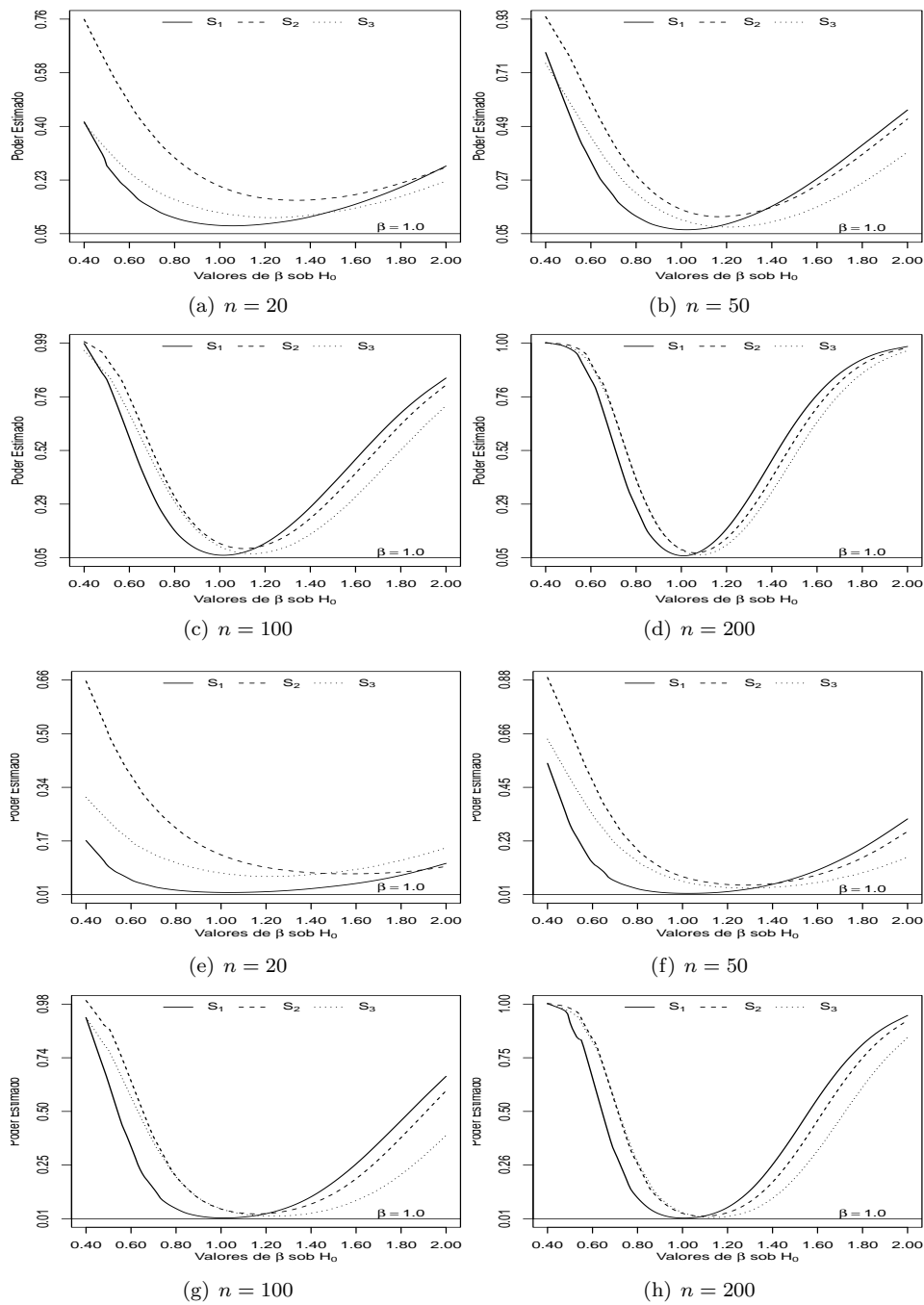


Figura 2 - Curva poder estimada para diferentes valores de n , $\theta = 1$ e $\lambda = 0.5$ (gráficos (a) a (d): nível de significância de 5% e gráficos (e) a (h): nível de significância de 1%).

Observa-se na Figura 1 que o poder dos três testes cresce substancialmente com o aumento do tamanho da amostra. Mesmo para $n = 20$ todos os testes apresentam poder relativamente alto quando β é distante de 1. Os testes mostram-se um pouco mais poderosos para β se afastando de 1 pela esquerda. Pela inspeção das áreas sob as curvas observa-se na Tabela 1 que $S_2 > \text{área sob } S_1 > \text{área sob } S_3$. É razoável considerar que quanto maior a área sob a curva mais poderoso é o teste. As áreas sob as curvas são as mesmas para os demais valores de θ considerados na simulação, portanto são omitidas da Tabela 1.

Para o segundo cenário adotado tem-se o comportamento das curvas na Figura 2. Observa-se, para os três testes, que o poder é bastante baixo para $n \leq 50$, mesmo para valores de β distantes da hipótese nula. O poder aumenta substancialmente para os demais tamanhos de amostras e a medida que os valores de β se afastam de $\beta = 1$ pela esquerda. Assim como no cenário 1 tem-se, pelos valores da Tabela 2, que $S_2 > \text{área sob } S_1 > \text{área sob } S_3$. Para todos os valores de n o poder varia discretamente para diferentes valores de λ . Para outros valores de θ tem-se as mesmas conclusões e omitimos os resultados numéricos. Em todos os estudos de simulações conduzidos observou-se que o comportamento da função de risco, governado pelos valores de λ e θ , não alterou de maneira significativa o poder dos testes.

Conclusões

Nos últimos anos uma infinidade de novas distribuições tem sido propostas para a análise de dados de sobrevivência e confiabilidade. Uma destas distribuições, proposta por Cooray (2006) e chamada de família *odd* Weibull generaliza a família de distribuições Weibull. A família de distribuições *odd* Weibull tem função de risco bastante flexível entretanto tem sido pouco explorada na literatura.

Neste artigo por simulação Monte Carlo estudamos o poder de três testes usados para discriminar a distribuição *Odd* Weibull (exponencial) da distribuição Weibull. Para os cenários considerados o teste de Wald mostrou-se um pouco superior aos da razão de verossimilhanças e Escore. O estudo também mostrou que para n pequeno os testes são pouco poderosos e alguma alternativa, como por exemplo simulação *Bootstrap*, deve ser considerada.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem os pareceristas pelas valiosas sugestões e também o CNPq e a FAPESP pelo parcial apoio financeiro.

MAZUCHELI, J.; Francisco LOUZADA, F. Discrimination between *Odd* Weibull and Weibull distributions. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.32, n.2, p.226-237, 2014.

- **ABSTRACT:** Discrimination of embedded distributions is usually made via likelihood ratio, Wald and score statistics, whose, under the null hypothesis, have asymptotically chi-squared distribution with d degrees freedom, where d indicates the difference between the number of free parameters of the tested distributions under the null and alternative hypotheses. In this paper it is conducted Monte Carlo simulation studies in order to evaluate the power of these tests when the interest lies in discriminating the Odd Weibull distribution from the Weibull one. The Odd Weibull distribution was recently proposed by Cooray (2006) being defined by a scale parameter and two other parameters that govern the behavior of the density and hazard functions. The Odd Weibull distribution can accommodate unimodal and bathtub hazard functions. According to the parameter values the Odd Weibull distribution had the Odd exponential, the Weibull and the exponential as particular cases.

- **KEYWORDS:** Odd Weibull distribution; Hazard rate function, power; likelihood ratio test; Wald test; score test.

Referências

- ALMALKI, S. J.; NADARAJAH, S. Modifications of the Weibull distribution: A review. *Reliability Engineering & System Safety*, v.124, p.32–55, 2014.
- BUSE, A. The Likelihood ratio, Wald, and Lagrange multiplier test: An expository note. *The American Statistician*, v.36, n.3, p.153–157, 1982.
- CARONI, C. Testing for the Marshall-Olkin extended form of the Weibull distribution. *Statistical Papers*, v.51, n.2, p.325–336, 2010.
- COORAY, K. Generalization of the Weibull distribution: the odd Weibull family. *Statistical Modelling. An International Journal*, v.6, n.3, p.265–277, 2006.
- COORAY, K. Analyzing grouped, censored, and truncated data using the odd Weibull family. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, v.41, n.15, p.2661–2680, 2012.
- COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall, 1974.
- DOORNIK, J. A. *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox, 3rd ed.* [S.l.]: London: Timberlake Consultants Press and Oxford, 2007.
- ENGLE, R. F. Handbook of econometrics. In: *Advances in Reliability*. Amsterdam: North Holland,: Griliches and Intrilligator, 1984, (Handbook of Statistics., v.2). p.775–826.
- FREEDMAN, D. A. How can the score test be inconsistent? *The American Statistician*, v.61, n.4, p.291–295, 2007.

- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Introduction of shape/skewness parameter(s) in a probability distribution. *Journal of Applied Statistical Science*, v.7, n.2, p.153–171, 2009.
- IBRAHIM, J. G.; CHEN, M.-H.; SINHA, D. *Bayesian survival analysis*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 2001. (Springer Series in Statistics).
- JIANG, H.; XIE, M.; TANG, L. C. On the odd Weibull distribution. *Journal of Risk and Reliability*, v.222, n.4, p.583–594, 2008.
- LAI, C.-D. *Generalized Weibull distributions*. [S.l.]: Springer, Heidelberg, 2014. (Springer Briefs in Statistics).
- LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data, 2nd Ed.* New York: John Wiley and Sons, 2003.
- LEHMANN, E.; CASELLA, G. *Theory of Point Estimation, 2nd Ed.* [S.l.]: Springer Verlag, 1998. ISBN 0387985026.
- MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, v.84, n.3, p.641–652, 1997. ISSN 0006-3444.
- MCCOOL, J. I. *Using the Weibull distribution*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012. (Wiley Series in Probability and Statistics). Reliability, modeling, and inference.
- MURTHY, P. D. N.; XIE, M.; JIANG, R. *Weibull models*. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 2004. xvi+383 p. (Wiley Series in Probability and Statistics).
- RINNE, H. *The Weibull Distribution: A Handbook*. Hoboken, NJ: Chapman & Hall/CRC, 2009. xvi+383 p. (Wiley Series in Probability and Statistics).

Recebido em 17.02.2014.

Aprovado após revisão em 04.06.2014.