

## AJUSTES DE MODELOS NÃO LINEARES DE EFEITOS FIXOS, COM PONDERAÇÃO E MISTO-APLICAÇÕES

Lídia Raquel de CARVALHO<sup>1</sup>  
Glauber Márcio Silveira PEREIRA<sup>1</sup>  
Helenice de Oliveira Florentino SILVA<sup>1</sup>  
Martha Maria MISCHAN<sup>1</sup>  
Edson Luiz FURTADO<sup>2</sup>

- **RESUMO:** Modelos não lineares tendem a ser usados quando são sugeridos por considerações teóricas, ou por comportamentos não lineares. Mesmo quando uma aproximação linear é aceitável, um modelo não linear pode ainda ser utilizado para se obter uma interpretação clara dos parâmetros. O objetivo desta pesquisa foi o estudo das funções logística, de Gompertz, von Bertalanffy e de Richards com ajustes em três modelos: modelo de efeitos fixos, modelo com ponderação e modelo de efeitos mistos a dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*, obtidos em três regiões de plantio pertencentes a Votorantim Celulose e Papel. Os critérios utilizados para a seleção de modelos foram: Quadrado médio dos resíduos, Critério de informação de Akaike, Peso de Akaike, Critério de Informação Bayesiano de Schwarz, teste de Breusch-Pagan e coeficiente de correlação ao quadrado. O modelo com ponderação foi o mais adequado e quanto à escolha da melhor função, a de Gompertz foi a que se mostrou melhor, e em segundo lugar a de Richards.
- **PALAVRAS-CHAVE:** Modelos não lineares, modelos ponderados, curvas de crescimento, dados longitudinais.

### 1 Introdução

Segundo Seber & Wild(1989), uma importante tarefa em estatística é encontrar relações entre variáveis. Entretanto, na prática, particularmente nas áreas biológicas o processo é geralmente complexo e não muito bem entendido. Isto significa que se tem uma vaga ideia ou nenhuma ideia sobre a forma de relação entre as variáveis e o objetivo é encontrar algum modelo que seja o mais próximo possível dos dados.

As funções logística, Gompertz, von Bertalanffy e Richards têm várias aplicações na área biológica, em especial no crescimento de animais e de plantas.

A maioria dos trabalhos que compara modelos não leva em consideração as variâncias durante os tempos. Pasternak & Shalev (1994) afirmaram que o simples ajuste

---

1 Universidade Estadual Paulista - UNESP, Instituto de Biociências - IBB, Departamento de Bioestatística, CEP: 18610-970, Botucatu, São Paulo, Brasil. E-mail: [lidiarc@ibb.unesp.br](mailto:lidiarc@ibb.unesp.br); [glaubersp@gmail.com](mailto:glaubersp@gmail.com); [helenice@ibb.unesp.br](mailto:helenice@ibb.unesp.br); [mmischan@ibb.unesp.br](mailto:mmischan@ibb.unesp.br)

2 Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Ciências Agrônomicas, Departamento de Proteção Vegetal, CEP: 18610-307, Botucatu, SP, Brasil. E-mail: [elfurtado@fca.unesp.br](mailto:elfurtado@fca.unesp.br)

de uma regressão não linear a dados longitudinais pode ser ineficiente, uma vez que não considera a heterogeneidade de variâncias. Elias (1988), estudando curvas de crescimento com raças zebuínas, comparou os modelos de Brody, Gompertz, logístico Richards e von Bertalanffy, ajustados nas estruturas não ponderada e ponderada pelo inverso da variância dos pesos dos animais, verificando que a utilização da ponderação promoveu uma marcante redução na variabilidade das estimativas dos parâmetros.

Mazzini et al. (2003) ajustaram as funções de Brody, Gompertz, logística, Richards e von Bertalanffy a dados de crescimento de bovinos Hereford. A estimação dos parâmetros para modelos de regressão não linear foi feita pelo método dos quadrados mínimos ponderado. Foram obtidos ajustes de curvas individuais para os animais em dois diferentes modelos: não-ponderado e ponderado pelo inverso da variância dos pesos, com o objetivo de levar em consideração a heterogeneidade das variâncias. A comparação entre os modelos foi feita pela interpretação biológica dos parâmetros e dos avaliadores da qualidade de ajuste (coeficiente de determinação ajustado, quadrado médio do resíduo, erro de predição médio, teste t de Student, para as estimativas dos parâmetros "A" e "K" e percentual de convergência). O melhor modelo foi o ponderado pelo inverso da variância dos pesos. As funções que apresentaram melhor ajuste foram as de von Bertalanffy e Gompertz, seguidas da logística. As funções de Brody e Richards apresentaram um baixo percentual de convergência, mostrando-se inadequadas para descrever os dados em estudo.

Mazzini et al. (2005) ajustaram os modelos de crescimento de Brody, Gompertz, logístico e von Bertalanffy a dados de peso e idade de novilhos Hereford utilizando os métodos dos quadrados mínimos ordinários, quadrados mínimos ponderados, quadrados mínimos ponderados generalizados com erros autorregressivos de primeira e segunda ordens. Compararam os modelos pelos avaliadores de qualidade do ajuste: percentual de convergência, quadrado médio do resíduo, coeficiente de determinação ajustado e erro de predição médio. Concluíram que os modelos de Gompertz e von Bertalanffy ajustados pelos métodos dos quadrados mínimos ponderados e os ponderados generalizados com erros autorregressivos de primeira e segunda ordens se mostraram melhores para descrever o crescimento dos novilhos Hereford até os dois anos de idade.

Schinckel & Craig (2002) usaram modelos não lineares de efeitos mistos como uma alternativa para estudar o crescimento de porcos. A otimização dos sistemas de produção de suínos envolvendo a avaliação de manejos alternativos e estratégias de mercado requer conhecimento da variabilidade entre e dentro do peso ao nascer. Estes modelos fornecem parâmetros necessários para a modelagem estocástica, que é necessário para avaliar o impacto econômico das mudanças que reduzem a quantidade de variação. Concluíram que os modelos não lineares de efeitos mistos permitem uma estimação mais precisa das funções do crescimento dos animais que os modelos tradicionais de efeitos fixos.

Sartorio et al. (2012), utilizaram a abordagem mista não linear para analisar os dados de comprimento de frutos de pereira asiática (*Pyrus pyrifolia*) ao longo de onze observações coletadas quinzenalmente, após a antese. Modelos com efeito aleatório em cada parâmetro e combinações destes foram ajustados e realizados testes, com o intuito de confrontar os resultados com a sugestão de inserir efeito aleatório pelos gráficos de intervalos de confiança sugerido por Pinheiro & Bates (2000), que enfatizam que estes gráficos fornecem uma boa ideia sobre a variabilidade entre os indivíduos, podendo sugerir em quais parâmetros é conveniente associar um efeito aleatório.

Para explicar o crescimento de frutos da cultivar Shinsseiki ainda pendentes na planta, Sartorio et al. (2012) utilizaram o modelo de Gompertz com efeitos aleatórios associados aos seus parâmetros. Na seleção da parte aleatória do modelo utilizaram o teste da razão de verossimilhanças (TRV) e os critérios de informação de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC). Dentre as estruturas de covariância disponíveis, procuraram uma estrutura parcimoniosa que explicasse bem o comportamento das variâncias e covariâncias dos dados. A significância dos efeitos fixos foi testada utilizando-se a estatística de Wald. Concluíram que o comprimento da pera ao longo do tempo pode ser analisado utilizando-se regressão não linear mista. O modelo final escolhido incluiu efeito aleatório apenas na assíntota ( $\beta_1$ ) como sugerido por Pinheiro & Bates (2000) pelos gráficos de intervalos. A solução mostrou-se mais atraente, uma vez que incorporou a variação entre os indivíduos nos procedimentos de ajuste.

Prado et al. (2013) ajustaram os modelos Gompertz e logístico a dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde, com base nos dados de diâmetros externos, longitudinal e transversal. Utilizaram as estruturas de erros independentes e autocorrelacionados (processos autorregressivos de primeira e segunda ordem). Para avaliação da qualidade dos ajustes utilizaram os critérios coeficiente de determinação ajustado, desvio-padrão residual e peso de Akaike, segundo Motulsky & Christopoulos (2004). Concluíram que a consideração da estrutura residual adequada no ajuste dos modelos logístico e Gompertz resultou em reduções expressivas nas estimativas dos erros padrões assintóticos dos parâmetros, sendo o modelo logístico, o mais adequado para descrever o crescimento, em diâmetro, longitudinal e transversal de frutos de coqueiro anão verde.

De acordo com os exemplos citados anteriormente e por este trabalho verificou-se que as variâncias eram heterogêneas ao longo dos tempos estudados, pensou-se na utilização dos modelos com ponderação e de efeitos mistos, para que o problema fosse resolvido, bem como a comparação dos mesmos com o modelo de efeitos fixos.

O objetivo desta pesquisa foi o estudo das funções logística, de Gompertz, von Bertalanffy e de Richards com ajustes em três modelos: modelo de efeitos fixos, com ponderação e de efeitos mistos a dados de volume do tronco de *Eucaliptus grandis*, obtidos em três regiões de plantio pertencentes a Votorantim Celulose e Papel.

## 2 Material e métodos

Foram utilizados dados de volume do tronco de *Eucaliptus grandis*, obtidos em três regiões de plantio pertencentes à Votorantim Celulose e Papel na região do Vale do Paraíba. Esta região foi escolhida por se encontrarem grandes maciços de reflorestamento destinados tanto para recuperação de áreas degradadas como para fins de produção em empresas privadas. Em cada região havia três linhas com aproximadamente 50 plantas em cada linha. Foram 130 repetições na Fazenda Gaspar, 131 na Fazenda Nossa Senhora da Ajuda e 141 na Fazenda São Pedro, totalizando 402 repetições. As medidas foram efetuadas em 11 tempos não equiespaçados que foram 8, 10, 12, 15, 19, 21, 25, 27, 30, 36 e 50 meses para a Fazenda São Pedro; 9, 11, 13, 16, 19, 22, 26, 28, 31, 38, e 52 meses para a Fazenda Nossa Senhora da Ajuda e 10, 12, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 39 e 52 meses para a Fazenda Gaspar.

Como o interesse era comparar os três modelos e para o ajuste do modelo misto é necessário que se usem todas as repetições em um único ajuste, foram feitos ajustes únicos com todas as repetições nas três configurações.

Considerou-se os modelos logístico:  $y_i = \alpha / (1 + \exp(-\beta \gamma_i)) + \epsilon_i$ , Gompertz:  $y_i = \exp(\alpha \exp(\beta + \gamma_i)) + \epsilon_i$ , von Bertalanffy:  $y_i = \alpha (1 - \beta \exp(-\gamma_i))^3 + \epsilon_i$  e Richards:  $y_i = \alpha (1 - \beta \exp(-\gamma_i))^\delta + \epsilon_i$  e ajustados a um conjunto  $(x_i; y_i)$  de dados observados,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , os parâmetros e os erros considerados de acordo com cada estrutura estudada.

No ajuste dos modelos e estimação dos parâmetros utilizou-se o método dos mínimos quadrados através do programa SAS versão 9.2 e a função PROC MODEL para o ajuste com estrutura de erros independentes e com ponderação definindo-se o método de Gauss Newton como processo iterativo a ser utilizado. A estrutura de erros com ponderação foi feita pelo inverso da variância dos valores em cada tempo, empregando-se a opção WEIGHT do procedimento MODEL do SAS (SAS, 2010).

O modelo de efeitos mistos foi o seguinte:

$$y_{ij} = f(x_i, \theta) + \Delta_j g(x_i, \theta) + \zeta_{ij}, \text{ com } g(x_i, \theta) = f(x_i, \theta) / \alpha,$$

sendo  $y_{ij}$  o volume da  $j$ -ésima planta na  $i$ -ésima fazenda,  $\Delta_j$  uma variável aleatória relativa à  $j$ -ésima planta, com distribuição normal  $(0, \sigma_{\Delta}^2)$ ,  $\zeta_{ij}$  o erro aleatório, independente, com distribuição normal  $(0, \sigma_{\zeta}^2)$ , independente de  $\Delta_j$  e  $\theta$  o vetor de parâmetros. Para este ajuste utilizou-se a função PROC NLMIXED do SAS. Os comandos SAS utilizados encontram-se em ANEXO.

Foram utilizados os avaliadores de qualidade de ajustamento: quadrado médio do resíduo (QMRes), critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano de Schwarz (BIC) e peso de Akaike, segundo Motulsky & Christopoulos (2004). Apesar dos critérios de informação de Akaike e de informação Bayesiano de Schwarz serem propostos para comparar modelos encaixados, na literatura tem surgido exemplos em que se usa estes critérios mesmo quando os modelos não são encaixados (Terra, Muniz e Savian, 2010; Prado, Savian e Muniz, 2013). Por isto optou-se por usar estes critérios neste trabalho.

O critério de informação de Akaike (AIC) e o critério de informação Bayesiano (BIC), propostos por Akaike (1974) e Schwarz (1978), são definidos como:

$$AIC = -2\ln(L) + 2p \text{ e } BIC = -2\ln(L) + p\ln(n),$$

em que  $L$  é a função de verossimilhança;  $n$  é o número de observações e  $p$  o número de parâmetros ajustados.

O peso de Akaike mostra a probabilidade de um modelo ser mais adequado que um outro e é definido como:

$$Probabilidade = \frac{e^{-0,5\Delta}}{1 + e^{-0,5\Delta}}$$

onde  $\Delta$  é a diferença entre os valores de AIC dos modelos comparados.

A homocedasticidade dos resíduos foi verificada através do teste de Breusch-Pagan (Breusch & Pagan, 1979) e a normalidade pelo teste de Shapiro-Wilk.

Para a obtenção da estatística do teste de Breusch-Pagan, inicialmente ajustou-se o modelo de regressão linear simples e foram encontrados os resíduos  $e = (e_1, \dots, e_n)$  e os valores ajustados  $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ . Em seguida, consideram-se os resíduos ao quadrado e os padronizaram de modo que a média do vetor de resíduos padronizados, que denotaremos por  $u$ , seja 1. Esta padronização foi feita dividindo cada resíduo ao quadrado pela  $SQE/n$  em que  $SQE$  é a Soma de Quadrados dos Resíduos do modelo ajustado e  $n$  é o número de observações. Desta forma, temos que cada resíduo padronizado é dado por

$$u_i = \frac{e_i^2}{SQE/n}, i = 1, \dots, n,$$

em que  $SQE = \sum_{i=1}^n e_i^2$ .

Por fim, fez-se a regressão entre  $u=(u_1, \dots, u_n)$  (variável resposta) e o vetor  $\hat{y}$  (variável explicativa) e obteve-se a estatística do teste  $X_{BP}^2$  calculando a Soma de Quadrados da Regressão de  $u$  sobre  $\hat{y}$  e dividindo-se o valor encontrado por 2. Sob a hipótese nula, esta estatística tem distribuição de qui-quadrado com 1 grau de liberdade (Breusch & Pagan(1979); Koenker(1981)).

$$X_{BP}^2 = SQREG/2.$$

## Resultados e discussão

Na Tabela 1 são apresentadas as estimativas dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, os quadrados médios do resíduo e os valores de  $p$  para o teste de Breusch-Pagan para o modelo com ponderação para as quatro funções.

Na Tabela 2 são apresentados os coeficientes de determinação, critérios de informação de Akaike e critérios de Informação Bayesiano de Schwarz segundo modelos e funções ajustadas para as três regiões de plantio. Na Tabela 3 são apresentados os pesos de Akaike comparando as funções de Gompertz e Richards no modelo com ponderação e comparando o modelo com ponderação e de efeitos mistos para a função de Gompertz nas três regiões. Na Figura 1 são apresentados os ajustes médios da função de Gompertz segundo região e linhas por região. São também apresentados os intervalos de 95% de confiança de Wald para a assíntota para cada região. Na Figura 2 são apresentados os resíduos gerados por cada modelo para a Fazenda Gaspar.

Os valores de AIC e BIC mostraram que o modelo ponderado teve menores valores para 50% dos ajustes e o modelo de efeitos mistos teve menores valores para os outros 50%, porém, quanto aos coeficientes de correlação ao quadrado, o modelo ponderado apresentou sempre valores maiores (Tabela 2). Portanto, elegemos este modelo para apresentar as estimativas e os erros-padrão (Tabela 1). Quanto às funções, em relação aos valores de coeficientes de determinação, as de Richards, Gompertz e von Bertalanffy tiveram valores iguais para todas as regiões, somente a logística apresentou valores um pouco menores. Como os valores de AIC e BIC foram menores para a função de Gompertz, e em segundo lugar a de Richards, optamos pela função de Gompertz para representar os dados. Os pesos de Akaike mostraram que a probabilidade da função de Gompertz ser melhor que a Richards foi de 0,70 na região Gaspar e 0,54 na região de Nossa Senhora da Ajuda, ficando abaixo de 0,50 na região de São Pedro, indicando que nesta região a função de Richards foi melhor (Tabela 3). Quanto ao modelos, nas regiões

de Gaspar e Nossa Senhora da Ajuda a probabilidade do modelo com ponderação ser melhor que o de efeitos mistos foi igual a 0,99, sendo o contrário somente na região de São Pedro (Tabela 3). Para a região de São Pedro, comparando os modelos com ponderação e de efeitos mistos para a função de Richards, o modelo com ponderação se mostrou melhor, com peso de Akaike igual a 0,99.

Tabela 1 - Estimativas dos parâmetros, (erros-padrão), quadrados médios do resíduo (QMRes) e valores de p para o teste de Breusch-Pagan(BP), para o modelo com ponderação, para as quatro funções ajustadas aos dados de volume de tronco de *Eucalyptus grandis*(m<sup>3</sup>) nas três regiões de plantio

Função/Região	Parâmetros				QMRes	P <sub>BP</sub>
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$		
Logical Gaspar	0,0871 (0,0030)	6,4104 (0,0785)	0,2625 (0,0058)	.. ..	0,00117	0,56
Logical NSA	0,0872 (0,0043)	6,1390 (0,0797)	0,2389 (0,0061)	.. ..	0,001553	0,73
Logical São Pedro	0,1091 (0,0038)	7,5063 (0,0806)	0,3024 (0,0055)	.. ..	0,001674	0,14
Gompertz Gaspar	0,1302 (0,0064)	2,4103 (0,0293)	0,0923 (0,0030)	.. ..	0,001092	0,99
Gompertz NSA	0,1459 (0,0103)	2,2762 (0,0267)	0,0792 (0,0032)	.. ..	0,001458	0,98
Gompertz São Pedro	0,1974 (0,0097)	2,5240 (0,0220)	0,0889 (0,0024)	.. ..	0,001462	0,99
von Bertalanffy Gaspar	0,1968 (0,0156)	1,2775 (0,0277)	0,0455 (0,0025)	.. ..	0,001103	0,99
von Bertalanffy NSA	0,2744 (0,0358)	1,1463 (0,0217)	0,0339 (0,0026)	.. ..	0,001465	0,99
von Bertalanffy São Pedro	0,4320 (0,0443)	1,2020 (0,0182)	0,0334 (0,0019)	.. ..	0,001494	0,99
Richard Gaspar	0,1396 (0,0115)	0,6943 (0,4261)	0,0803 (0,0103)	12,1586 (10,2414)	0,001092	0,99
Richard NSA	0,1710 (0,0239)	0,8118 (0,2988)	0,0617 (0,0108)	7,9705 (4,8650)	0,001457	0,99
Richard São Pedro	0,2271 (0,0200)	0,8306 (0,2232)	0,0717 (0,0076)	10,1472 (4,3993)	0,001458	0,99

Nota: Gaspar, NSA e São Pedro são as regiões de plantio.

Tabela 2 - Coeficiente de correlação ao quadrado ( $R^2$ ), Critério de informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Bayesiano de Schwarz (BIC) segundo modelos e funções ajustadas para as três regiões de plantio- dados de volume de tronco de *Eucalyptus grandis*( $m^3$ )

Função/ Região	Modelo								
	Efeitos fixos			Ponderado			Efeitos Mistos		
	$R^2$	AIC	BIC	$R^2$	AIC	BIC	$R^2$	AIC	BIC
Logical Gaspar	0,57	-9710,0	-9694,2	0,68	-9647,1	-9631,3	0,57	-9713,44	-9697,64
Logical NSA	0,51	-9354,2	-9338,4	0,60	-9314,1	-9298,3	0,51	-9361,66	-9345,84
Logical São Pedro	0,67	-10110,4	-10094,3	0,68	-9908,4	-9892,4	0,67	-10112,9	-10096,9
Gompertz Gaspar	0,57	-9722,9	-9707,1	0,70	-9745,6	-9729,8	0,57	-9722,53	-9706,73
Gompertz NSA	0,51	-9363,8	-9348,0	0,62	-9404,3	-9388,5	0,51	-9366,27	-9350,45
Gompertz São Pedro	0,68	-10121,0	-10104,9	0,72	-10119,3	-10103,3	0,68	-11429,6	-11413,6
von Bert. Gaspar	0,57	-9735,8	-9720,0	0,70	-9731,5	-9715,7	0,57	-9721,85	-9706,05
von Bert. NSA	0,51	-9363,8	-9348,0	0,62	-9398,1	-9382,3	0,51	-9365,32	-9349,5
von Bert. São Pedro	0,68	-10121,0	-10104,9	0,71	-10085,2	-10069,2	0,68	-10125,3	-10109,2
Richard Gaspar	0,57	-9708,0	-9687,0	0,70	-9743,9	-9722,8	0,57	-9794,77	-9773,68
Richard NSA	0,51	-9361,8	-9340,7	0,62	-9404,0	-9382,9	0,50	-9195,61	-9174,52
Richard São Pedro	0,68	-10119,0	-10097,6	0,72	-10121,6	-10100,2	0,68	-9375,75	-9354,66

Nota: Gaspar, NSA e São Pedro são as regiões de plantio

Tabela 3 - Peso de Akaike comparando as funções de Gompertz e Richards no modelo com ponderação e comparando os modelos com ponderação e de efeitos mistos para a função de Gompertz nas três regiões

Região	Funções		Modelos
	Gompertz/Richards		Com ponderação/efeitos mistos
Gaspar	0,70		0,99
NSA	0,54		0,99
São Pedro	0,24		0,00

Na Tabela 1 percebe-se que para a assíntota, as estimativas são sempre maiores para a Região de São Pedro em relação às demais regiões, para todas as funções. A Figura 1

que apresenta o ajuste da função de Gompertz segundo regiões mostra este fato. Para os parâmetros beta e gama, os valores ficaram próximos comparando-se as regiões em cada função e para o delta, a região Nossa Senhora da Ajuda teve valor menor. Os erros-padrão das estimativas tiveram valores próximos para as regiões em cada função. Os valores do quadrado médio do resíduo foram menores para as funções de Richards e Gompertz.

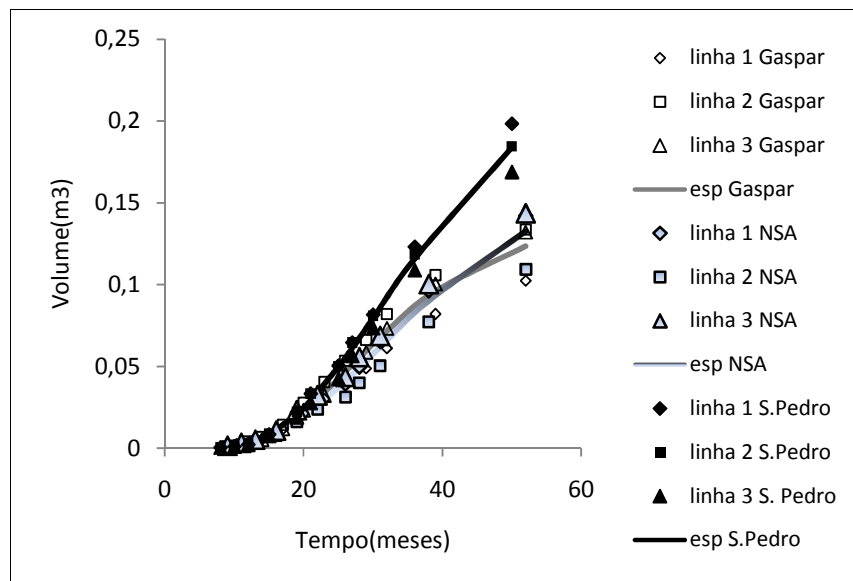


Figura 1 - Ajustes médios do modelo de Gompertz segundo região e linhas por região- dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*(m<sup>3</sup>).

Em termos de heterogeneidade, os modelos com ponderação e o de efeitos mistos corrigiram quase todas as funções e regiões, com exceção da função de Richards para São Pedro no modelo de efeitos mistos.

Segundo Mazzini et al. (2005) que ajustaram os modelos de Brody, de Gompertz, logístico e von Bertalanffy a dados de crescimento de novilhos Hereford, os modelos de Gompertz e von Bertalanffy foram os mais indicados para descrever o crescimento dos animais, assim como a estrutura com ponderação foi melhor que a estrutura de efeitos fixos. Segundo Silva et al.(2011) que utilizaram os modelos de Brody, de Gompertz, logístico, von Bertalanffy e de Richards para descrever o crescimento de vacas de corte de diferentes tipos biológicos, concluíram que apenas os modelos Brody e von Bertalanffy convergiram para todos os grupos genéticos. Concluíram também que a estrutura com ponderação foi importante na estimação dos parâmetros.

A região de São Pedro apresentou valores da assíntota superiores às demais,  $IC_{95\%}(\alpha)$ : [0,1756;0,2192] para São Pedro; [0,1228;0,1690] para NSA e [0,1158; 0,1446] para Gaspar.



Na Figura 2 vemos que o modelo de efeitos mistos e o ponderado corrigiram os problemas de heterogeneidade, enfatizando que estes modelos foram melhores que o modelo de efeitos fixos.

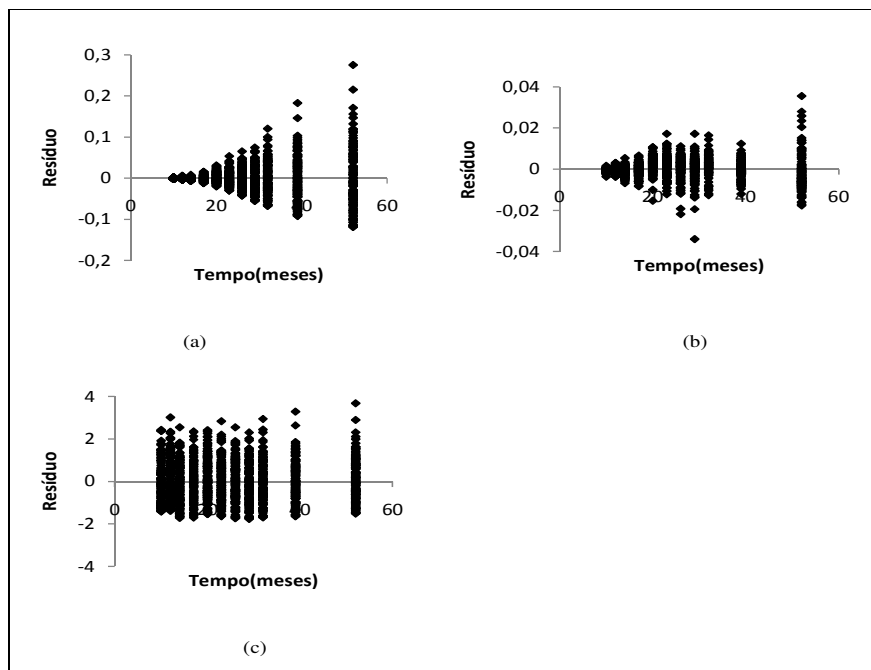


Figura 2 - Resíduos para os três modelos para a Fazenda Gaspar. (a) Modelo de efeitos fixos (b) modelo de efeitos mistos e (c) modelo com ponderação

## Conclusões

Os modelos com ponderação e de efeitos mistos corrigiram a heterocedasticidade, porém os de efeitos ponderados se mostraram melhores apresentando coeficientes de correlação ao quadrado maiores e pesos de Akaike iguais a 0,99.

Quanto às funções, a de Gompertz se mostrou melhor para as regiões de Gaspar e Nossa Senhora da Ajuda e a de Richards para a Região de São Pedro.

A Região de São Pedro apresentou um comportamento diferente das demais, mostrando estimativa da assíntota superior às demais.

## Agradecimentos

À FAPESP, FUNDUNESP e PROPe, pelos auxílios recebidos para o desenvolvimento desta pesquisa e à CAPES pela bolsa concedida ao segundo autor.

CARVALHO, L.R.; PEREIRA, G.M.S.; SILVA, H.O.F.; MISCHAN, M.M.; FURTADO, E.L. Adjustments of fixed, with weighting and mixed non-linear models –applications. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.32; n.2, p.296-307, 2014.

- **ABSTRACT:** *Nonlinear models tend to be used when it is suggested by theoretical considerations or by non-linear behavior. Even when a linear approximation is acceptable, a non-linear model can also be used to obtain a clear understanding of the parameters. The objective of this research was: to study of logistics, Gompertz, von Bertalanffy and Richards functions with adjustments in three structures: the fixed effects model, the weighting and mixed effects model adjusted to data of volume of the trunk of Eucalyptus grandis, from three growing regions belonging to Votorantim Celulose e Papel. The criteria used for the selection of models were: Error mean square, Akaike information criterion, Akaike weight, Schwarz Bayesian Information Criterion, Breusch-Pagan test and squared correlation coefficient. The model with weighting was the most appropriate. In the choice of the best function, Gompertz was the one that proved better, second was Richards.*
- **KEYWORDS:** *non-linear models, mixed effects models, weighted models, growth curves, longitudinal data.*

## Referências

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on Automatic Control*, v.19, n.6, p.716-723, 1974.

BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. S. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica*, v.47, n.5, p.1287-1294, 1979.

ELIAS, A. M. *Análise de curvas de crescimento de vacas das Raças Nelore, Guzerá e Gir*. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ciência Animal e Pastagens) Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 1998.

INSTITUTE, S. *SAS 9.2 Language Reference: concepts*. Cary:SAS Institute INC, 2010. 629p.

KOENKER, R. A Note on Studentizing a Test for Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, v.17, p.107–112, 1981.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; AQUINO, L. H.; SILVA, F. F. Análise da curva de crescimento de machos Hereford. *Ciênc.Agrotec.*, Lavras, v.25, n.5, p.1105-1112, 2003.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F.; AQUINO, L. H. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autoregressivos. *Ciência Rural*, Santa Maria, v.35, n.2, p.422-427, 2005.

MOTULSKY, H. CHRISTOPOULOS, A. *Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression- A practical guide to curve fitting*. Oxford, Oxford University Press, 2004. 351p.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B. A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. *Growth, Development & Aging*, Bar Harbor, v.58, n.1, p. 33-39, 1994.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. (2000). *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. New York: Springer-Verlag, 528p.

- PRADO, T. K. L.; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. *Ciência Rural*, Santa Maria, v.43, n.5, p.803-809, 2013.
- SARTORIO, S. D.; SAVIAN, T. V.; LIMA, C. G.; MAESTRE, M. R. Descrição de curvas de crescimento de frutos de pereira asiática utilizando o modelo de Gompertz com abordagem mista. In 57<sup>a</sup> Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria-RBRAS, 05 a 09 de maio, Piracicaba, *resumo estendido*, Piracicaba, 2012, p.834-838.
- SCHINCKEL, A. P.; CRAIG, B. A. Evaluation of alternative nonlinear mixed effects models of swine growth. *The Professional Animal Scientist*, v.18: p.219-226, 2002.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, v.6, n.2, p.461-464, 1978.
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. *Nonlinear regression*. New Yor, John wiley & Sons, 1989. 768p.
- SILVA, F. L.; ALENCAR, M. M.; FREITAS, A. R.; PACKER, I. U.; MOURÃO, G .B. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. *Pesq.Agrop.Bras*, v.46, n.3, p.262-271, 2011.
- TERRA, M. F.; MUNIZ, J.; SAVIAN, T. V. Ajuste dos modelos logístico e Gompertz aos dados de crescimento de frutos da tamareira-anã(Phoenix roebelenii O'BRIEN). *Magistra*, v.22, n.1, p.01-07, 2010.

Recebido em 25.04.2014

Aprovado após revisão em 03.07.2014

## ANEXO

Comandos SAS para análise de dos modelos com ponderação e misto.

```
/*y = volume de crescimento de floresta em 2 fazendas,  
utilizando-se 2 plantas - Ajustes com ponderação e misto*/
```

```
data glau; Input fazenda$ planta idade vol_m3 var @@;
```

```
Cards;
```

```
SPedroI 1 8 0.000910 2.6900E-07 SPedroI 1 10 0.002750 1.3700E-06  
SPedroI 1 12 0.005000 4.5700E-06 SPedroI 1 15 0.013180 3.1000E-05  
SPedroI 1 19 0.030870 1.3800E-04 SPedroI 1 21 0.046540 2.9600E-04  
SPedroI 1 25 0.069600 6.1600E-04 SPedroI 1 27 0.086410 9.2600E-04  
SPedroI 1 30 0.104840 1.5070E-03 SPedroI 1 36 0.144410 3.3310E-03  
SPedroI 1 50 0.220030 8.9850E-03 SPedroI 2 8 0.000380 2.6900E-07  
SPedroI 2 10 0.001410 1.3700E-06 SPedroI 2 12 0.003420 4.5700E-06  
SPedroI 2 15 0.010870 3.1000E-05 SPedroI 2 19 0.023070 1.3800E-04  
SPedroI 2 21 0.036920 2.9600E-04 SPedroI 2 25 0.052630 6.1600E-04  
SPedroI 2 27 0.063720 9.2600E-04 SPedroI 2 30 0.074160 1.5070E-03  
SPedroI 2 36 0.093810 3.3310E-03 SPedroI 2 50 0.132460 8.9850E-03  
Gaspar 1 10 0.000400 1.1900E-06 Gaspar 1 12 0.001470 5.2800E-06  
Gaspar 1 14 0.003260 1.1400E-05 Gaspar 1 17 0.011080 4.6400E-05  
Gaspar 1 20 0.027960 1.6400E-04 Gaspar 1 23 0.044790 3.5300E-04  
Gaspar 1 26 0.059810 6.2900E-04 Gaspar 1 29 0.072660 1.0210E-03  
Gaspar 1 32 0.091710 1.6370E-03 Gaspar 1 39 0.132190 3.1140E-03  
Gaspar 1 52 0.168340 5.7670E-03 Gaspar 2 10 0.001720 1.1900E-06  
Gaspar 2 12 0.004820 5.2800E-06 Gaspar 2 14 0.008880 1.1400E-05  
Gaspar 2 17 0.022450 4.6400E-05 Gaspar 2 20 0.049240 1.6400E-04  
Gaspar 2 23 0.075550 3.5300E-04 Gaspar 2 26 0.091720 6.2900E-04  
Gaspar 2 29 0.102310 1.0210E-03 Gaspar 2 32 0.130630 1.6370E-03  
Gaspar 2 39 0.174010 3.1140E-03 Gaspar 2 52 0.210880 5.7670E-03
```

```
run;
```

```
title ' Floresta - Ajustes com ponderação -Gompertz ';
```

```
proc sort data=glau; by fazenda; run;
```

```
proc model data=glau method=marquardt breusch 'pagan';
```

```
parms a=0.06 b=5.2 c=0.2;
```

```
Vol_m3=a*(exp(-exp(b-c*idade))); w=1/var;
```

```
fit Vol_m3/ outall out=tablw_ outest=parlw_ outs=qmelw_
```

```
printall; weight w; by fazenda; run;
```

```
title ' Floresta - Ajustes modelo misto -Gompertz ';
```

```
proc nlmixed data=glau cov hess;
```

```
parms a=0.12 b=3 c=0.15 v1=0.02 v2=10;
```

```
z=exp(b-c*idade); pred=(a+d)*exp(-z);
```

```
model Vol_m3 ~ normal(pred,v1);
```

```
random d ~ normal(0,v2) subject=nind;
```

```
predict pred out=s2a; by fazenda; run;
```

```
proc print data=s2a;
```

```
var idade Vol_m3 Pred StdErrPred Lower Upper; by fazenda;
```

```
run;
```